Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 10 nº 19 (abril/2010-setembro/2010) - pág.75-87
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

UM PASSEIO PELA HISTÓRIA DE SÍMBOLOS QUE REPRESENTARAM IGUALDADE MATEMÁTICA

Vanessa Vasconcelos Cosme
UFES - Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2010)

Resumo

No presente trabalho, a intenção é apresentar parte da investigação que desenvolvemos no curso de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. O objeto central de nossa pesquisa de mestrado foram as relações de igualdade matemática e significados a ela atribuídos por professores e alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental, no município de Vitória – ES. Além disso, trouxemos um panorama histórico com intuito de refletir sobre construção e desenvolvimento de símbolos que foram usados para representar a igualdade matemática. Nesse artigo optamos por apresentar um recorte dos resultados dessa pesquisa bibliográfica. Destacamos, assim, o uso de diferentes símbolos para representar a igualdade matemática e o uso do símbolo "=", hoje usado exclusivamente para indicar igualdade, com outros significados, como diferença aritmética por exemplo. Direcionar-nos-emos, portanto, a relatar esses pontos em destaque na representação da igualdade matemática no decorrer da história da matemática entre os séculos XVI e XVIII, por ser um período marcado pela transição da linguagem matemática retórica para a simbólica e pela grande produção de trabalhos no campo da matemática.

Palavras-chave: Matemática, História da Matemática, Notações Matemáticas, Igualdade Matemática

Abstract

In this study, the intention is to present the research we have developed in the Master's Education course at the Federal University of Espírito Santo. The central object of our research were the relations of equality and mathematical meanings attributed to it by teachers and students from 5th and 6th grade elementary school in the city of Vitória - ES. Also, we bring a historical overview in order to reflect on construction and development of symbols that were used to represent mathematical equality. In this article we decided to make a clipping of the results of the literature search. Featuring so, the use of different

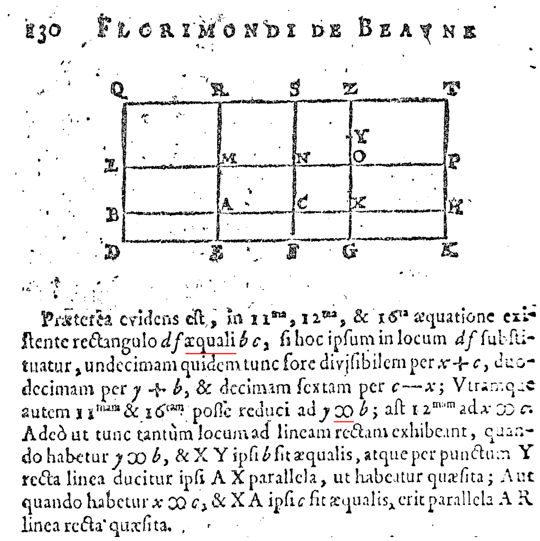
symbols to represent mathematical equality and the use of the symbol "=", now used exclusively to indicate equality with other meanings, such as arithmetic difference. We will target, therefore, to report these points highlighted in equal representation of mathematics in the course of mathematics between the sixteenth and eighteenth centuries, as a period marked by the transition from rhetoric to the symbolic mathematical language and by the great production to work in the field of mathematics.

Keywords: Mathematics, History of Mathematics, Mathematics Notations, Mathematics Equality

Introdução

Hoje representamos a igualdade matemática com o símbolo "=", mas nem sempre foi assim. A primeira vez que se tem registro de seu uso é na segunda metade do século XVI, aproximadamente em 1557, por Robert Recorde, um matemático inglês que nasceu em Tenby (Pembrokeshire) no início do século XVI e faleceu em Londres, em 1558.

Até 1557 e mesmo no século seguinte a igualdade era expressa normalmente por palavras como *aequales* (fig. 1), *aequantur* (fig. 2), *esgale, faciunt, ghelijck,* ou *gleich* ou por abreviações das mesmas, como *aeq.* (fig. 3). Esta última aparece mesmo em escritos de autores como Johannes Kepler, Galileu Galilei, Evangelista Torricelli, Cavalieri Bonaventura, Blaise Pascal, John Napier, Henry Briggs, Gregory St. Vincent, Andrea Tacquet e Pierre de Fermat, todos posteriores a Recorde; o que pode nos levar a concluir que o emprego de um símbolo para representar a igualdade não aconteceu de maneira imediata.


130 FLORIMONDI DE BEAVNE

Præterea evidens est, in 11ma, 12ma, & 16ta æquatione existente rectangulo *df* æquali *bc*, si hoc ipsum in locum *df* substituatur, undecimam quidem tunc fore divisibilem per *x* + *c*, duodecimam per *y* + *b*, & decimam sextam per *c* — *x*; Vtramque autem 11mam & 16tam posse reduci ad *y* ∞ *b*; ast 12mam ad *x* ∞ *c*. Adeò ut tunc tantùm locum ad lineam rectam exhibeant, quando habetur *y* ∞ *b*, & X Y ipsi *b* sit æqualis, atque per punctum Y recta linea ducitur ipsi A X parallela, ut habeatur quæsita; Aut quando habetur *x* ∞ *c*, & X A ipsi *c* sit æqualis, erit parallela A R linea recta quæsita.

Figura 1. *Geometrie* de Descartes (1633)

rei æstimatio. Exemplum. cubus & 6 posi-
tiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam par-
tem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium nu
meri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, acci
pe radicem quę est ℞ 108, & eam geminal
bis, alteri addes 10, dimidium numeri, a b
altero minues tantundem, habebis Bino-
mium ℞ 108 p:10, & Apotomen ℞ 108 m:
10, horum accipe ℞ cub & minue illam

cub⁹ p:6 reb⁹ æq̄lis 20
2 20
8 —— 10
108
℞ 108 p:10
℞ 108 m:10
℞ v:cu.℞ 108 p:10
m:℞ v:cu.℞ 108 m:10

Figura 2. *Ars Magna* de Cardano (1545)

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS *).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z — y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z - y + w + x}$ seu dv aequ. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi.

Figura 3. Primeira publicação do cálculo de Leibniz (1684)

É importante ressaltar que nos respaldamos fortemente em Florian Cajori, que dedicou alguns parágrafos de seu livro *A history of mathematical notation* para notações do sinal de igualdade. Nessa parte de seu livro ele faz referência a mais de 100 autores cujos escritos pesquisou, alguns dos quais aparecerão no decorrer desse texto. As principais idéias que encontramos em Cajori são: o uso de diferentes símbolos para representar igualdade matemática, uso do símbolo "=" com diferentes significados e a aceitação não imediata do símbolo "=". Passaremos então à exposição dessas idéias.

Surgem símbolos e diferentes significados

Existem indícios de um símbolo encontrado em uma equação linear do papiro de Ahmes (1650 a.C.), que significaria "isso dá", e categorizado como um sinal para a igualdade. Já Diophantus, segundo Cajori (1928, p. 297) e Thomas & Heath (1985, p. 48), teria usado regularmente em seus escritos apenas o sinal " ἴσ " para indicar igualdade matemática.

A contração *pha* foi usada com a finalidade de expressar resultado na aritmética de Bakhslãlĩ enquanto o árabe al-Qalasâdî (1500 ad) usou um outro sinal, conforme Cajori (1928, p. 297). Um traço "–" foi usado para a expressão da igualdade por Johannes Muller, mais conhecido como Regiomontanus e considerado principal figura matemática do século XV, período em que adotou esse traço. Nesse momento "todos os teoremas ainda tinham de ser expressos por palavras [...], diferindo dos nossos textos atuais, basicamente, porque a nossa notação não existia" (Struik, 1989, p. 143).

Cajori afirma que Luca Pacioli expressou igualdade com o mesmo traço "–" no fim deste mesmo século, em sua obra *Suma de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, conhecida por *Suma* e impressa em 1494. De acordo com Estrada (et all, - 2000, p. 454), Pacioli representa o igual pela abreviação "*ae*" da palavra aequalis. Os mesmos autores dizem que esta obra trata o estudo de equações praticamente com os mesmos casos que Fibonnaci em seu *Líber Abaci*, diferindo desta no caso da simbologia: "o *Liber Abaci* mostra uma álgebra completamente retórica, na *Suma* observam-se muitas abreviaturas que permitem a aproximação à álgebra sincopada". Segundo Struik, este trabalho de Pacioli foi o mais impressionante livro de matemática desde a criação da imprensa, pois abordava todos os conteúdos de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria conhecidos até então.

Pacioli é um dos representantes de um período, final do século XV e início do século XVI, em que a álgebra elementar teve avanços significativos na resolução de equações e na criação dos números que hoje chamados complexos. Além dele, os matemáticos italianos Nicolo Fontana de Brescia (conhecido como Tartáglia), Raffaele Bombelli, Scipione del Ferro e Gerolamo Cardano e o português Pedro Nunes tiveram grande importância nesses avanços. Cardano costumava deixar um espaço em branco significando igualdade, embora ainda empregue esse termo de forma retórica, conforme pode mos observar na figura 2.

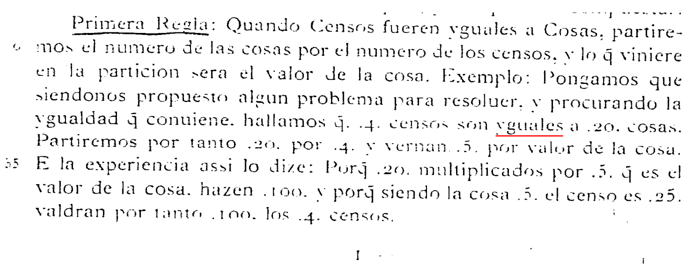
A instituição do símbolo "=" na representação de igualdade não aconteceu pelo menos cem anos após o registro de Recorde, período no qual alguns dos matemáticos de maior destaque não usaram qualquer símbolo para igualdade. Segundo CAJORI (1928, p. 298),

> This is the more surprising if we remember that about a century before Recorde, Regiomontanus in his correspondence had sometimes used for equality a horizontal dash – , that the dash had been employed also by Pacioli and Ghaligai. Equally surprising is the fact that apparently about the time of Recorde a mathematician at Bologna should independetly originate the same simbol and use it in his manuscripts.

Na mesma época de Recorde, em 1564, o matemático português Pedro Nunes publica o *Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria*, dando grande ênfase à igualdade. Logo no primeiro capítulo (fig.4) que trata da finalidade da Álgebra ele diz:

> En esta Arte de Álgebra el fin que se pretende es manifestar la quantidad ignota. El médio de que usamos para alcançar este fin, es ygualdad. Las principales quãtidades a ¨q por discursos demõstratinos procuramos esta ygualdad, dandoles o quitandoles quanto cõuiene, como quien pone en balança, son tres: Numero, Cosa, Censo. (NUNES, 1564, p. 1)

Pedro Nunes nasceu em 1502, na vila de Alcácer do Sal (sul de Portugal) e faleceu em Coimbra, em 11 de agosto de 1578, após a morte do rei D. Sebastião na batalha de 4 de agosto de 1578. Essa data coincide com o início de um período de declínio na matemática portuguesa, talvez devida ao fato de Portugal passar a ser dominado e anexado a Espanha. Nunes é considerado o mais ilustre matemático português de seu tempo e se destaca por introduzir uma linguagem sincopada da álgebra no livro acima citado. Ele se antecipa a François Viète[1] no emprego de letras para representar as operações (Souza & Cardoso, apud Fossa, 2001, p.277). Assim, em sua linguagem[2], 12.cu.p. 18.ce.p.27.co.m.17 expressa o que hoje é escrito como $12x^3 + 18x^2 + 27x - 17$. Entretanto, embora tenha dado tamanha importância para a igualdade no capítulo de abertura de seu livro, não adotou simbologia específica para ela e nem para a multiplicação. Ao expressar igualdade, Nunes escreve "yguales", conforme a figura a seguir.



Primera Regla: Quando Censos fueren yguales a Cosas, partiremos el numero de las cosas por el numero de los censos, y lo q̃ viniere en la particion sera el valor de la cosa. Exemplo: Pongamos que siendonos propuesto algun problema para resoluer, y procurando la ygualdad q̃ conuiene. hallamos q̃. .4. censos son yguales a .20. cosas. Partiremos por tanto .20. por .4. y vernan .5. por valor de la cosa. E la experiencia assi lo dize: Porq̃ .20. multiplicados por .5. q̃ es el valor de la cosa. hazen .100. y porq̃ siendo la cosa .5. el censo es .25. valdran por tanto .100. los .4. censos.

Figura 4. *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* de Pedro Nunes (1564)

Desde o aparecimento em 1557, somente depois de 61 anos o "=" de Recorde foi encontrado, num impresso de Edward Wright em 1618. Mas isso não quer dizer que ele não tenha sido usado, já que alguns autores escreveram manuscritos confidenciais que não exibiram em seus livros impressos ou mesmo pelas limitações de imprensa na época. Podemos exemplificar isso com John Napier: ele usou o "=" em um manuscrito algébrico que não publicou e que foi impresso primeiramente em 1839; e o impresso de Wright acima

[1] A Viète é atribuída a criação da linguagem algébrica moderna com a introdução de, por exemplo, vogais para representar grandezas desconhecidas e consoantes para grandezas conhecidas.

[2] Nunes representa a incógnita de uma equação por co (cousa), sua segunda potência por ce (censo) e a terceira potência por cu (cubo). P é inicial de plus e m, inicial de minus que representam, respectivamente, mais e menos. Essa notação para mais e menos também foi, segundo Thomas & Heath, usada por Bombelli na sua *Álgebra* publicada em 1572.

citado é uma tradução para o inglês de uma outra obra de Napier, o *Descriptio,* que continha um apêndice anônimo em que apareceu o símbolo "=" (provavelmente, segundo Cajori, devido a William Oughtred).

Os primeiros livros textos que usaram o símbolo "=" no continente europeu são holandeses: um livro de álgebra em 1639 e um tratado em 1640, ambos escritos por Stampioen. Em seguida apareceu a obra *Teutsche Algebra,* escrita pelo suíço Johann Heinrich Rahn em 1659. Leibniz, que após ler *Euclid,* de Isaac Barrow, datado de 1655, adotou esse mesmo símbolo em seu *De arte combinatória,* de 1666. Em 1667 Arnauld publicou o primeiro livro texto parisiense onde este sinal aparece. Em Londres, foi Dechales que o fez, em 1674.

Em 1631 o símbolo "=" recebeu reconhecimento mais geral na Inglaterra, porque em pelo menos três influentes trabalhos ele foi adotado: *Artis analyticae praxis* de Thomas Harriot, *Clavis mathematicae* de William Oughtred, e *Trigonometria* de Richard Norwood. Mas até então vários outros símbolos foram empregados por matemáticos de todo o mundo para designar igualdade. Observamos que mesmo após essa data outros símbolos continuam sendo também usados para designar igualdade, porém com menor freqüência.

Mas será que esse "=" apareceu exatamente com essa forma desde o início? Recorde já o escreveu exatamente como o escrevemos hoje? A resposta é não, ele não foi escrito por Recorde exatamente como hoje, tampouco foi assim escrito por todos os matemáticos que o empregaram em suas obras. Houveram algumas alterações em sua forma, não é sabido ao certo quando ocorreram, mas existem registros de algumas delas: duas linhas muito longas "═══" são encontradas na álgebra de Thomas Harriot, em 1631 e em alguns trabalhos posteriores, como um de De Lagny e em edição de Schawab de *Euclids Data*; outros escritores desenham as duas linhas mais curtas "=", como Weigel em 1693. Na cidade de Upsala, Emanuel Swedenborg usou traços curtos e inclinados para cima, "//". Também se encontram linhas de comprimento moderado, desenhadas distantes uma da outra $\overline{\underline{}}$, como em artigos de Nicole e em outros no *Jornal des Sçavans*. Segundo Cajori (1928, p. 307), nas impressões da época era mais freqüente o uso do símbolo "11" colocado horizontalmente, para a esquerda ou para a direita.

Houve também o acréscimo de detalhes que davam especificidade de significado, de acordo com o que se pretendia transmitir. Wolfgang Bolyai introduziu, por exemplo, "$\dot{=}$" para significar igualdade absoluta e "$\overline{\underline{\cdot}}$" para igualdade em conteúdo; "$A(=B$" ou "$B=)A$" significando que cada valor de A é igual a algum valor de B, mas não necessariamente o contrário e "$A(=)B$" para expressar que cada um dos valores de A é igual a algum valor de B, e vice versa. Em 1832, Bellavitis usou o sinal "$\stackrel{\frown}{=}$" para marcar a igualdade de vetores.

Em 1842 De Morgan usou, em um de seus artigos sobre teoria logarítmica, o sinal da igualdade escrito duplamente "= =" em expressões como "$(be^{\beta\sqrt{-1}})^x == ne^{v\sqrt{-1}}$", onde β e v são ângulos formados por b e n, respectivamente, com a linha inicial. Segundo Cajori (1928, p. 307), ele usa este sinal dobrado para indicar que cada símbolo expressará não somente o comprimento e o sentido de uma linha, mas também a quantidade suposta de voltas que uma linha dá para alcançar esse sentido, se ajustando para fora da linha da unidade. Uma outra forma de empregar em dobro o sinal “=” foi a de Gustave du Pasquier, em seu trabalho *Comples Rendus du Congrès International des Mathématicians* de 1920, onde discutiu números complexos gerais e o sinal “≣” significava “igual por definição”.

A 11ª edição da *Encyclopaedia Britannica,* em 1910, apresenta uma expressão em que o símbolo “$\underset{f}{=}$” representa igualdade. Mas esta não é a igualdade aritmética, ela é somente formal. As relações entre os coeficientes de energia de x em uma série podem ser expressas por uma igualdade formal envolvendo a série como um todo, como em

$$“1+n_{(1)}x+n_{(2)}x^2+\dots \underset{f}{=} (1+x)\{1+(n+1)_{(1)}x+(n-1)_{(2)}x^2+\dots”.$$

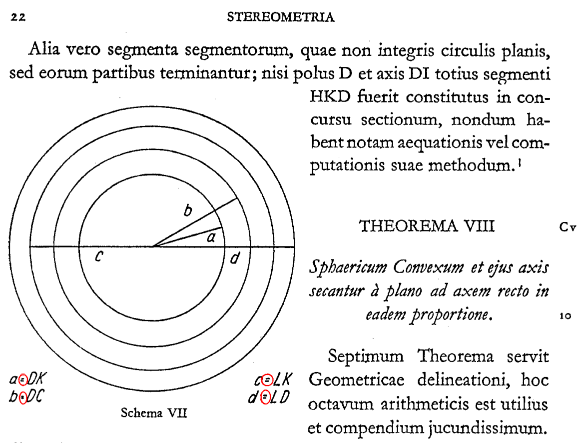
Outro exemplo dessas especificidades são os símbolos que expressam igualdade aproximada. Mas essas notações são recentes, verificadas no final do século XIX e já no início do século XX, quando tornou-se comum escrever “~” expressando “quase igual a” como, por exemplo, em “$\sqrt{2} \sim 1{,}4$”, e também o símbolo “$\cong$”. Mesmo notações como o sinal “$\asymp$” usado por Fischer ou o “≋” de Greennhill, que são para nós estranhos, designaram a igualdade aproximada em data não muito distante, 1917 e 1892.

Não sabemos dizer com certeza os motivos que levaram a variações no emprego de símbolos representativos da igualdade e nem às alterações na forma do “=”. Acreditamos que os matemáticos da época seguiam outros matemáticos que admiravam o trabalho e com os quais lhes era oportuno compartilhar idéias, inclusive no uso das notações. Eles não contavam com recursos como os que temos atualmente (telefone, internet, correio e outros) e usavam manuscritos, o que tornava a comunicação difícil, demorada e mesmo sujeita a distorções. Desse modo, quando chegavam a acessar e “compilar” uma correspondência ou obra de outro autor, a mesma já poderia ter passado por alterações, inclusive influenciadas por um terceiro (até mesmo por um copista, responsável por sua transcrição, e que não era bem entendido no assunto). Além disso, eles deveriam ter, em distintas ocasiões, pontos de vistas diferentes sobre o significado do símbolo de igualdade que os levariam a notações também distintas. Talvez isso justifique, mesmo que parcialmente, a variação entre diversos símbolos usados para representar a igualdade.

Além do emprego de outros símbolos para a igualdade e das especificações mencionadas, o “=” foi usado em relações que não eram de igualdade. Em 1591 François Viète usou o símbolo “=” para designar diferença aritmética em seu *In artem analyticen isagoge*. Esta designação foi adotada por Sieur de Var-Lezard numa tradução do *Isagoge* de Viète do latim para o francês, chamada *Introduction en l’art analytic ov nouvelle algèbre de François Viète,* datada de 1630. Esse mesmo significado foi dado ao símbolo “=” por Girard Desargues na obra *Invention nouvelle en l’Algebra* de 1629, por De Graaf em seu *De beginselen van de Algebra of Stelkonst* de 1672 e por Schooten na edição de *Geometrie* de Descartes de 1695.

Em 1638, Descartes usou o símbolo “=” para designar mais ou menos, isto é, “±”. Johann Caramuel o empregou para separar as partes inteira e decimal de números racionais: para ele “102=857” significava 102 inteiros e 857 milésimos (hoje expresso por 102,857), enquanto que para igualdade ele empregou, em 1670, o símbolo “*I*E”. Em 1706, Paricius usou os sinais "=", ":" e "-" como sinais gerais para separar os números que ocorriam no processo de resolução de problemas aritméticos.

Essa diversificação inerente ao uso da linguagem algébrica simbólica, que estava sendo introduzida, aumentou ainda mais quando Dulaurens e Reyher designaram o símbolo "=" para enunciar linhas paralelas. Dessa maneira, o símbolo "=" adquiriu pelo menos esses cinco significados diferentes entre escritores distintos: diferença aritmética, mais ou menos (±), retas paralelas, separação entre as partes inteira e decimal de números racionais e separação entre números que ocorriam em problemas aritméticos. O sinal "=" estava então sob o risco de ser rejeitado completamente e substituído por outro que estivesse sendo empregado com significado único. Uma outra curiosidade é percebida em 1615, na obra *Stereometrie Archimedeae Supplementum:* no teorema VIII, Johannes Kepler utiliza o "=" entre objetos da geometria (fig. 5), escrevendo, por exemplo, "a=DK" e "c=LK"; já no teorema IX ele escreve a palavra *aequalis* ao enunciá-lo: *Cylindri rect superficies est aequalis Sphaericae, quam stringit.*


22 STEREOMETRIA

Alia vero segmenta segmentorum, quae non integris circulis planis, sed eorum partibus terminantur; nisi polus D et axis DI totius segmenti HKD fuerit constitutus in concursu sectionum, nondum habent notam aequationis vel computationis suae methodum.[1]

THEOREMA VIII Cv

Sphaericum Convexum et ejus axis secantur à plano ad axem recto in eadem proportione. 10

Septimum Theorema servit Geometricae delineationi, hoc octavum arithmeticis est utilius et compendium jucundissimum.

Figura 5. *Stereometrie Archimedeae Supplementum* de Kepler (1615)

Dentre os outros símbolos usados para representar igualdade encontraram-se "]", "||", "|" e "ꝏ". O primeiro apareceu dois anos após a escrita da Álgebra de Recorde, no *Logística* de Buteo, em equações como "$1A, \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}C[14$" e "$3A.3B.15C[120$", que na notação atual podem ser representadas por $x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=14$ e 3x + 3y + 15z = 120.

Em 1571, o escritor alemão Wilhelm Holzmann, mais conhecido como Xylander, publicou uma edição da *Arithmetica* de Diophantus em que duas linhas verticais paralelas "||" foram usadas para a igualdade sem, no entanto dizer se esse símbolo foi introduzido por ele ou se "copiou" de alguém, como do próprio Diophantus cuja obra estudou. Em um manuscrito (editado pela 3ª vez em 1907), Moritz Cantor levantou a possibilidade de que Xylander teria abreviado a palavra grega $\lambda\sigma o\iota$ (igual), originalmente empregada por Diophantus, e escrito "$\iota\iota$", de maneira análoga a registrada em uma tradução parisiense da obra de Diophantus, com uma única letra "ι" da palavra $\lambda\sigma o\iota$. Para nós a opinião de Cantor faz sentido, pois as letras gregas "$\iota\iota$" se assemelham a duas retas paralelas e poderiam ter sido, por simplificação da escrita, substituídas por "||". Isso pode ter acontecido sem intenção de distorção, mas acompanhando o processo de simplificação da linguagem algébrica.

As linhas paralelas verticais foram adotadas por alguns matemáticos holandeses e franceses durante os cem anos seguintes, principalmente na escrita de proporções. Descartes o fez em seu *Opuscules* de 1619-1621: "$1 | 2 \| 4 | 8 \| 16 | 32$"; que hoje pode ser representada por "$1/2 = 4/8 = 16/32$". Pierre de Carcavi faz uso do símbolo "||" como igualdade na equação "$+1296 - 3060a + 2664a^2 - 1115a^3 + 239a^4 - 25a^5 + a^6 \| 0$", em uma carta para Descartes (em 24/09/1649). Conforme Cajori, De Monconys usou "||" de modo semelhante em 1666.

Em 1668, De Sluse escreve "*be* || *aa*" para expressar o que hoje escrevemos "$be = a^2$". Em 1701 De la Hire representou a proporção "$a : b = x^2 : ab$" por "$a | b \| xx | ab$". Este simbolismo é igualmente adotado pelo holandês Abraham de Graaf em 1703, por Frenchman Parent em 1713 e por outros escritores no periódico *Journal des Sçavans*. Apesar de ser visto no decorrer de mais de um século, o símbolo "||" parece ter sido usado apenas por esses poucos escritores, não chegando a dar sequer indícios de que se firmaria como símbolo universal para a igualdade.

Uma única linha vertical foi usada para a igualdade por Pierre Hérigone em 1634, mas em alguns momentos ele adotou a notação "⊔". Ele empregou "|" tanto para identidades como "2|2", quanto para passar a idéia de "maior que" no caso de "3|2" e "menor que" no caso de "2|3". Reyher também usou "|" como igualdade em 1698, ou seja, para ele "A|B" significou "A = B". Segundo CAJORI (1928, p. 300), Reyher atribui esta notação ao astrônomo holandês Jacob Golius, dizendo: "*sou especialmente grato ao Sr. Golio pela clareza na modalidade algébrica de demonstração com o sinal da igualdade, a saber o traço retilíneo que está verticalmente entre dois valores de medida igual*" [tradução nossa].

Um grande concorrente para o símbolo "=" de Recorde foi o "∝", introduzido por René Descartes em sua *Géométrie* de 1637. Possivelmente tenha usado esse símbolo primeiramente em data anterior, mas paralelamente continuou usando a palavra *aequali*, como percebemos no destaque da figura 1. É possível que o sinal "∝" tenha surgido a partir da combinação "*ae"* na palavra *aequalis* (igual). Cajori (1928, p. 301) relata algumas explicações que encontrou para a origem desse símbolo: Cantor o descreveu como a união das duas letras "*ae*" e Wieleitner como uma união de "*oe"* invertida. Cajori escreve que Wieleitner examinou minuciosamente este símbolo que apareceu na edição de 1637 da *Géométrie* e concluiu que uma maneira mais exata de descrever esse símbolo é dizer que ele foi criado pela justaposição das letras "*oo*", sendo a parte esquerda da primeira cortada ao serem pressionadas uma contra a outra. Cajori também diz ter encontrado o símbolo "*oe*" mais tarde, em escritos de Frans Van Schooten, de 1659.

A opinião de Cajori é que o símbolo "∝" de Descartes para igualdade, como aparece em seu *Géométrie* de 1637, é simplesmente o símbolo astronômico para o Taurus, colocado lateralmente com a abertura girada para a esquerda. Sua opinião é justificada pelo fato de que esse símbolo ocorria regularmente em trabalhos astronômicos e estava disponível em documentos impressos. Acreditamos mais plausível a opinião de Cantor, na qual a origem do símbolo "ꝏ" é a justaposição das letras *ae*, iniciais da palavra aequalis, pois, antes de serem usados símbolos para representar a igualdade, palavras como essa é que foram escritas. Se observarmos a figura 3, notaremos que a proximidade entre as letras *ae* é maior que entre as demais letras da palavra *aequali.* Essa proximidade sugere a pronúncia de *ae* com som muito próximo de *e*. Acredito, portanto, que a partir de abreviaturas e simplificações da própria palavra aequalis, Descartes teve a inspiração para seu símbolo.

Alguns fatores contribuiriam para o firmamento do sinal "ꝏ" como igualdade, dentre eles destacamos o fato de o *Géométrie* ser considerado um trabalho de gênio, pois apresentou a geometria analítica para o mundo, prendendo a atenção de grandes matemáticos. Além disso, neste livro Descartes aperfeiçoa a notação exponencial, a^n (*n*, um inteiro positivo), que marcou um grande avanço na álgebra simbólica. Com esses argumentos fortes, seria muito provável que o símbolo "ꝏ" se estabelecesse para igualdade como aconteceu com a notação "a^n" para exponencial. Mas Descartes também usou o sinal "=" em um pergaminho de 1640, onde escreveu "$1C-6N=40$" para "$x^3-6x=40$", o que pode ter enfraquecido o uso de seu símbolo "ꝏ", já que ele próprio usa um outro no lugar desse.

Durante um período, tanto o símbolo "ꝏ", atribuído a Descartes, quanto "=", introduzido por Recorde, foram usados alternadamente por vários matemáticos. Em 1659 a notação "ꝏ" mostrou-se muito forte na Inglaterra, por exemplo, no *Miscellanies* de Samuel Foster, escrito em latim. Na sua tradução para o inglês, com algumas passagens mantidas em latim, é o sinal "=" que apareceu. Outra tradução do latim para o inglês que empregou o sinal "=" significando igualdade foi a Álgebra do suíço Johann Alexander.

O símbolo cuja criação é associada a Descartes apareceu, conforme dissemos, em trabalhos, como no *Traité d' algèbre*, de Michael Rolle, em 1690. Porém, Rolle mudou para "=" em 1709. Na Holanda, o sinal "ꝏ" foi adotado em 1660 por Kinckhvysen e em 1694 por De Graaf, exceto em escrita de proporções, quando ele usa "=". Bernard Nieuwentiit usa o símbolo "ꝏ" em edições de 1694 e 1696 do seu *Considerationes*, mas mudou para "=" em sua *Analysis infinitorum,* de 1695. Jacob Bernoulli usou o símbolo "ꝏ" em seu *Ars Conjectandi,* de 1713.

Um uso pouco comum do sinal de igualdade "=" é encontrado em 1740, no trabalho *La mesure des surfaces et des solides*, de Deidier. São expressões como

$$\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2} \text{ e } \frac{0.1.4.=5}{4,4,4,=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}.$$

Entre trabalhos de Fermat editados em 1679, o tratado *Ad locos planos et sólidos isagoge* apresenta o "ꝏ" significando igualdade, mas nos originais esse símbolo não é encontrado. Dessa forma, não podemos concluir se o próprio Fermat empregou a notação "ꝏ" ou se ela foi introduzida durante a referida edição de *Ad locos planos et sólidos isagoge.* Essa dúvida aumenta se acrescentarmos o fato de que em um outro tratado de Fermat, também editado em 1679, foram expressões como "$DA\{BE$" que significaram "$DA=BE$", ou seja, com o símbolo "{" para igualdade.

No século XVII, a maioria dos escritores do continente europeu usou a notação "ꝏ" introduzida por Descartes para a igualdade. Nesse continente, considerado o grande centro intelectual da época, o símbolo "=" não fez nenhum progresso considerável até 1650 ou 1660 (cerca de cem anos após a escrita da álgebra de Recorde), quando ascendeu quase completamente na Inglaterra. Os registros encontrados induzem a conclusão de que foi só no começo do século XVIII que ele se fixou como o símbolo de igualdade, pois o único entre os importantes trabalhos matemáticos desse século que utiliza o sinal "ꝏ" é *Ars Conjectandi,* uma publicação póstuma de James Bernoulli, em 1713.

A instituição do símbolo "=" na Europa foi reforçada após grandes nomes da matemática o terem usado em seus escritos, entre eles Thomas Harriot, Guilherme Oughtred e, um pouco mais tarde, John Wallis, Godofredo Guilhermo Leibniz, Marques de L´Hospital, Isaac Barrow e Isaac Newton, sem contar o próprio Descartes como já citamos anteriormente. Alguns nomes que não são facilmente reconhecidos adotaram o mesmo símbolo de igualdade introduzido por Recorde. Entre eles, citamos Prestet, Abb Catelan e Tschirnhaus, Hoste, Ozanam, Nieuwentijt, Weigel, De Lagny, Carré, Polynier, Guisnée e Reyneau. Bernhard Frenicle Bessy também o usou em uma carta a John Wallis datada de 20 de dezembro de 1661.

No final do século XVII foram apresentados os primeiros trabalhos de cálculo diferencial e integral. Este tem seu marco devido principalmente a Leibniz e Newton. Considerando que Recorde não propôs nenhum outro símbolo, que o cálculo diferencial e integral estava em desenvolvimento e que Leibniz empregou o símbolo "=" em seus trabalhos, podemos concluir que a adoção geral desse símbolo foi principalmente por ele influenciada. Struik (1989, p. 185) confirma isso ao dizer que "*devido a sua influência* [de Leibniz]*, o sinal = é usado para a igualdade e × para a multiplicação*". Segundo Struik, além de influenciar o emprego desses símbolos, Leibniz procurava uma *characteristica generalis que*

> levou-o a permutações, combinações e à lógica simbólica; a procura de uma *lingua universalis*, na qual todos os erros de raciocínio pudessem aparecer como erros computacionais, levou não só à lógica simbólica, mas também a muitas inovações na notação matemática. Leibniz foi um dos maiores inventores de símbolos matemáticos.(STRUIK, 1989, p. 181)

Leibniz pode ter empregado alternadamente os símbolos " ⊓ ", "ꝏ" e "=" em algumas correspondências e escritos não publicados, mas nos impressos apenas o sinal "=" aparece significando igualdade, o que é um reforço na conclusão de que sua influência teve peso na instituição do símbolo "=".

Também Newton foi influente na aceitação do símbolo "=" como igualdade. Em seus trabalhos sobre cálculo, que antecederam os de Leibniz em alguns anos, sendo publicados posteriormente, foram tão significativos quanto os de Leibniz para o desenvolvimento da matemática. Neles, o símbolo "=" é usado para indicar igualdade matemática. Desde então não temos registro de outro símbolo usado para igualdade matemática.

Considerações finais

Esse nosso passeio pela história de símbolos usados na representação da igualdade matemática está encerrado. Destacamos, ao longo do trajeto, a existência de vários símbolos para representação da igualdade matemática, empregados simultaneamente pelos matemáticos do período aqui em foco. Em alguns casos o mesmo matemático usou mais de uma representação, por exemplo, Descartes, que empregou os símbolos "=" e "∝" em publicações muito próximas.

Um outro destaque do percurso é o fato de diferentes significados terem sido atribuídos ao símbolo hoje usado para representar igualdade matemática, inclusive o de diferença aritmética. Abrimos aqui um parêntese evidenciando que as informações aqui expostas, aliadas à nossa pesquisa realizada junto a professores de matemática e alunos de ensino fundamental, mostrou-nos confusões não raras no emprego do símbolo de igualdade, no que refere ao emprego do sinal e aos seus significados[3].

Não podemos deixar de solicitar maior atenção, e até mesmo cuidado, ao trabalharmos com situações em que relações de igualdade se fazem presentes, sejam elas dentro ou fora da matemática. Essa atitude é necessária para que se tenha segurança de qual significado está em questão. Esse cuidado é percebido, por exemplo, no livro de Aarão Reis, que apresenta os símbolos a serem usados, explicitando situações em que serão usados. Mas são poucos os livros de matemática, ao longo da sua história, por nós analisados, que assim o fazem. Em geral eles simplesmente usam o símbolo de igualdade, sem maiores detalhes. Cabe, portanto, ao leitor, atentar para este uso.

Mas esse pode ser outro passeio pela história dos símbolos que representaram a igualdade matemática. Deixamos, portanto, o convite aos leitores, para criarem novas rotas e iniciarem novos e diferentes passeios por essa história.

Referências Bibliográficas

CAJORI, F. *Notations in Elementary Mathematics*. In: *A History of Mathematical Notations*. London: Strand, 1928. vol. I.

ESTRADA, F. et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

IMENES, L. M. P. & LELLIS, M. C. *Microdicionário de Matemática*. São Paulo: Scipione, 1998

NUNES, P. *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria.* In: *Obras*. Nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, 1946. vol. I.

SOUZA, C. M. de & CARDOSO, S. L. P. *As contribuições de Pedro Nunes para a construção da Álgebra Moderna.* In: Seminário Nacional de História da Matemática, 4, 2001, Rio Claro. Anais do IV Seminário Nacional de História da Matemática. Rio Claro: SBHMat, 2001. p. 277-283

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas.* Trad. João Cosme S. Guerreiro. 4. ed. Lisboa: Gradiva, 1989. 1. ed. em 1948

---

[3] Para maiores esclarecimentos a respeito pesquisar nossa dissertação de mestrado intitulada *Igualdade matemática: um estudo de sua história e significados.*

THOMAS, S. & HEATH, L. *Diophantus of Alexandria: A study in the History of Greek Algebra.* 2. ed. New York: Dover, 1985

Vanessa Vasconcelos Cosme
Mestre em Educação – Educação Matemática – UFES
Professora efetiva na rede pública estadual de Roraima e professora substituta na Universidade Federal de Roraima.

E-mail: vanesssavc@gmail.com