

**PREFÁCIO AO *BEGRIFFSSCHRIFT* (1879) DE GOTTLLOB FREGE (1848-1925):  
TRADUÇÃO E INTRODUÇÃO AO TEXTO<sup>1</sup>**

Fernando Raul Neto  
UFPE - Brasil

(aceito para publicação em maio de 2008)

**Resumo**

O objetivo deste artigo é trazer para o leitor brasileiro a tradução do prefácio ao livro *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1789) escrito pelo próprio autor, o lógico e filósofo alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925). O livro é um marco na história da lógica e a tradução será de utilidade tanto para os matemáticos, quanto para lógicos e filósofos interessados no tema da fundamentação da matemática. Uma breve introdução ao texto é apresentada para situá-lo em sua época e na história subsequente da lógica e da filosofia.

**Palavras-chaves:** Frege. Begriffsschrift. Lógica. Fundamentos da matemática.

**Abstract**

The goal of this paper is to bring to the brazilians the translation of the preface to the book *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1789) written by his author, the german logician Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925). The book is a keystone in the history of logic and the translation will be useful both to the mathematicians and to the logicians and philosophers interested at the foundations of mathematics. A short introduction is presented to situate the text at the time and at the future history of logic and philosophy.

**Keywords:** Frege. Begriffsschrift. Logic. Foundations of mathematics.

O *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* foi publicado em 1879 na cidade de Halle, na Alemanha. Seu autor, Friedrich Ludwig Gottlob Frege, então com 31 anos de idade, havia estudado matemática em Jena

---

<sup>1</sup> Agradecemos a Capes, que forneceu o apoio financeiro, e a UFPE que nos liberou no período 2007/8 para um Programa de Pós-doutorado na *Philosophisches Fakultät* da *Universidade de Göttingen* na Alemanha sob a supervisão do Prof. Dr. Wolfgang Carl.

(1869-1871) e em Göttingen (1871-1873). Frege ingressa como professor na Faculdade de Matemática da Universidade de Jena em 1874 onde permanece até 1917 quando se aposenta. Uma possível tradução para o título do livro, a que adotamos, é *Ideografia, uma linguagem por fórmulas do pensamento puro modelada pela da Aritmética*. No entanto, *Ideografia* não é ainda o termo estabelecido no Brasil para *Begriffsschrift*, temos como alternativa *Conceitografia*.<sup>2</sup> A expressão *Begriffsschrift*, tomada ao pé da letra, significaria algo como *escrita conceitual* ou *notação conceitual*, e Frege a utiliza tanto para referir-se ao sistema simbólico e artificial que ele criou como também para referir-se ao livro no qual essa escrita é introduzida. O objetivo de Frege no livro *Begriffsschrift* seria dessa forma a criação de uma linguagem, a *Begriffsschrift*.<sup>3</sup>

É no *Begriffsschrift* que Frege apresenta as linhas gerais do que viria a ser conhecido mais tarde, já depois de Bertrand Russell, como projeto logicista, o projeto de fundamentação da aritmética em bases puramente lógicas. Fundamentar ou reduzir a aritmética à lógica significa mostrar que i) os conceitos da aritmética podem ser reduzidos a conceitos lógicos; ii) as proposições da aritmética podem ser reduzidas a proposições lógicas; trata-se, enfim, de eliminar qualquer diferença entre aritmética e lógica: aritmética é lógica e lógica é aritmética. A esse projeto Frege dedicaria toda a sua vida, e toda a sua produção subsequente<sup>4</sup> está vinculada ao projeto, sejam os livros e os artigos ou as dezenas de resenhas científicas que ele costumava escrever. Uma vinculação direta no caso dos textos nos quais ele trata de refinamentos teóricos ou do próprio desenvolvimento do projeto ou vinculação indireta ao refletir em seus escritos a concepção de filosofia da matemática presente no seu projeto. Mas antes da publicação do *Begriffsschrift*, que foi seu primeiro livro, Frege já havia escrito seis trabalhos:

**1873:** Ueber eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene.

**1874:** Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen.

**1874:** Rezension von H. Seeger, die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet.

**1876:** Rezension von A. v. Gall und Ed. Winter, die analytische Geometrie des Punktes und der Geraden und ihre Anwendung auf Aufgaben.

**1876:** Rezension von J. Thomae, Sammlung von Formeln welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.

---

<sup>2</sup> Utilizada por Luiz Henrique Lopes dos Santos em sua tradução brasileira do artigo de Frege *Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift* como *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*. Cf. Frege 1980b.

<sup>3</sup> Manteremos nesta introdução o termo alemão sem tradução, mas com a convenção usual de distinguir o texto da notação conceitual pelos artigos "o" e "a", ou outros termos designativos do masculino e feminino, como "seu", "sua". Assim o *Begriffsschrift* refere-se ao texto, a *Begriffsschrift* refere-se à notação conceitual.

<sup>4</sup> Além do *Begriffsschrift*, Frege publica mais três livros, o *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (1884) e os dois volumes do *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet* (Vol. I, 1893 e Vol. II, 1903). Dos artigos de Frege merecem destaque os três dos anos 90: *Funktion und Begriff* (1891), *Über Sinn und Bedeutung* (1892) e *Über Begriff und Gegenstand* (1892). Em português: Os fundamentos da aritmética: um exame lógico-matemático sobre o conceito de número (1884), Leis básicas da aritmética: deduzidas pela *Begriffsschrift* (1893/1903), Função e conceito (1891), Sobre o sentido e a referência (1892) e Sobre o conceito e objeto (1892).

**1878:** Über eine Weise, die Gestalt eines Dreiecks als complexe Grösse aufzufassen.<sup>5</sup>

O primeiro e o segundo são a sua tese de doutorado e a sua *Habilitationsschrift*, respectivamente, depois Frege publica três resenhas de livros e um artigo. São quatro trabalhos sobre geometria (1873, 1874, 1876 e 1878), um sobre funções elípticas (1876) e apenas um sobre aritmética, a resenha que ele fez em 1874 para o livro de aritmética de Seeger. Nenhum deles trata explicitamente do tema que ele iria desenvolver no *Begriffsschrift*, a fundamentação rigorosa da aritmética, embora todos eles revelem a preocupação de Frege com o rigor conceitual característico de toda a sua obra. No *Begriffsschrift* Frege objetiva quatro pontos: i) mostrar que os instrumentos então à disposição dos matemáticos eram insuficientes para levar adiante o projeto logicista; ii) fornecer os instrumentos para desenvolver o projeto; iii) esboçar as linhas gerais da concepção do projeto; iv) exemplificar a execução do projeto. Esses quatro objetivos de Frege estão apresentados nos quatro blocos do livro: o *Prefácio* e as suas três partes: *I. Explicação dos símbolos*, *II. Representação e dedução de alguns juízos do pensamento puro* e *III. Alguns elementos de uma teoria geral das seqüências*. Os objetivos i) e iii) são discutidos no *Prefácio*, ii) nas partes I e II e o objetivo iv) na parte III. É claro que esses quatro objetivos de Frege não poderiam estar igualmente contemplados e desenvolvidos no *Begriffsschrift*, um pequeno livro de oitenta e oito páginas. De fato, embora Frege apresente e discuta no *Begriffsschrift* os quatro pontos acima, a grande marca do texto é a criação do instrumento técnico necessário para executar o projeto logicista. Esse instrumento técnico é a lógica, o *Begriffsschrift* é um livro de lógica.

Um ponto de partida para julgarmos a importância desse texto é olharmos como alguns lógicos e filósofos o situam na história. Começemos pelo americano William van Orman Quine (1908-2000), um dos mais importantes e respeitados lógico e filósofo do século XX. Para ele “a lógica somente agora emerge de um renascimento tal qual a física emergiu séculos atrás. Precisamente, o renascimento lógico pode ser identificado com a publicação do *Begriffsschrift* de Frege em 1879 – um livro que não é hoje mais antigo do que era o *De revolutionibus* de Copernicus no apogeu de Galileu.”<sup>6</sup> O frade dominicano polonês Joseph Maria Bocheński (1902-1995), um enciclopedista da história da lógica,<sup>7</sup> após descrever e discutir as obras de vários lógicos, comenta que “entre todos esses lógicos Gottlob Frege merece um local destacado. Seu *Begriffsschrift* somente pode ser comparado com outra obra em toda a história da lógica, os *Primeiros Analíticos* de Aristóteles. As duas obras não podem ser colocadas em um mesmo nível, porque Aristóteles foi o fundador da lógica, enquanto que Frege, como conseqüência, podia apenas desenvolvê-la.”<sup>8</sup> William (1905-1990) e Martha Kneale escrevem no *O Desenvolvimento da Lógica*, um dos livros de

<sup>5</sup> Em português: Sobre uma representação geométrica das formas imaginárias no plano (1873); Métodos de cálculo fundamentados na ampliação do conceito de grandeza (1874); Resenha de H. Seeger (1874); Os Elementos da aritmética (1874); Resenha de A. v. Gall e Ed. Winter, Geometria analítica do ponto e da reta, aplicações em exercícios (1876); Resenha de J. Thomae, Coleção de fórmulas utilizadas na aplicação das funções elípticas e de Rosenhain (1876); Sobre uma maneira de conceber a forma de um triângulo como grandeza complexa (1878).

<sup>6</sup> Quine, Preface to J. T. Clark, in Clark 1952, p. v.

<sup>7</sup> Alguns títulos de Bocheński sobre lógica: *De cognitione Exist* (1936), *Elementa logicae Graecae* (1937), *Nove Lezioni di Logica Symbiolica* (1938), *La logique de Théophraste* (1947), *Précis de logique mathématique* (1949), *Formale Logik* (1956) e *Grundriß der Logistik* (1954).

<sup>8</sup> Bocheński 1970, p. 268.

história da lógica mais citados no século XX, que o “*Begriffsschrift* de Frege é o primeiro sistema realmente extenso de lógica formal. [...] A obra de Frege [...] contém tudo o que é essencial em lógica moderna e não é injusto nem para os seus precursores nem para os seus sucessores, dizer que 1879 é a data mais importante da nossa disciplina.”<sup>9</sup>

Para compreendermos a correção dessas avaliações de Quine, Bochénski e Kneale & Kneale e entendermos o alcance das novidades trazidas por Frege vejamos, em largas pinceladas, o estado da lógica na época de Frege, nos atendo apenas aos aspectos técnicos, e relevando os aspectos filosóficos presentes, explícita ou implicitamente, em toda teoria lógica. Havia a consagrada e estabelecida silogística, desenvolvida por Aristóteles nos *Primeiros analíticos*, que trata da validade dos silogismos categóricos, i.e., dos silogismos nos quais as duas premissas e a conclusão são proposições de um dos quatro tipos: A: Todo S é P; E: Nenhum S é P; I: Algum S é P; O: Nenhum S é P. Compete a uma teoria silogística apresentar as razões pelas quais um argumento montado, por exemplo, na fórmula *Barbara*: se *todo M é P e se todo S é M, então todo S é P* é válido enquanto que outro montado em: *nenhum M é P e se algum S é M, então algum S é P* não é válido. A validade dos silogismos era estabelecida por Aristóteles em uma teoria axiomática que utilizava exclusivamente critérios semânticos. Essa é a lógica que ao final do século XVIII tanto entusiasmava Kant, e que ele dava como pronta e completa. No século XIX, a partir da Inglaterra, surgem vários trabalhos que vão dar um novo impulso à lógica. Esses trabalhos, de forma direta ou indireta, comerciam com os resultados advindos do desenvolvimento da álgebra que caminhava para a criação de álgebras abstratas, isto é, estruturas formais composta de símbolos *a priori* não interpretados. O exemplo maior dessa difícil mudança para sistemas abstratos não interpretados é o do inglês George Peacock que publica seu *A Treatise on Algebra* em dois volumes, o primeiro dedicado ainda a uma *Arythmetical Algebra* (1842) e o segundo, *On Symbolical Algebra* (1845), tratando de símbolos não interpretados. O ponto em comum dos lógicos ingleses, vários deles também algebristas, era a criação de sistemas lógicos por imitação dos sistemas algébricos, isto é, a criação de um cálculo literal ou *álgebra lógica*. De longe o mais bem sucedido exemplo dessas tentativas é a de George Boole (1815-1864) trazido em sua *Mathematical Analysis of Logic* (1847). De forma bem resumida, o objetivo de Boole era criar uma lógica matemática por meio de sua álgebra de classes (as futuras álgebras booleanas) que consiste em um conjunto C de classes que inclui as classes vazia e universal e as duas operações binárias de união e interseção. Dentro desse cálculo algébrico os símbolos podem ser interpretados para gerar ou uma lógica proposicional (lógica das proposições secundárias) ou, em outra interpretação, uma lógica de predicados monádicos (lógica das proposições primárias). Outro nome importante é Augustus de Morgan (1806-1878) que apresenta suas idéias acerca de uma lógica de relações em uma série de artigos nas *Cambridge Philosophical Transactions* (1846-62). Na Alemanha havia uma unanimidade e uma autoridade em lógica: Ernst Friedrich Wilhelm Karl Schröder (1841-1902) que publicara *Der Operationskreis des Logikkalküls* (1877), antes do *Begriffsschrift* de Frege e, posteriormente, suas *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 Bände, (1890–1895). Schröder tratou mais de sistematizar as contribuições dos lógicos ingleses.

---

<sup>9</sup> Kneale & Kneale 1991, p. 515.

Frege é o maior lógico da história da lógica, logo depois de Aristóteles, e isso parece ser uma unanimidade entre os estudiosos. Mas isso ainda não é tudo, existe ainda a sua relevância para a filosofia. Dummett escreve que “se Frege tivesse morrido em 1880 seu lugar na história da filosofia, como o fundador da moderna lógica matemática, estaria ainda assegurado. Mas do jeito que ocorreu a sua importância foi bem maior do que isso.”<sup>10</sup> De fato, particularmente em seus artigos dos anos 90, e especificamente o “Über Sinn und Bedeutung” (Sobre o sentido e a referência), Frege inscreve-se como o fundador da moderna filosofia da linguagem, e ao lado de Russell e Wittgenstein como um dos responsáveis pela chamada “virada lingüística” na filosofia. Na história do pensamento ocidental não encontramos muitos nomes que de forma relevante tenham contribuído tanto para a filosofia quanto para a matemática, e que possuam o tamanho de um Platão, Aristóteles, Descartes ou Leibniz, para ficarmos apenas em alguns nomes incontroversos. Frege entra nessa lista, mas no século XIX pagou um preço caro pela inclusão. Como ele mesmo afirmou a natureza da sua investigação, a fundamentação da aritmética, o levou necessariamente à filosofia, e essa união do técnico-matemático com o filosófico não parecia agradar nem ao matemático, nem ao filósofo. Foi o caso, por exemplo, de Hermann Grassmann (1808-1877) que em sua “Ausdehnungslehre” de 1844 introduzia de forma precoce para a sua época o cálculo vetorial generalizado e os conceitos, utilizando outros nomes, de base, dimensão e dependência e independência linear, chaves para a matemática do século XX. A tragédia de Grassmann que fala Dieudonné<sup>11</sup> é exatamente o não reconhecimento e a pequena recepção obtida pela sua obra na época. E isto por conta do estilo filosófico de sua escrita matemática. Frege sabia do risco da empreitada, pois ele próprio iria observar em 1892, no prefácio de sua *opus maior*, *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis Básicas da Aritmética), que a recepção de suas idéias filosófico-matemáticas não seria fácil uma vez que, por um lado, os matemáticos iriam pensar: *metaphysica sunt, non leguntur!*, e, pelo outro, igualmente os filósofos pensariam: *mathematica sunt, non leguntur!* O preço que Frege pagou foi o não reconhecimento pelos contemporâneos da revolução que ele estava a empreender com a sua obra. Além da pequena acolhida o equívoco da identificação da lógica de Frege com a álgebra lógica de Boole, como fizeram, por exemplo, John Venn na Inglaterra e Ernst Schröder na Alemanha.<sup>12</sup> Frege sabia desse perigo, pois no prefácio do *Begriffsschrift* ele já alertava ao leitor que a modelagem de sua linguagem simbólica pela linguagem da aritmética, como ele indicava no título, não deveria ser entendida como uma “tentativa de produzir alguma similaridade artificial ao considerar um conceito como soma de suas características”, marcando assim de saída sua distancia com a álgebra lógica. A sua linguagem por fórmulas, ele esclarece, se aproxima daquela da aritmética apenas “na forma como as letras são utilizadas.” Em vários escritos Frege tenta mostrar as diferenças, hoje claras, entre a sua lógica e a lógica de Boole. O artigo *Booles*

---

<sup>10</sup> Dummett 1973, p.665

<sup>11</sup> Cf. Dieudonné 1979/80.

<sup>12</sup> Cf. *Review of Frege's Conceptual Notation by John Venn*, *Mind*, 5(1880), p.297; *Review of Frege's Conceptual Notation by E. Schröder*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25(1880), pp. 81-94. Cf também *Review of Frege's Conceptual Notation by C. Th. Michaelis*, *Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft*, 12(1880), pp. 232-40 e *Review of the Conceptual Notation by K. Lasswitz*, *Jenaer Literatur-Zeitung*, 6(1879), pp.248-9.

*rechnende Logik und die Begriffsschrift*, escrito em 1880/81, foi enviado, sucessivamente, para o *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, o *Mathematischen Annalen* e o *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, tendo sido recusado pelos respectivos editores, Otto Schlömilch, Felix Klein e H. Ulrici e permaneceu dessa forma inédito.<sup>13</sup> É provável que o manuscrito *Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift* de 1882 também tenha sido recusado pela *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie*.<sup>14</sup> Mas Frege consegue publicar em 1882 o *Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift* (*Sobre a justificação científica de uma conceitografia*) no *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*. Lemos então seu esclarecimento: "Não era meu desejo apresentar uma lógica abstrata através de fórmulas, mas exprimir um conteúdo mediante sinais escritos de maneira mais precisa e mais clara do que seria possível através de palavras. Com efeito, desejava produzir, não um mero *calculus ratiocinator*, mas uma *lingua characteristica* no sentido leibniziano; para tal realização, reconheço, porém, que um cálculo dedutivo é uma parte necessária de uma ideografia. Se isto foi mal compreendido, talvez se deva ao fato de eu ter permitido que, no desenvolvimento de meu projeto, o aspecto lógico abstrato ocupasse demasiadamente o primeiro plano."<sup>15</sup>

Em 1902 Frege estava com 54 anos de idade e podemos imaginar o seu sentimento na época. Havia uma obra filosófico-matemática pronta, uma trilogia pronta, pois o segundo volume da terceira obra que a completava, o *Grundgesetze der Arithmetik*, estava no prelo, e nela Frege concluía a demonstração de sua tese logicista de que a Aritmética era redutível à Lógica, projeto que ele anunciara em 1879 em seu *Begriffsschrift*, a primeira obra de sua trilogia. Foram necessários 23 anos para completar o projeto, durante os quais Frege teve de explicá-lo, defendê-lo e refiná-lo. Podemos imaginar o sentimento de Frege na época: nele estavam reunidas - podemos imaginar - a ambição pouco certa do filósofo e a certeza pouco ambiciosa do matemático. Ele sabia do alcance de suas idéias, sabia o quanto elas mudavam as concepções vigentes em filosofia e em lógica e ele - podemos imaginar o seu sentimento - havia acabado de *demonstrar* a verdade de suas idéias. A certeza do matemático - *quod erat demonstrandum!* - autenticando a ambição do filósofo. Podemos imaginar o sentimento de Frege na época: a obra que concluía o seu projeto de vida no prelo, e ele recebe de Bertrand Russell em junho de 1902 uma carta na qual é apontada uma contradição em seu sistema: o Axioma V de seu sistema era antinômico. A questão problemática, hoje conhecida por *Paradoxo de Russell*, pode, equivalentemente, ser assim rephraseada. O conjunto de todos os *conjuntos que não pertencem a si próprios* pertence ou não a si próprio? Esta pergunta se deixa formular no sistema de Frege e é irrespondível. Frege publica o livro que estava na gráfica, acrescentando a carta de Russell. Em 23 de novembro de 1962 Russell escreve a Heijenoort autorizando a publicação de sua carta de 1902 a Frege. O depoimento de Russell é um dos mais vivos testemunhos do espírito científico de Frege. Deixo-o no original:

Dear Professor van Heijenoort,

I should be most pleased if you would publish the correspondence between Frege and myself, and I am grateful to you for suggesting this. As I think about acts of integrity and grace, I

---

<sup>13</sup> Frege 1969, p. 9.

<sup>14</sup> Frege 1969, p. 9.

<sup>15</sup> Frege 1978, p. 142.

realize that there is nothing in my knowledge to compare with Frege's dedication to truth. His entire life's work was on the verge of completion, much of his work had been ignored to the benefit of men infinitely less capable, his second volume was about to be published, and upon finding that his fundamental assumption was in error, he responded with intellectual pleasure clearly submerging any feelings of personal disappointment. It was almost superhuman and a telling indication of that of which men are capable if their dedication is to creative work and knowledge instead of cruder efforts to dominate and be known.

Yours sincerely,  
Bertrand Russell<sup>16</sup>

Pelo que expusemos deve ter ficado claro que o programa filosófico-matemático de Frege é bem mais ambicioso que a simples criação de um novo sistema de lógica. De modo que se faz necessário tanto a clara separação entre o projeto logicista e a lógica que Frege cria para executá-lo, quanto examinar esta última como instrumento para o projeto. Somente dessa forma é possível perceber porque as lógicas existentes eram insuficientes para Frege, e entender as novidades introduzidas pela sua lógica. Talvez a motivação inicial de Frege na direção de seu projeto logicista tenha sido a falta de rigor nas demonstrações e nas definições matemáticas, que ele acreditava ser a tônica dos livros que ele cuidadosamente examinava e resenhava. E ele inicia o prefácio de seu *Begriffsschrift* exatamente com o exame da dedução, do exame da cadeia de inferências de uma prova matemática. De fato, provar de maneira rigorosa e irrefutável que a aritmética é redutível à lógica, exige de início que se questione o próprio conceito de prova matemática. Para Frege, a prova mais firme, “é a puramente lógica, a qual prescindindo das características particulares das coisas é baseada exclusivamente nas leis que suportam todo o conhecimento”, e para ele as verdades que exigem justificação ou são desse tipo, ou são deduzidas por meio de provas “baseadas em fatos da experiência”. Uma prova na aritmética não pode incluir nada de intuitivo, nem conter lacunas na cadeia de inferências. Frege escreve: “Ao procurar atender esta exigência da forma a mais rigorosa possível, encontrei um obstáculo na inadequação da linguagem; quanto mais pesadas eram as expressões surgidas, quanto mais complexas tornavam-se as relações, menos se alcançava a precisão que o meu objetivo exigia. Desta necessidade surgiu a idéia da presente ideografia.” A lógica a ser criada tinha assim de ser capaz de representar tanto os “conteúdos conceituais” envolvidos em uma prova, quanto o próprio conceito de prova rigorosa. Essas duas exigências não podiam ser conduzidas nos sistemas lógicos anteriores a Frege. A lógica de Boole, por exemplo, não podia representar uma prova matemática que contivesse tanto proposições da lógica proposicional quanto da lógica de predicados, porque ela não possui os recursos para simbolizar simultaneamente os dois tipos de proposições. Menos ainda a de representar as funções matemáticas de várias variáveis, pois lhe falta uma lógica de predicados n-ádicos. Além disso, a preocupação de Frege com a formalização do conceito de prova rigorosa passa ao largo do simbolismo de Boole, pois ele nem apresentou uma estruturação axiomática do seu sistema lógico, nem introduziu a diferenciação relativa entre leis lógicas e regras de inferências.

Resumamos<sup>17</sup> os pontos que fazem da lógica de Frege, como apresentada no *Begriffsschrift*, um marco da disciplina e que, segundo Heijenoort, “qualquer um deles seria suficiente pra assegurar ao livro um lugar permanente na biblioteca dos lógicos.”<sup>18</sup>

---

<sup>16</sup> Cf. Heijenoort 2000, p. 127.

Lógica proposicional com funções veritativas (tabelas-verdade).

- 1) Substituição da análise de uma proposição em sujeito e predicado por função e argumentos.
- 2) Lógica de predicados n-ádicos.
- 3) Apresentação dos constituintes de um sistema lógico formal:
  - a. Uma linguagem estruturada que possa representar “pensamentos”.
  - b. Introdução de símbolos lógicos para as conexões proposicionais (não, e, ou, se..., então..., se, e somente se...) e para as quantificações universais e existenciais.<sup>19</sup>
  - c. Estabelecimento de axiomas ou “verdades” básicas.
  - d. Estabelecimento de regras de inferência e da regra de substituição que dizem como uma proposição pode ser inferida de outras já estabelecidas, i.e., uma teoria da inferência que permite que as deduções sejam conduzidas exclusivamente de acordo com a forma das expressões.

Inseri nos textos da *Introdução* de Frege ao *Begriffsschrift*, tanto o da língua original, quanto o da tradução, algarismos romanos entre colchetes para marcar os diversos pontos tratados por Frege. Os pontos são os seguintes: [I] Epistemologia e fundamentação, [II] O método seguido para descobrir a natureza dos juízos da aritmética; [III] Inadequação da linguagem natural. A razão da Ideografia. [IV] O nome Ideografia; [V] A analogia olho x microscópio; [VI] A comparação com Leibniz; [VII] Aplicações da Ideografia. [VIII] A tarefa da filosofia; [IX] Lógica; [X] Observações. Seguem algumas observações sobre a tradução:

- 1) A tradução do original foi cotejada com a tradução inglesa de Jean van Heijenoort, publicada em *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, e com a tradução francesa de Corine Besson, *Idéographie*, Vrin, 2000.
- 2) Segui Heijenoort e Besson na escolha do termo Ideografia como tradução para *Begriffsschrift*.<sup>20</sup>
- 3) A palavra *Beurtheilbarkeit*, na grafia alemã de hoje *Beurteilbarkeit*, que aparece no §2 do índice na expressão *Beurtheilbarkeit eines Inhalts*, é de difícil tradução. Besson escolhe *Jugeabilité d'un contenu*, enquanto que Heijenoort refraseia para *Possibility that a content become a judgement*. Preferi um neologismo e traduzir para *Judicabilidade de um conteúdo*.

---

<sup>17</sup> Utilizo aqui, livremente, os resumos de Franz von Kutschera e Jean Heijenoort. Cf. Kutschera [20], p.194-5 e Heijenoort 2000, p. 1.

<sup>18</sup> Heijenoort 2000, p. 1.

<sup>19</sup> Frege escolhe a negação e a condicional como conectivos primitivos no cálculo proposicional, e quantificação universal como primitivo no cálculo de predicados.

<sup>20</sup> Heijenoort justifica sua escolha argumentando que o uso de *Ideography* por Philip E. B Jourdain, Cf. Jourdain 1912, em um artigo sobre o desenvolvimento histórico da lógica matemática, teve a concordância de Frege: “In the translation below this term is rendered by “ideography”, a word used by Jourdain in a paper (1912) read and annotated by Frege; that Frege acquiesced in its use was the reason why ultimately it was adopted here.” (Cf. Heijenoort 2000, p. 1). Não percebi nenhuma menção de Frege, positiva ou negativa, ao uso da expressão. A falta de uma explícita recusa, suponho, levou Heijenoort à sua hipótese.



- 4) Traduzi *Darstellungsweise*, seguindo *mode of presentation* de Heijenoort, por modo de apresentação, ao invés da solução de Besson que a traduz por *mode de représentation*, menos fiel ao espírito de Frege.
- 5) *Grundgesetze* traduzi por Lei básica. Heijenoort usa *Fundamental law* e Besson *Axiome*.
- 6) Não atualizei o texto de Frege para o alemão de hoje.

### Prefácio

[I] A apreensão de uma verdade científica percorre normalmente vários estágios de certeza. Conjeturada inicialmente, talvez, por meio de um número insuficiente de casos particulares, a proposição geral torna-se cada vez mais firmemente estabelecida ao ser conectada com outras verdades através de cadeias de inferência, sejam porque conseqüências que dela são deduzidas encontram confirmação por outros meios, sejam porque, inversamente, reconhece-se que ela é conseqüência de proposições já estabelecidas. Pode-se assim perguntar, por um lado, pelo caminho através do qual uma proposição é gradualmente alcançada, e por outro, de qual forma ela pode finalmente ser estabelecida da maneira mais firme. A primeira pergunta provavelmente é respondida de forma diferente pelas diferentes pessoas, a última é mais definitiva e sua resposta está associada à natureza interna da proposição considerada. A prova mais firme, obviamente, é a puramente lógica, a qual prescindindo das características particulares das coisas baseia-se apenas nas leis que dão origem a todo o conhecimento. Dessa maneira dividimos todas as verdades que exigem justificação em duas espécies, aquelas cujas provas podem ser conduzidas de forma puramente lógica, e aquelas cujas provas estão baseadas em fatos da experiência. Porém, é perfeitamente compatível que uma proposição pertença à primeira espécie e, no entanto, jamais chegue à consciência de um espírito humano, a não ser pela atividade dos sentidos.\* Assim não é a origem psicológica, mas o mais perfeito método de prova que está na base da divisão. [II] Quando eu coloco agora a questão de saber a qual dessas duas espécies pertencem os juízos aritméticos, teria primeiro de investigar até onde se poderia chegar na aritmética apenas por meio de inferências, apoiado exclusivamente nas leis do pensamento, as quais estão acima de todos os particulares. O curso que segui foi primeiro procurar reduzir o conceito de ordenação em uma seqüência ao de conseqüência *lógica* e deste progredir para o conceito de número. Para que nada intuitivo pudesse ser aqui introduzido de forma despercebida, tudo teria de depender da inexistência de lacunas na cadeia de inferências. [III] Ao procurar atender esta exigência da forma a mais rigorosa possível, encontrei um obstáculo na inadequação da linguagem; quanto mais pesadas eram as expressões surgidas, quanto mais complexas tornavam-se as relações, menos se alcançava a precisão que o meu objetivo exigia. Dessa necessidade surgiu a idéia da presente ideografia. Ela serve assim primordialmente para testar da forma mais segura a validade de uma cadeia de inferência e mostrar qualquer pressuposto que possa ser involuntariamente introduzido, de modo que a sua origem possa ser investigada. Por isto desiste-se de expressar qualquer

---

\*Como sem a percepção sensorial nenhum desenvolvimento mental é possível nos seres conhecidos por nós, isto vale para todos os juízos.

coisa que não tenha significado para a *dedução*. No § 3 chamei de *conteúdo conceitual* o que apenas me interessa. Essa explicação deve ser sempre levada em conta, quando se deseja compreender corretamente a essência da minha linguagem por fórmulas. [IV] Daí surgiu também o nome "ideografia". Como me limitei na época à expressão das relações que são independentes das características particulares das coisas, pude também utilizar a expressão "linguagem por fórmulas do pensamento puro". A modelação pela linguagem da aritmética, que indiquei no título, diz respeito mais às idéias básicas que aos detalhes de sua constituição. Qualquer tentativa de produzir alguma similaridade artificial ao considerar um conceito como soma de suas características está completamente fora de meu pensamento. O ponto de contato mais direto da minha linguagem por fórmulas com aquela da aritmética é a forma como as letras são utilizadas.

[V] Acredito poder clarear da melhor maneira a relação de minha ideografia com a linguagem cotidiana se a comparo com a que existe entre o microscópio e o olho. Este último possui, pela amplitude de sua aplicação e pela mobilidade com que ele se adapta às diferentes circunstâncias, uma grande superioridade sobre o microscópio. Considerado como um instrumento óptico, ele mostra evidentemente muitas imperfeições, que normalmente passam despercebidas por conta de sua íntima relação com a vida mental. Mas na medida em que os objetivos científicos colocam grandes exigências na precisão, o olho revela-se inadequado. O microscópio, ao contrário, adapta-se perfeitamente a esses objetivos, mas exatamente porque é inútil para os demais.

Da mesma forma esta ideografia é inventada para determinados objetivos científicos e não deve ser condenada por não servir para outros. Se ela de alguma forma atender a esses objetivos, então a falta de novas verdades em meu trabalho pode ser relevada. Consola-me a consciência de que um progresso no método também avança a ciência. De fato, Bacon acredita ser mais vantajoso descobrir um método pelo qual tudo possa ser facilmente encontrado, do que a descoberta de algo isolado e, realmente, todos os grandes avanços científicos de nossa época devem sua origem a uma melhoria do método.

[VI] Leibniz também reconheceu as vantagens de uma notação adequada, talvez até superestimado. Sua idéia de uma característica geral, de um *calculus philosophicus* ou *ratiocinator*<sup>\*</sup>, era muito grandiosa, para que a tentativa de executá-la pudesse avançar além dos simples preliminares. O entusiasmo que tomou conta de seu criador, ao considerar o imenso aumento na capacidade mental da humanidade que surgiria de uma notação adequada às próprias coisas, levou-o a subestimar as dificuldades que tal empresa iria encontrar. Mas mesmo que este grande objetivo não possa ser alcançado de uma única vez, não se deve duvidar de uma aproximação lenta e gradual. Se um problema em sua ampla generalidade parece insolúvel, deve-se então restringi-lo provisoriamente; então, talvez, ele possa ser vencido por meio de ampliações graduais. Podem-se considerar os sinais da aritmética, geometria e química como realizações da idéia de Leibniz em campos particulares. A ideografia aqui proposta acrescenta a eles um novo, colocado exatamente no centro, adjacente a todos os demais. Partindo dela pode-se, com grande esperança de sucesso, preencher as lacunas das linguagens por fórmulas existentes, reunir as regiões até

---

<sup>\*</sup> Confira sobre esse assunto: Trendelenburg, *Historische Beiträge zur Philosophie*. Vol. 3.

então separadas em um único domínio e estendê-lo aos campos nos quais até então tem faltado tal linguagem.

[VII] Eu tenho plena convicção que minha ideografia pode ser aplicada com sucesso onde se exija precisão na validade de uma prova, como na fundamentação do cálculo diferencial e integral.

Mais fácil ainda me parece estender o domínio dessa linguagem por fórmulas à geometria. Necessitaria apenas de acrescentar alguns símbolos para as relações intuitivas já existentes. Obter-se-ia dessa maneira uma espécie de *analysis situs*.

A transição para a teoria pura do movimento e daí para a mecânica e a física poderia partir desse ponto. Estas últimas áreas, nas quais a necessidade natural se coloca por si mesma junto a necessidade racional, são as primeiras para as quais se pode prever um desenvolvimento ulterior da notação à medida que o conhecimento progride. Contudo, não há razão para esperar até que seja descartada a possibilidade de tais transformações.

[VIII] Se é uma tarefa da filosofia quebrar o poder da palavra sobre o espírito humano, ao desvelar os enganos que surgem freqüente e inevitavelmente através do uso da linguagem na expressão das relações entre os conceitos, ao libertar o pensamento daquilo que o prende unicamente à natureza dos meios de expressão lingüísticos, então a minha *ideografia* ampliada para esses objetivos pode tornar-se uma ferramenta útil para os filósofos. É evidente que ela não pode reproduzir o pensamento em sua forma pura, o que não poderia ser diferente para um meio de representação externo; mas, por um lado, essas discrepâncias podem ser limitadas ao inevitável e ao inofensivo, e, pelo outro, o fato de que elas serem de uma espécie bem diferente daquelas típicas da linguagem, já fornece uma proteção contra a possível influência unilateral de um determinado meio de expressão.

[IX] A própria invenção desta ideografia, me parece, faz avançar a lógica. Acredito que os lógicos, se eles não se retraírem com a primeira impressão de não familiaridade, não recusarão sua aprovação às novidades que fui levado por uma necessidade inerente a própria matéria. Esses desvios do tradicional encontram sua justificação no fato de que a lógica até agora ter sempre se aproximado bastante da linguagem e da gramática. Em particular, acredito que a substituição dos conceitos *sujeito* e *predicado* por *argumento* e *função* vai perdurar ao longo do tempo. É fácil ver como a concepção de conteúdo como função de um argumento opera na formação de conceito. Possa ainda merecer a atenção a prova das relações entre os significados das palavras: se, e, não, ou, existe, todo, etc.

[X] Em particular sejam ainda considerados os seguintes pontos.

A restrição, no § 6, a um único modo de inferência é justificada pelo fato de que na apresentação dos *fundamentos* de tal ideografia os elementos primitivos devem ser tomados tão simples quanto possível, se clareza e ordem devem ser almejados. Isto não exclui que, *depois*, as passagens de vários juízos para um novo, que são possíveis com este único modo de inferência apenas de forma indireta, sejam convertidas em outras diretas para fins de abreviação. De fato, isto pode ser recomendável em futuras aplicações. Desta forma então surgiriam outros modos de inferência.

Observei posteriormente que as fórmulas (31) e (41) poderiam ser reunidas em uma única

$$\text{---}(\text{---} a \equiv b)$$

que torna possível mais algumas simplificações.

Como observei no início, a aritmética foi o ponto de partida dos pensamentos que me conduziram a minha ideografia. Por isto intenciono primeiro aplicá-la a esta ciência, procurando analisar detalhadamente seus conceitos e fundamentar de forma mais segura suas proposições. Na terceira parte apresento provisoriamente alguns dos resultados obtidos nessa direção. O prosseguimento ao longo da trajetória indicada, a elucidação do conceito de número, grandeza, etc., formarão o objeto de futuras investigações, às quais me dedicarei após este trabalho.

Jena, 18 de dezembro de 1878.

## CONTEÚDO

### I. Explicação dos símbolos

§ 1 Letras e outros sinais

#### O juízo

§ 2 Judicabilidade de um conteúdo. Barra de conteúdo, barra de juízo.

§ 3 Sujeito e predicado. Conteúdo conceitual.

§ 4 Juízos universais, particulares; negativos; categóricos, hipotéticos, disjuntivos; apodícticos, assertóricos, problemáticos.

#### A condicionalidade

§ 5 Se. Barra de condicional

§ 6 A inferência. Os modos de inferência aristotélicos.

#### A negação

§ 7 Barra de negação. Ou, ou\_\_\_ ou, e, mas, e não, nem\_\_\_ nem

#### A identidade de conteúdo

§ 8 Necessidade de um sinal para a identidade de conteúdo, introdução de tal sinal

#### A função

§ 9 Explicação das palavras "função" e "argumento". Funções de vários argumentos. Lugares dos argumentos. Sujeito, objeto

§ 10 Utilização das letras como sinais de funções. "A tem a propriedade  $\Phi$ ". "B está na relação  $\psi$  com A". "B é o resultado de uma aplicação do procedimento  $\psi$  ao objeto A". O sinal de função como argumento

#### A generalidade

§ 11 Letras góticas. A concavidade da barra de conteúdo. Substituição das letras góticas. Se domínio. Letras latinas.

§ 12 Existe coisas que não\_\_\_. Não existe nenhum\_\_\_. Existem alguns\_\_\_. Cada. Todos. Conexões causais. Nenhum. Alguns não. Alguns. É possível que\_\_\_. Quadro das oposições lógicas.

### II. Representação e dedução de alguns juízos do pensamento puro

§ 13 Utilidade do modo dedutivo de apresentação

§ 14 As primeiras duas leis fundamentais da condicionalidade

§ 15 Algumas de suas conseqüências

§ 16 A terceira lei fundamental da condicionalidade, conseqüências

- § 17 A primeira lei fundamental da negação, conseqüências
- § 18 A segunda lei fundamental da negação, conseqüências
- § 19 A terceira lei fundamental da negação, conseqüências
- § 20 A primeira lei fundamental da identidade de conteúdo, conseqüências
- § 21 A segunda lei fundamental da identidade de conteúdo, conseqüências
- § 22 A lei fundamental da generalidade, conseqüências

### **III. Alguns elementos de uma teoria geral das seqüências**

- § 23 Observações introdutórias
- § 24 Hereditariedade. Duplicação da barra de juízo. Letras gregas minúsculas
- § 25 Conseqüências
- § 26 Sucessão em uma seqüência
- § 27 Conseqüências
- § 28 Outras conseqüências
- § 29 "z pertence a f-seqüência começando com x." Explicação e conseqüências
- § 30 Outras conseqüências
- § 31 Unicidade de um procedimento. Explicação e conseqüências

### **Vorwort**

[I] Das Erkennen einer wissenschaftlichen Wahrheit durchläuft in der Regel mehre Stufen der Sicherheit. Zuerst vielleicht aus einer ungenügenden Zahl von Einzelfällen errathen, wird der allgemeine Satz nach und nach sicherer befestigt, indem er durch Schlussketten mit andern Wahrheiten Verbindung erhält, sei es dass aus ihm Folgerungen abgeleitet werden, die auf andere Weise Bestätigung finden, sei es dass er umgekehrt als Folge schon feststehender Sätze erkannt wird. Es kann daher einerseits nach dem Wege gefragt werden, auf dem ein Satz allmählich errungen wurde, andererseits nach der Weise, wie er nun schliesslich am festesten zu begründen ist. Erstere Frage muss möglicherweise in Bezug auf verschiedene Menschen verschieden beantwortet werden, letztere ist bestimmter, und ihre Beantwortung hängt mit dem innern Wesen des betrachteten Satzes zusammen. Die festeste Beweisführung ist offenbar die rein logische, welche, von der besondern Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründet, auf denen alle Erkenntnis beruht. Wir theilen danach alle Wahrheiten, die einer Begründung bedürfen, in zwei Arten, indem der Beweis bei den einen rein logisch vorgehen kann, bei den andern sich auf Erfahrungsthatfachen stützen muss. Es ist aber wohl vereinbar, dass ein Satz zu der ersteren Art gehört und doch ohne Sinnesthätigkeit nie in einem menschlichen Geiste zum Bewusstsein kommen könnte.<sup>\*)</sup> Also nicht die psychologische Entstehungsweise, sondern die vollkommenste Art der Beweisführung liegt der Eintheilung zu Grunde. [II] Indem ich mir nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urtheile gehörten, musste ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse

---

<sup>\*)</sup> Da ohne Sinneswahrnehmung keine geistige Entwicklung bei den uns bekannten Wesen möglich ist, so gilt das Letztere von allem Urtheilen.

allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. Der Gang war hierbei dieser, dass ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindrängen könnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen. [III] Indem ich diese Forderung auf das strengste zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdrucks doch, je verwickelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen liess, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor. Sie soll also zunächst dazu dienen, die Bündigkeit einer Schlusskette auf die sicherste Weise zu prüfen und jede Voraussetzung, die sich unbemerkt einschleichen will, anzuzeigen, damit letztere auf ihren Ursprung untersucht werden könne. Deshalb ist auf den Ausdruck alles dessen verzichtet worden, was für die *Schlussfolge* ohne Bedeutung ist. Ich habe das, worauf allein es mir ankam, in § 3 als *begrifflichen Inhalt* bezeichnet. Diese Erklärung muss daher immer im Sinne behalten werden, wenn man das Wesen meiner Formelsprache richtig auffassen will. [IV] Hieraus ergab sich auch der Name „Begriffsschrift“. Da ich mich fürs erste auf den Ausdruck solcher Beziehungen beschränkt habe, die von der besonderen Beschaffenheit der Dinge unabhängig sind, so konnte ich auch den Ausdruck „Formelsprache des reinen Denkens“ gebrauchen. Die Nachbildung der arithmetischen Formelsprache, die ich auf dem Titel angedeutet habe, bezieht sich mehr auf die Grundgedanken als die Einzelgestaltung. Jene Bestrebungen, durch Auffassung des Begriffs als Summe seiner Merkmale eine künstliche Aehnlichkeit herzustellen, haben mir dabei durchaus fern gelegen. Am unmittelbarsten berührt sich meine Formelsprache mit der arithmetischen in der Verwendungsweise der Buchstaben.

[V] Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiss, eine grosse Ueberlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten, die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke grosse Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle andern unbrauchbar.

So ist diese Begriffsschrift ein für bestimmte wissenschaftliche Zwecke ersonnenes Hilfsmittel, das man nicht deshalb verurtheilen darf, weil es für andere nichts taugt. Wenn sie diesen Zwecken einigermaßen entspricht, so möge man immerhin neue Wahrheiten in meiner Schrift vermissen. Ich würde mich darüber mit dem Bewusstsein trösten, dass auch eine Weiterbildung der Methode die Wissenschaft fördert. Hält es doch Baco für vorzüglicher ein Mittel zu erfinden, durch welches Alles leicht gefunden werden kann, als Einzelnes zu entdecken, und haben doch alle grossen wissenschaftlichen Fortschritte der neueren Zeit ihren Ursprung in einer Verbesserung der Methode gehabt.

[VI] Auch Leibniz hat die Vortheile einer angemessenen Bezeichnungsweise erkannt, vielleicht überschätzt. Sein Gedanke einer allgemeinen Charakteristik, eines *calculus philosophicus* oder *rationator*<sup>\*)</sup> war zu riesenhaft, als dass der Versuch ihn zu verwirklichen über die blossen Vorbereitungen hätte hinausgelangen können. Die Begeisterung, welche seinen Urheber bei der Erwägung ergriff, welch' unermessliche Vermehrung der geistigen Kraft der Menschheit aus einer die Sachen selbst treffenden Bezeichnungsweise entspringen würde, liess ihn die Schwierigkeiten zu gering schätzen, die einem solchen Unternehmen entgegenstehen. Wenn aber auch dies hohe Ziel mit Einem Anlaufe nicht erreicht werden kann, so braucht man doch an einer langsamen, schrittweisen Annäherung nicht zu verzweifeln. Wenn eine Aufgabe in ihrer vollen Allgemeinheit unlösbar scheint, so beschränke man sie vorläufig; dann wird vielleicht durch allmähliche Erweiterung ihre Bewältigung gelingen. Man kann in den arithmetischen, geometrischen, chemischen Zeichen Verwirklichungen des Leibnizischen Gedankens für einzelne Gebiete sehen. Die hier vorgeschlagene Begriffsschrift fügt diesen ein neues hinzu und zwar das in der Mitte gelegene, welches allen andern benachbart ist. Von hier aus lässt sich daher mit der grössten Aussicht auf Erfolg eine Ausfüllung der Lücken der bestehenden Formelsprachen, eine Verbindung ihrer bisher getrennten Gebiete zu dem Bereiche einer einzigen und eine Ausdehnung auf Gebiete ins Werk setzen, die bisher einer solchen ermangelten.

[VII] Ich verspreche mir überall da eine erfolgreiche Anwendung meiner Begriffsschrift, wo ein besonderer Werth auf die Bündigkeit der Beweisführung gelegt werden muss, wie bei der Grundlegung der Differential- und Integralrechnung.

Noch leichter scheint es mir zu sein, das Gebiet dieser Formelsprache auf Geometrie auszudehnen. Es müssten nur für die hier vorkommenden anschaulichen Verhältnisse noch einige Zeichen hinzugefügt werden. Auf diese Weise würde man eine Art von *analysis situs* erhalten.

Der Uebergang zu der reinen Bewegungslehre und weiter zur Mechanik und Physik möchte sich hier anschliessen. In den letzteren Gebieten, wo neben der Denknöthwendigkeit die Naturnöthwendigkeit sich geltend macht, ist am ehesten eine Weiterentwicklung der Bezeichnungsweise mit dem Fortschreiten der Erkenntnis vor auszusehen. Deshalb braucht man aber nicht zu warten, bis die Möglichkeit solcher Umformungen ausgeschlossen erscheint.

[VIII] Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdrucksmittels behaftet, so wird meine Begriffsschrift, für diese Zwecke weiter ausgebildet, den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können. Freilich giebt auch sie, wie es bei einem äussern Darstellungsmittel wohl nicht anders möglich ist, den Gedanken nicht rein wieder; aber einerseits kann man diese Abweichungen auf das Unvermeidliche und Unschädliche beschränken, andererseits ist schon dadurch, dass sie

---

<sup>\*)</sup> Siehe hierüber: Trendelenburg, Historische Beiträge zur Philosophie 3. Band.

ganz anderer Art sind als die der Sprache eigenthümlichen, ein Schutz gegen eine einseitige Beeinflussung durch eines dieser Ausdrucksmittel gegeben.

[IX] Schon das Erfinden dieser Begriffsschrift hat die Logik, wie mir scheint, gefördert. Ich hoffe, dass die Logiker, wenn sie sich durch den ersten Eindruck des Fremdartigen nicht zurückschrecken lassen, den Neuerungen, zu denen ich durch eine der Sache selbst inwohnende Nothwendigkeit getrieben wurde, ihre Zustimmung nicht verweigern werden. Diese Abweichungen vom Hergebrachten finden ihre Rechtfertigung darin, dass die Logik sich bisher immer noch zu eng an Sprache und Grammatik angeschlossen hat. Insbesondere glaube ich, dass die Ersetzung der Begriffe *Subject* und *Praedicat* durch *Argument* und *Function* sich auf die Dauer bewähren wird. Man erkennt leicht, wie die Auffassung eines Inhalts als Function eines Argumentes begriffbildend wirkt. Es möchte ferner der Nachweis des Zusammenhanges zwischen den Bedeutungen der Wörter: wenn, und, nicht, oder, es giebt, einige, alle u.s.w. Beachtung verdienen.

[X] Im Besondern sei nur noch Folgendes erwähnt.

Die in § 6 ausgesprochene Beschränkung auf eine einzige Schlussweise wird dadurch gerechtfertigt, dass bei der *Grundlegung* einer solchen Begriffsschrift die Urbestandtheile so einfach wie möglich genommen werden müssen, wenn Uebersichtlichkeit und Ordnung geschaffen werden sollen. Dies schliesst nicht aus, dass *später* Uebergänge von mehreren Urtheilen zu einem neuen, die bei dieser einzigen Schlussweise nur in mittelbarer Weise möglich sind, der Abkürzung wegen in unmittelbare verwandelt werden. In der That möchte sich dies bei einer spätern Anwendung empfehlen. Dadurch würden dann weitere Schlussweisen entstehen.

Nachträglich habe ich bemerkt, dass die Formeln (31) und (41) in die einzige zusammengezogen werden können, wodurch noch einige Vereinfachungen möglich

$$\vdash ( \vdash \vdash a \equiv a )$$

werden.

Die Arithmetik, wie ich im Anfange bemerkt habe, ist der Ausgangspunkt des Gedankenganges gewesen, der mich zu meiner Begriffsschrift geleitet hat. Auf diese Wissenschaft denke ich sie daher auch zuerst anzuwenden, indem ich ihre Begriffe weiter zu zergliedern und ihre Sätze tiefer zu begründen suche. Vorläufig habe ich im dritten Abschnitte einiges von dem mitgetheilt, was sich in dieser Richtung bewegt. Die weitere Verfolgung des angedeuteten Weges, die Beleuchtung der Begriffe der Zahl, der Grösse u.s.w. sollen den Gegenstand fernerer Untersuchungen bilden, mit denen ich unmittelbar nach dieser Schrift hervortreten werde.

Jena, den 18. December 1878.



## **Inhalt.**

### **I. Erklärung der Bezeichnungen.**

§ 1. Buchstaben und andere Zeichen

#### **Das Urtheil.**

§ 2. Beurtheilbarkeit eines Inhalts. Inhaltsstrich, Urtheilsstrich

§ 3. Subject und Prädicat. Begrifflicher Inhalt

§ 4. Allgemeine, besondere; verneinende; kategorische, hypothetische, disjunctive; apodiktische, assertorische, problematische Urtheile

#### **Die Bedingtheit.**

§ 5. Wenn. Bedingungsstrich

§ 6. Der Schluss. Die Aristotelischen Schlussweisen

#### **Die Verneinung.**

§ 7. Verneinungsstrich. Oder, entweder\_\_\_ oder, und, aber, und nicht, weder\_\_\_ noch

#### **Die Inhaltsgleichheit.**

§ 8. Nothwendigkeit eines Zeichens für die Inhaltsgleichheit, Einführung eines solchen

#### **Die Function.**

§ 9. Erklärung der Wörter "Function" und "Argument". Functionen mehrer Argumente. Argumentsstellen. Subject, Object.

§ 10. Gebrauch der Buchstaben als Functionszeichen. "A hat die Eigenschaft  $\Phi$ ." "B steht in der  $\Psi$ -Beziehung zu A." "B ist Ergebnis einer Anwendung des Verfahrens  $\Psi$  auf den Gegenstand A." Das Functionszeichen als Argument

#### **Die Allgemeinheit.**

§ 11. Deutsche Buchstaben. Die Höhlung des Inhaltsstriches. Ersetzbarkeit der deutschen Buchstaben. Gebiet derselben. Lateinische Buchstaben

§ 12. Es giebt einige Dinge, die nicht\_\_\_ . Es gibt kein\_\_\_ . Es giebt einige\_\_\_ . Jedes. Alle. Ursächliche Zusammenhänge. Kein. Einige nicht. Einige. Es ist möglich, dass\_\_\_ .  
Tafel der logischen Gegensätze

### **II. Darstellung und Ableitung einiger Urtheile des reinen Denkens.**

§ 13. Nutzen der ableitenden Darstellungsweise

§ 14. Die ersten beiden Grundgesetze der Bedingtheit

§ 15. Folgerungen aus ihnen

§ 16. Das dritte Grundgesetz der Bedingtheit und Folgerungen

§ 17. Das erste Grundgesetz der Verneinung und Folgerungen

§ 18. Das zweite Grundgesetz der Verneinung und Folgerungen

§ 19. Das dritte Grundgesetz der Verneinung und Folgerungen

§ 20. Das erste Grundgesetz der Inhaltsgleichheit und Folgerung

§ 21. Das zweite Grundgesetz der Inhaltsgleichheit und Folgerungen

§ 22. Das Grundgesetz der Allgemeinheit und Folgerungen

### **III. Einiges aus einer allgemeinen Reihenlehre.**

§ 23. Einleitende Bemerkungen

§ 24. Die Vererbung. Verdoppelung des Urtheilsstriches. Kleine griechische Buchstaben

- § 25. Folgerungen
- § 26. Das Aufeinanderfolgen in einer Reihe
- § 27. Folgerungen
- § 28. Weitere Folgerungen
- § 29. „z gehört der mit x anfangenden f-Reihe an.“ Erklärung und Folgerungen
- § 30. Weitere Folgerungen
- § 31. Eindeutigkeit eines Verfahrens. Erklärung und Folgerungen.

### **Bibliografia**

Bochénski, Joseph Maria: *A History of Formal Logic*. Traduzido e editado por Ivo Thomas, New York: Chelsea Publishing Company, New York, 1970.

Carl, Wolfgang: *Frege's Theory of Sense and Reference. Its Origin and Scope*. Cambridge University Press, 1994.

Clark, J. T.: *Conventional Logic and Modern Logic. a prelude to transition*. Woodstock, Maryland: Woodstock College Press, 1952.

Dieudonné, Jean: The Tragedy of Grassmann, *Linear and Multilinear Algebra* **8** (1) (1979/80), 1-14.

Dummett, Michael: Frege: *Philosophy of Language*. Duckworth, 1973.

Frege, Gottlob: *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 5ª reimpressão da 2ª edição (1964). Com as observações de E. Husserl e H. Scholz. Editado por Ignacio Angelelli. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1998.

Frege, Gottlob: *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Fünf logische Studien. Editado e introduzido por Günther Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986.

Frege, Gottlob: *Kleine Schriften*. Editado por Ignacio Angelelli. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1967 e G. Olms, Hildesheim, 1967.

Frege, Gottlob: *Lógica e Filosofia da Linguagem*, com uma introdução de Paulo Alcoforado Cultrix/Edusp, São Paulo, 1978.

Frege, Gottlob: *Logische Untersuchungen*. Editado e introduzido por Günther Patzig. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.

Frege, Gottlob: *Nachgelassene Schriften*. Unter Mitwirkung von Gottfried Gabriel und Walburga Rödding bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1969.

Frege, Gottlob: *Os fundamentos da aritmética*, com uma introdução de Luiz Henrique Lopes dos Santos in Peirce-Frege: *Coleção Os Pensadores*, Abril Cultural, São Paulo, 1980a.

Frege, Gottlob: *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*, tradução e introdução de Luiz Henrique Lopes dos Santos in Peirce-Frege: *Coleção Os Pensadores*, Abril Cultural, São Paulo, 1980b.

Frege, Gottlob: *Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, LXXXI (1882), 48-56.

Gasser, James (Ed.): *A Boole Anthology. Recent and Classical Studies in the Logic of George Boole*. Dordrecht: Kluwer, 2000.

Grassman, Hermann: *Die Ausdehnungslehre von 1844*. Leipzig, Verlag von Otto Wigand. 1844.

Heijenoort, Jean van (Ed.): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. ToExcel, 1967. Reimpressão 2000.

Jourdain, Philip E. B.: *The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. XLIII, 1912, P. 219-314.

Kneale, William; Kneale, Marta: *O desenvolvimento da lógica*. Trad. de M. S. Lourenço. 3. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

Kutschera, Franz von: *Gottlob Frege, Eine Einführung in sein Werk*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1989.

Neto, Fernando Raul: *O Begriffsschrift de Frege*. Studium Revista de Filosofia, Recife – Pe., v. Ano 3, n.5-6, p.195-217, 2000.

Peacock, George: *A Treatise on Algebra, Vol. I, Arythmetical Algebra (1842). Vol. II, On Symbolical Algebra, and its Applications to the Geometry of Position. (1845)* Reprint 1940, New York: Scripta Mathematica.

**Fernando Raul Neto**  
Universidade Federal de Pernambuco  
Departamento de Filosofia

**E-mail:** feraneto@uol.com.br