

A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE POPPER

Fábio Maia Bertato
CLE – UNICAMP - Brasil

Resumo

O critério da demarcação de Popper claramente separa a matemática das ciências empíricas. Popper não desenvolveu de uma forma sistemática uma filosofia da matemática. Lakatos é considerado o representante da ampliação e aplicação da filosofia da ciência de Popper à matemática. Todavia, Popper deixou em seus escritos diversos trechos e ensaios dedicados ou relacionados à matemática que nos fornecem suas respostas a alguns problemas da filosofia da matemática. O objetivo do presente trabalho é apresentar sucintamente algumas de suas idéias que constituem o que podemos denominar Filosofia da Matemática de Popper.

Palavras-chave: Popper, Filosofia da Matemática, Critério da Demarcação.

Abstract

The criterion of demarcation of Popper clearly separates the mathematics of empirical sciences. Popper did not develop a philosophy of mathematics in a systematic form. Usually, Lakatos is considered the responsible for the application of the Popper's philosophy of science to the mathematics. However, one can find in Popper's writings his answers to some problems of the philosophy of mathematics. Our objective is to present briefly some of his ideas that constitute what we can call Popper's Philosophy of Mathematics.

Keywords: Popper, Philosophy of Mathematics, Criterion of Demarcation.

1. Algumas considerações sobre Popper e sua Filosofia da Ciência

I.

Karl Raimund Popper nasceu em 28 de julho de 1902, em Viena. Estudou filosofia, matemática e física. Trabalhou na clínica de consulta infantil de Alfred Adler (1870 - 1937). Interessou-se por música e por sua história. Em 1928, doutorou-se em filosofia e um

ano depois se habilitou para o ensino de matemática e de física na escola secundária, escrevendo, para o exame, uma tese sobre problemas da axiomática em geometria (incluindo um capítulo sobre geometria não-euclidiana). Devido à presença dos nazistas na Áustria, Popper transfere-se para a Nova Zelândia em 1937.

Popper publicou *Logik der Forschung* (“Lógica da descoberta científica”) em 1934, *Poverty of Historicism* em 1944 e 1945 e os volumes de *Open Society and Its Enemies* em 1945.

Em 1946, Popper transferiu-se para a Inglaterra, para lecionar na *London School of Economics*. Nesse período deu continuidade a seus estudos sobre filosofia e filosofia da ciência, resultando em duas obras: *Conjectures and Refutations* (1963) e *Objective Knowledge* (1972). Sua autobiografia intelectual (*Unend Quest*) e sua obra *Replies to my Critics* são de 1974. Juntamente com John Carew Eccles (1903 - 1997) publicou, em 1977, o livro *The Self and its Brain*. Faleceu em 17 de setembro de 1994.

II.

Podemos dizer que as teses centrais da epistemologia popperiana são constituídas pela crítica ao princípio de indução e pelo estabelecimento de um critério de demarcação da ciência.

O **Problema da Indução** (ou Problema de Hume) pode ser apresentado como a indagação sobre a validade de sentenças (ou enunciados) universais que encontrem base empírica. De acordo com uma visão indutivista, uma inferência é “indutiva” se ela conduz a enunciados universais (hipóteses e teorias) a partir de enunciados singulares ou particulares (observações ou experimentos). O indutivismo proclama que um cientista pode chegar a conclusões objetivas e intactas, apenas mediante registro, mensuração e descrição de seus achados, sem hipóteses ou expectativas prévias¹.

Popper é drástico. Para ele não existe método indutivo:

“Ora, está longe de ser óbvio, de um ponto de vista lógico, haver justificativa no inferir enunciados universais de enunciados singulares, independentemente de quão numerosos sejam estes; com efeito, qualquer conclusão colhida desse modo sempre pode revelar-se falsa: independentemente de quantos casos de cisnes brancos possamos observar, isso não justifica a conclusão de que todos os cisnes são brancos” (POPPER, 1974, p. 27).

Popper contesta a visão daqueles que aceitam que as ciências empíricas caracterizam-se pelo emprego dos “métodos indutivos”.

“Com rejeitar o método de indução, – poder-se-ia dizer – privo a ciência empírica daquilo que constitui, aparentemente, sua característica mais importante; isto quer dizer que afasto as barreiras a separar a ciência da especulação metafísica. Minha resposta a tal objeção é a de que a razão principal de eu rejeitar a Lógica Indutiva consiste, precisamente, em ela não proporcionar conveniente sinal diferenciador do caráter empírico, não-metafísico, de um sistema teórico; em outras palavras,

¹ Francis Bacon (1564-1626) foi o principal promotor do indutivismo e Liebig (1863) foi o primeiro cientista de destaque que o criticou como método científico (cf. POPPER, 1974, p 31, n5 e MAYR, 1998, p. 45).

consiste em ela não proporcionar adequado ‘critério de demarcação’” (POPPER, 1974, p. 34).

Popper denomina **Problema de Demarcação** (ou Problema de Kant) o problema de estabelecer um critério que permita distinguir as ciências empíricas, a Matemática e a Lógica, e os sistemas “metafísicos”². Popper considera os dois problemas como fontes de quase todos os problemas da epistemologia, sendo o último o mais importante. Seu critério de demarcação é aparentemente simples: uma teoria é científica se pode ser falseada (ou refutada) através da experiência.

como empírico ou científico se ele for passível de comprovação pela experiência. Essas considerações sugerem que deve ser tomado como critério de demarcação, não a verificabilidade, mas a falseabilidade de um sistema. Em outras palavras, não exigirei que um sistema científico seja suscetível de ser dado como válido, de uma vez por todas, em sentido positivo; exigirei, porém, que sua forma lógica seja tal que se torne possível validá-lo através de recurso a provas empíricas, em sentido negativo: deve ser possível refutar, pela experiência, um sistema científico empírico. (Assim, o enunciado ‘Choverá ou não amanhã’, não será considerado empírico, simplesmente porque não admite refutação, ao passo que será empírico o enunciado ‘Choverá aqui, amanhã’)” (POPPER, 1974, p. 42).

Esse critério de demarcação é ampliado contra possíveis objeções:

“(...) procurei definir a ciência empírica recorrendo ao auxílio do critério de falseabilidade; contudo, obrigado a admitir a procedência de certas objeções, prometi um suplemento metodológico à minha definição. Assim como o xadrez pode ser definido em função de regras que lhe são próprias, a Ciência pode ser definida por meio de regras metodológicas. Cabe proceder ao estabelecimento dessas regras de maneira sistemática. Coloca-se, de início, uma regra suprema, que serve como uma espécie de norma para decidir a propósito das demais regras e que é, por isso, uma regra de tipo superior. É a regra que afirma que as demais regras do processo científico devem ser elaboradas de maneira a não proteger contra o falseamento qualquer enunciado científico” (POPPER, 1974, p.56).

Os dois problemas são tratados com profundidade especialmente em *Logik der Forschung* (POPPER, 1974) e em *Conjectures and Refutations* (POPPER, 1963).

O conhecimento científico é, para Popper, o melhor e mais importante tipo de conhecimento que a humanidade possui, porém não é o único. Para ele, as características centrais do conhecimento científico são:

1. O conhecimento científico inicia-se com problemas práticos e teóricos. Nossos sucessos em resolvê-los levam a novos problemas.
2. O conhecimento consiste na busca pela verdade – a busca pelo objetivamente verdadeiro, por teorias explicativas.

² Popper difere dos positivistas que desejavam não tanto uma boa demarcação e sim a “derrubada total e aniquilação” da Metafísica.

3. Não é busca da certeza. Todo conhecimento humano é falível. O conhecimento científico é sempre hipotético, conjectural. O método da ciência é o método crítico: busca do erro e sua eliminação (cf. POPPER, 2000, p.3-5).

2. Conhecimento Objetivo e o Terceiro Mundo

I.

Popper defende a existência de dois tipos de conhecimento, o **subjetivo** (que depende das disposições dos organismos, de um sujeito que conhece) e o **objetivo** (que consiste do conteúdo lógico de nossas teorias, conjecturas etc.). Exemplos de conhecimento objetivo são as teorias publicadas em revistas científicas e em livros de uma biblioteca; discussões de tais teorias; dificuldades ou problemas conectados com tais teorias, etc.(cf. POPPER, 1972b, p. 73).

Segundo Popper, podemos distinguir três mundos ou universos:

Primeiro Mundo (W1): o mundo de objetos físicos ou de estados materiais.

Segundo Mundo (W2): o mundo de estados de consciência ou estados mentais, disposições comportamentais para agir.

Terceiro Mundo (W3): o mundo de conteúdos objetivos de pensamento, especialmente de pensamentos científicos, poéticos e de obras de arte.

Portanto, os conhecimentos subjetivos e objetivos são, respectivamente, habitantes de W2 e W3. Vejamos dois exemplos de conhecimento, um subjetivo e outro objetivo:

Ex. 1 – Sei que a conjectura de Goldbach não foi provada, mas creio que será provada algum dia.

Ex. 2 – Levando em consideração o estado atual do conhecimento metamatemático, parece possível que a conjectura de Goldbach seja indecidível.

Para Popper, o Ex. 1 é um conhecimento de W2 e o Ex. 2 é um conhecimento de W3. Popper defendia que uma epistemologia concentrada em W2, ou no conhecimento subjetivo, é irrelevante para o estudo do conhecimento científico.

Popper considera-se um realista, “*um tanto como um realista ingênuo*”, e sugere a existência de W1 e W2 e que estes dois interagem. Como argumento acerca da existência (mais ou menos) independente de W3, consideremos duas experiências de pensamento:

Experiência 1: Todas as nossas máquinas e equipamentos são destruídos, bem como todo o nosso aprendizado subjetivo, incluindo nosso conhecimento subjetivo de máquinas e equipamentos e de como usá-los. Permanecendo bibliotecas e nossa capacidade de aprender com elas.

Experiência 2: Todas as nossas máquinas e equipamentos são destruídos, bem como todo o nosso aprendizado subjetivo, incluindo nosso conhecimento subjetivo de máquinas e equipamentos e de como usá-los.

Todas as bibliotecas também são destruídas e nossa capacidade de aprender com os livros permanece.

Popper argumenta que na situação da Experiência 1, depois de muito sofrimento, nosso mundo poderia continuar a seguir em frente e na situação da Experiência 2, não haveria reaparecimento da civilização por muitos milênios. Nossa capacidade de aprender com os livros se tornaria inútil (cf. POPPER, 1972b, p. 106-108). Popper defende que W3 é um produto natural do animal humano, é amplamente autônomo e através de nossa interação com ele é que o conhecimento objetivo cresce. Grande parte do terceiro mundo objetivo de teorias efetivas e em potencial e de publicações e argumentos surge como um subproduto não pretendido das publicações e argumentos produzidos efetivamente. O conteúdo de livros, não sua forma física, pertence a W3 (POPPER, 2000, p. 22).

II.

A idéia de autonomia é central na teoria de W3, embora seja uma criação humana, este mundo cria por sua vez seu próprio domínio de autonomia. Segundo Popper, os exemplos que mostrem que W3 é autônomo são incontáveis:

“Talvez os [exemplos] mais impressionantes, e de qualquer modo os que deveríamos conservar em mente como os nossos padrões de exemplos, podem ser encontrados na teoria dos números naturais. / Diversamente de Kronecker, concordo com Brouwer em que a seqüência dos números naturais é uma construção humana. Mas, embora criemos essa seqüência, ela por sua vez cria seus próprios problemas autônomos. A distinção entre números ímpares e pares não é criada por nós: é uma conseqüência não pretendida e inevitável de nossa criação. Os números primos, sem dúvida, são fatos autônomos e objetivos similarmente não pretendidos; e em seu caso é óbvio que há aí, para nós, muitos fatos a descobrir: há conjecturas como a de Goldbach. E essas conjecturas, embora se refiram indiretamente a objetos de criação nossa, referem-se diretamente a problemas e fatos que de algum modo emergiram de nossa criação e que não podemos controlar ou influenciar: são fatos árdus e a verdade a seu respeito é muitas vezes de árduo descobrimento” (POPPER, 1975, p. 119-120).

A autonomia de W3 é parcial: os novos problemas levam a novas criações ou construções e podem acrescentar novos objetos a W3. E estes criarão novos fatos não pretendidos, novos problemas inesperados ou novas refutações. Há, portanto, um importante efeito de *feed-back* de W3 sobre W2.

O exemplo dos números naturais, além de exemplificar o que Popper entende por autonomia, nos diz que objetos aritméticos são habitantes de W3. As maiores criações dos seres humanos são, para Popper, as funções mais altas da linguagem humana, a função **descritiva** e a função **argumentativa**. Com a função descritiva emerge a idéia reguladora de verdade, isto é, de uma descrição que se ajusta aos fatos. A função argumentativa critica as descrições do ponto de vista das idéias reguladoras de verdade, de conteúdo e de verossimilitude. Popper considera o método de construção de uma seqüência interminável de numerais como uma das maiores invenções que foram possíveis apenas pela invenção da linguagem e seu desenvolvimento. As instruções para tal construção podem ser formuladas

linguisticamente ou em um programa de computador, podendo ser descrita como algo concreto. Mas a descoberta de séries de números naturais infinitas (como a de primos) é algo totalmente abstrato, um produto de W3 (POPPER, 2000, p. 23).

O Terceiro Mundo de Popper é então objetivo, abstrato, autônomo, real e efetivo. Popper reconhece que W3 tem muito em comum com a teoria de Formas e idéias de Platão, com o espírito objetivo de Hegel, com a teoria de um universo de proposições em si mesmas e verdades em si mesmas de Bolzano, apesar das diferenças. Considera, porém, que W3 se assemelha mais de perto ao universo de conteúdos objetivos de pensamento de Frege (cf. POPPER, 1975, p. 108).

3. A matemática segundo Popper

I.

Em sua conferência intitulada “*Science and Criticism*”³, realizada em 1974, Popper inicia tratando de algumas observações acerca do desenvolvimento da matemática, especificamente do logicismo, do formalismo, do intuicionismo e seus representantes. Popper afirma que, enquanto estudante, foi fortemente influenciado pelo matemático Hans Hahn, que por sua vez foi muito influenciado pela *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead. Com relação às conseqüências dos teoremas de Gödel e de Tarski afirma (tradução nossa):

“Mas este foi, de fato, o início do fim – o fim, isto é, destas três escolas de pensamento. Em minha opinião, também anunciou o início de uma nova filosofia da matemática. (...) Muitas teorias matemáticas são, como as da física ou biologia, hipotético-dedutivas: logo a matemática pura torna-se bem mais próxima das ciências naturais, cujas hipóteses são conjecturas, do que aparentava, mesmo recentemente” (POPPER, 2000, p. 56).

Popper destaca a importância da intuição para o desenvolvimento de nossas teorias, citando Gödel que se baseou sobre a intuição e a imaginação matemática, colocando-as sempre à luz do exame racional.

II.

Popper faz uma apreciação e crítica da epistemologia de Brouwer em sua obra *Objective Knowledge* (cf. POPPER, 1975, p. 129, & 1972b, p. 128). Popper critica a doutrina de que a intuição é fonte infalível de conhecimento. Segundo ele, não há fontes autorizadas de conhecimento e nenhuma fonte é particularmente digna de fé e que a verdade está acima da autoridade humana (cf. POPPER, 1963, p. 29). Entende intuição como produto de nosso desenvolvimento cultural e de nossos esforços em pensamento discursivo.

“A idéia de Kant de um tipo padrão de intuição pura compartilhado por todos nós (talvez não por animais, apesar de um equipamento perceptual similar) dificilmente pode se aceitar. Pois, após nos havermos adestrado em pensamento discursivo, nossa apreensão intuitiva torna-se extremamente diferente do que era antes” (POPPER, 1975, p. 134).

³ Em comemoração pelo aniversário do chamado *Alpbach European Forum*, cujo tema era o desenvolvimento intelectual e científico dos trinta anos anteriores (POPPER, 2000, p. 52).

Popper afirma que Brouwer estava certo ao reagir contra a tese de que a matemática é um jogo de linguagem formal, ou seja, de que não há objetos matemáticos extralingüísticos (ou conteúdos de pensamento). Mas isto não significa que podemos construir a matemática sem linguagem, sem constante controle crítico. Não pode haver crítica sem pôr as construções em forma lingüística e tratá-las como objetos de W3.

“Embora o terceiro mundo não seja idêntico ao mundo de formas lingüísticas, ele surge juntamente com a linguagem. Isto explica por que, desde que nossas construções se tornem problemáticas, sistematizadas e axiomatizadas, a linguagem pode tornar-se também problemática, e por que a formalização pode tornar-se um ramo da construção matemática” (POPPER, 1975, p. 136).

Os objetos matemáticos são, para Popper, conhecimentos objetivos, cidadãos de W3. Como vimos, embora os conteúdos de pensamento sejam produtos humanos, levam consigo suas próprias conseqüências não pretendidas (ex. invenção: números naturais; descoberta: números primos). Os cidadãos mais férteis de W3 são os problemas e novos argumentos críticos. Surge um novo tipo de existência matemática: a existência de problemas. Também um novo tipo de intuição: a intuição que nos faz ver problemas e nos faz compreender problemas antes de resolvê-los.

III.

Podemos dividir as reflexões sobre a matemática em duas filosofias da matemática (cf. POPPER, 2000, p. 25):

1 – *A matemática é obra da espécie humana.* Criação feita baseada em nossa intuição; ou é nossa construção; ou é nossa invenção. (Intuicionismo; construtivismo; convencionalismo).

2 – *A Matemática existe objetivamente e é independente da espécie humana.* É um campo de verdades objetivas, não criadas e sim confrontadas por nós. Podemos descobrir algumas dessas verdades. (Platonismo).

Segundo Popper, essas duas filosofias opunham-se uma à outra até a teoria de W3 mostrar que ambas podem estar certas em algum sentido. A matemática é obra nossa e adquire autonomia e, como obra nossa, é falível.

IV.

Sobre a aplicação da matemática à realidade, Popper escreveu um ensaio intitulado “*Why are the calculi of Logic and Arithmetic applicable to Reality?*” (POPPER, 1963, p. 201).

Por que os cálculos lógicos (cálculo proposicional, de primeira ordem, etc.) – que podem conter a aritmética – são aplicáveis à realidade?

Popper dá três respostas:

1 – Os cálculos lógicos como uma regra são sistemas semânticos, isto é, linguagens projetadas com a intenção de serem utilizadas para a descrição

de certos fatos. Se eles servem para tal propósito então não há surpresa em aplicá-los à realidade.

O desenvolvimento da matemática, que é em certo sentido o desenvolvimento artificial de certas partes de nossas linguagens ordinárias, mostra que com novos significados lingüísticos novos tipos de fatos podem ser descritos. O uso de um cálculo aritmético só permite descrever relações que simplesmente não existiriam sem ele (POPPER, 1963, p. 213).

2 – Os cálculos lógicos são projetados de uma maneira que não servem para o propósito de descreverem certos fatos.

A aritmética dos números naturais (ou dos números reais) serve para descrever certos fatos, outros não (POPPER, 1963, p. 211).

3 – Um cálculo aplicado à realidade perde o caráter de cálculo lógico e torna-se uma teoria descritiva que pode ser empiricamente refutável. Se o cálculo é considerado irrefutável não é aplicável à realidade.

Consideremos a proposição ' $2 + 2 = 4$ '. Se a aplicamos à maçãs, ' 2 maçãs + 2 maçãs = 4 maçãs' pode ser considerada irrefutável e logicamente verdadeira. Porém, esta asserção não descreve fato envolvendo maçãs e a aplicação à realidade seria só aparente (significa que uma forma de descrever a realidade é equivalente à outra).

Se a sentença ' $2 + 2 = 4$ ' serve para calcular, isto é, para descrever certos fatos físicos (e o símbolo '+' representa uma manipulação física), então a interpretação de ' $2 + 2 = 4$ ' torna-se uma teoria física e, portanto, refutável (POPPER, 1963, p. 211).

Conclusões

Mesmo com a ausência de uma apresentação exclusiva e sistemática de uma filosofia da matemática de Popper, parece razoável detectar em seus escritos algumas respostas dadas a problemas concernentes ao tema. Através de sua epistemologia e de sua tese de um "terceiro mundo", podemos considerar que o conhecimento matemático é um conhecimento objetivo, que a matemática é uma criação humana e pertence à espécie de conhecimento mais nobre e importante. Segundo sua concepção de verdade, distinta de certeza, o conhecimento matemático pode ser considerado conjectural (especialmente as hipótese ou axiomas de uma teoria matemática), uma verdade incerta. Com relação à aplicabilidade da matemática à realidade, Popper dá respostas que dependem do significado de "realidade" e "aplicação". Podemos ampliar uma de suas respostas a toda a matemática: o uso de uma teoria matemática só permite descrever relações que simplesmente não existiriam sem ela.

Bibliografia

BOCHENSKI, I. M.(1962). *A filosofia Contemporânea Ocidental*. Tradução de Antônio Pinto de Carvalho. São Paulo: Editôra Herder.

- HELPERICH, C. (2006). *História da Filosofia*. Tradução de Luiz Sérgio Repa et al. São Paulo: Martins Fontes.
- MAYR, E. (1998). *Desenvolvimento do Pensamento Biológico: Diversidade, evolução e herança*. Tradução de Ivo Martinazzo. Brasília, DF: Editora Universidade de Brasília.
- MOLINA, J. A. (2001). “Lakatos como filósofo da matemática”. In: *Episteme*, Porto Alegre, n. 13, p. 129 – 153.
- POPPER, K. (1963) *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*. London: Routledge and Kegan.
- POPPER, K. (1972a). *The Logic of Scientific Discovery*. London: Hutchinson of London.
- POPPER, K. (1972b). *Objective Knowledge: an Evolutionary Approach*. Oxford: Clarendon Press.
- POPPER, K. (1974). *A lógica da Pesquisa científica*. São Paulo: Editora Cultrix.
- POPPER, K. (1975). *Conhecimento Objetivo: uma abordagem evolucionária*. Tradução de Milton Amado. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo.
- POPPER, K. (1976). *Unended Quest: An Intellectual Autobiography*. Fontana.
- POPPER, K. (1977); *Autobiografia Intelectual*. Tradução de Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. São Paulo: Editora Cultrix.
- POPPER, K. (2000); *In search of a better world: Lectures and essays from thirty years*. London: Routledge.
- REALE, G. (1991). *História da filosofia: Do Romantismo até nossos dias / Giovanni Reale, Dario Antiseri*. São Paulo: Paulus.
- RUSSELL, B. (2003). *História do Pensamento Ocidental*. Tradução de Laura Alves e Aurélio Rebello. Rio de Janeiro: Ediouro.

Fábio Maia Bertato

Universidade Estadual de Campinas

E-mail: fmbertato@cle.unicamp.br