DE ANDRONOV A PEIXOTO: A NOÇÃO DE ESTABILIDADE ESTRUTURAL E AS PRIMEIRAS MOTIVAÇÕES DA ESCOLA BRASILEIRA DE SISTEMAS DINÂMICOS

Tatiana Roque
UFRJ - Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2007)

Resumo

Abordamos, neste artigo, o período da história da Teoria dos Sistemas Dinâmicos que vai de meados dos anos 1930 ao início dos anos 1960, procurando investigar a gênese de conceitos e ferramentas que participaram da constituição deste novo domínio da matemática. Tratamos, em particular, da história da "estabilidade estrutural", noção que traduz a preocupação epistemológica com relação à validade das leis físicas e expressa o interesse dos matemáticos que fundaram a teoria em generalizar as definições e em classificar os sistemas dinâmicos. Mostramos que a definição da estabilidade estrutural é de fundamental importância nos trabalhos que se encontram no cruzamento da pesquisa realizada na antiga União Soviética, por Andronov e outros, e daquela que se desenvolveu no Brasil a partir dos anos 60, tendo em Peixoto um de seus precursores.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, estabilidade, caos, Peixoto, Andronov.

Abstract

This article deals with the history of Dynamical Systems Theory from 1930's to 1960's, investigating the genesis of concepts and tools that constituted this new domain of mathematics. We have special interest in the history of "structural stability," a notion that translates epistemological concerns about the validity of physical laws and also plays a role in the generalization of definitions and in the classification of Dynamical Systems. We show that the definition of structural stability is of great importance in the intersection of mathematical researches made in the former Soviet Union, by Andronov and others, and those developed in Brazil from the 60's onwards, which had Peixoto as a precursor.

Keywords: Dynamical Systems, stability, chaos, Peixoto, Andronov.

O domínio que ficou conhecido como “Teoria dos Sistemas Dinâmicos” ou “Teoria do Caos” ganhou grande repercussão durante os anos 90. Do ponto de vista da história da ciência, no entanto, são ainda raros os trabalhos que investigam seu advento. Em um artigo publicado em 2002 na revista *Historia Mathematica* [6], Amy-Dahan Dalmedico e David Aubin analisam alguns elementos que teriam colaborado diretamente para o sucesso deste novo campo de cruzamento de saberes que ficou conhecido como “Caos”. As condições materiais das ciências matemáticas (transformadas pela difusão dos meios eletrônicos); uma atenção renovada às relações entre realidades sócio-profissionais e discursos ideológicos (a substituição da concepção estrutural e axiomática tipicamente bourbakista por uma concepção da matemática mais voltada para seu papel social); a valorização do trabalho interdisciplinar (possibilitada por um contexto favorável tanto no âmbito das políticas científicas quanto do interesse de pesquisadores de diversas áreas); e, finalmente, a produção simbólica de uma nova imagem da ciência (contrapartida da necessidade de se questionar o papel da ciência em desvelar a ordem e a inteligibilidade da natureza). Tais seriam alguns dos fatores que teriam contribuído para uma explosão epistemológica das áreas relacionadas à “Teoria do Caos” que os autores analisam em suas dimensões histórica e social, propondo que, do ponto de vista historiográfico, há duas tensões em jogo: a tensão entre uma história de *longue-durée* e uma história analisada a partir de períodos de aceleração (quando as configurações sociais e intelectuais se transformam); e a tensão entre um ponto de vista local– voltado para uma determinada disciplina– e um ponto de vista global– que envolve disciplinas diversas e suas relações com o resto da sociedade.

Propomos, neste artigo, tratar de um período particular da história da Teoria dos Sistemas Dinâmicos (de meados dos anos 30 ao início dos anos 60), a partir de um ponto de vista local, que pretende investigar a gênese de conceitos, definições, ferramentas e teoremas que constituem um novo domínio em matemática.

O que chamamos hoje de “Teoria dos Sistemas Dinâmicos” se origina nos trabalhos sobre a análise qualitativa das equações diferenciais iniciados por Henri Poincaré no final do século XIX. Estes trabalhos foram retomados nos anos seguintes, de forma esparsa, por matemáticos de países distintos como Lyapunov, J. Hadamard e G.D. Birkhoff. Ainda que Birkhoff tenha sido o primeiro a cunhar o termo “Sistema Dinâmico”– para designar um problema relativo a equações diferenciais encarado de modo qualitativo, apenas nos anos 60 do século XX assistimos ao desenvolvimento de uma nova teoria matemática dos chamados “Sistemas Dinâmicos”.

Julgamos interessante, até pela nossa proximidade com o período em questão, investigar os conceitos e as noções que participam da constituição desta nova área. Na verdade, analisaremos em particular a história da “estabilidade estrutural”. O especial interesse desta noção está no fato de que ela relaciona a preocupação epistemológica sobre a validade das leis físicas à necessidade de expressá-la nos moldes da Teoria dos Conjuntos, que traduz matematicamente a motivação de generalizar as definições e de classificar os sistemas dinâmicos. Além disso, do ponto de vista histórico, a noção de estabilidade estrutural é de fundamental importância em trabalhos que estão nas origens da Teoria dos Sistemas Dinâmicos e que se encontram no cruzamento da pesquisa realizada na antiga União Soviética e daquela que veio a se desenvolver no Brasil a partir dos anos 60. Mais precisamente, nosso objetivo neste trabalho é analisar este período de transição das primeiras definições propostas por matemáticos soviéticos até os trabalhos que impulsionaram o desenvolvimento da pesquisa brasileira em Sistemas Dinâmicos.

Começaremos pelos trabalhos soviéticos que surgiram de motivações expressas por Andronov, para analisar, em seguida, as primeiras contribuições da escola brasileira, sobretudo com o trabalho de Mauricio Peixoto. Utilizaremos artigos científicos e os poucos trabalhos históricos que mencionam a estabilidade estrutural. Além disso, os relatos de matemáticos que participaram ativamente no desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, como Peixoto, serão de grande valia, pois testemunham de motivações que permanecem, muitas vezes, implícitas no seio de seus artigos científicos.

1. O trabalho dos soviéticos sobre os osciladores e a matematização dos fenômenos físicos

Durante os anos 30, enquanto no Ocidente predominavam as visões formalistas sobre a matemática, na União Soviética, eram afirmadas motivações mais voltadas para problemas aplicados. Independente dos motivos políticos desta preferência, era um fato naquele país o especial interesse por problemas matemáticos ligados à física. Podemos concluir isto a partir do testemunho de L.S. Pontryagin, um dos protagonistas de nossa história, ao relatar um momento especial de sua trajetória científica:

"A alegria com o sucesso no trabalho científico não poderia abafar uma ansiedade gradualmente crescente. (...) Esta ansiedade era intensificada pela opinião geral, que se formava gradualmente nos círculos matemáticos da universidade. Muitas pessoas estavam dizendo que era preciso não se dedicar somente à matemática pura, sem considerar as aplicações. Em conversas com amigos, eu também comecei a exprimir esta opinião. Um dia, então, creio que em 1932, um jovem físico chamado Aleksandr Aleksandrovich Andronov, que eu não conhecia até então, veio ao meu apartamento sem nenhum aviso. Ele me disse que tinha ouvido falar sobre meu desejo de trabalhar com problemas aplicados em matemática, e disse que queria me dizer algo. Foi através dele que eu ouvi pela primeira vez o que é um espaço de fases, o que são ciclos limite, e outras coisas assim. (...) Andronov não era apenas um eminente cientista, mas também uma pessoa extraordinária. Parecia que sua principal característica era um senso de responsabilidade por tudo que acontecia em nosso país. Meu conhecimento dele e sua influência sobre mim, colocaram meus interesses matemáticos em uma nova direção. Isto acabou por prevalecer e eu abandonei meu trabalho sobre problemas matemáticos abstratos" [23][1].

Veremos mais adiante que um artigo escrito por Pontryagin em conjunto com Andronov será responsável pela primeira definição de estabilidade estrutural. Mas vejamos brevemente em que contexto o ponto de vista qualitativo sobre as equações diferenciais se fez presente na escola soviética. Para uma história parcial das origens da Teoria dos Sistemas Dinâmicos na União Soviética, indicamos o artigo de Simon Diner "Les voies du

[1]Tradução da autora. Pontryagin lembra ainda que esta atitude não foi bem vista inicialmente pelos matemáticos mais antigos. Os estudos que se seguiram sobre problemas aplicados, inspirados por Andronov, foram criticados até por Kolmogorov que, contudo, passará a valorizá-los alguns anos depois.

chaos déterministe dans l'école russe" [10]. Aprendemos aí que a Escola de Mandelshtam defendia que a teoria das vibrações seria a linguagem comum da física.
Com inspiração em A.N. Whitehead, afirmava-se que o nascimento da física está ligado à aplicação da idéia abstrata de periodicidade aos fenômenos concretos. Sua escola tinha como motivação constituir um pensamento físico não-linear que, a partir de uma teoria matemática rigorosa, unificasse os fenômenos não-lineares. Desta escola faziam parte, entre outros, A.A. Andronov, A.A. Vitt e S.E. Khaikin, autores de uma obra chave para compreendermos as motivações da definição de estabilidade estrutural.
Andronov irá se instalar, em um segundo momento, em Gorki, onde funda uma escola voltada para o estudo das oscilações não-lineares, em especial aquelas que são mantidas por uma fonte de energia não vibratória, denominadas auto-oscilações. Estas pesquisas partiam da condição de que os movimentos periódicos devem ser estáveis sob variações suficientemente pequenas de certos parâmetros da definição do sistema.
Sob forte influência de Poincaré, Lyapunov e Birkhoff, a escola de Gorki se dedica à teoria qualitativa das equações diferenciais[2]. Em 1933, Andronov publica um trabalho sobre bifurcações, mostrando a mudança qualitativa sofrida por um sistema dinâmico quando variamos alguns dos seus parâmetros[3]. Alguns anos mais tarde, em 1937, como resultado desta pesquisa realizada na escola de Gorki, Andronov publica dois de seus trabalhos mais importantes e conhecidos. Um artigo, com Pontryagin, publicado em francês, intitulado "Systèmes grossiers" [1] e o livro *Teoriya Kolebanii* [3], escrito em russo com Vitt e Khaikin, do qual também utilizamos uma tradução para o inglês *Theory of Oscillators* [4].
Pela clareza com que o ponto de vista epistemológico dos autores é aí exposto, abordaremos inicialmente o livro, para analisar, em seguida, as definições matemáticas propostas no artigo. A principal motivação para a definição da estabilidade estrutural tem como base a diferença de natureza entre um sistema físico e o objeto matemático que o modela: "Uma certa idealização do problema não pode ser evitada, com o objetivo de construir um modelo matemático do sistema físico" [4][4].
Andronov, Vitt e Khaikin prosseguem a introdução da Teoria das Oscilações afirmando que todas as propriedades que atribuímos freqüentemente aos sistemas físicos são, de fato, propriedades de suas "idealizações". Não podemos falar de um sistema real que seja dissipativo ou conservativo, linear ou não-linear; estas propriedades pertencem a uma idealização deste sistema. Mais precisamente, uma idealização é constituída pelo modelo matemático obtido quando colocamos determinadas questões sobre o sistema físico.
Deste modo, a idealização deve incluir a pergunta que fazemos sobre um sistema real. Uma mesma realidade física pode ser idealizada por um modelo linear ou não-linear, conservativo ou dissipativo, sendo estas propriedades idealizadas segundo a questão que

---

[2]Sobre os trabalhos de outros matemáticos desta escola e a influência do ponto de vista de Andronov, ver o artigo de Anosov [5].
[3]Esta situação hoje é conhecida como *bifurcação de Hopf*, devido ao matemático alemão E.Hopf, cujo trabalho redescobre este fenômeno independentemente e o generaliza para dimensões maiores.
[4]No original, escrito em russo, a palavra usada é "*modeli*" e cabe ressaltar que o uso da palavra *modelo* neste momento é surpreendente do ponto de vista histórico. Para uma análise das origens e mudanças de significado deste termo, indicamos o artigo de Martin Zerner [30] que, no entanto, não mencionam os autores soviéticos aos quais nos dedicamos aqui. Agradecemos ao próprio Martin Zerner pela leitura conjunta da publicação original em russo do livro *Teoriya Kolebanii*.

colocamos sobre o sistema real. É preciso saber, portanto, quais são as questões mais significativas a serem formuladas, lembrando que é adotado um ponto de vista qualitativo sobre as propriedades do sistema.

Influenciados diretamente pelos trabalhos de Poincaré e Birkhoff, os autores partem da análise de certos movimentos especiais que permitem reduzir uma descrição em tempo infinito a uma análise em um intervalo de tempo finito: os movimentos estacionários. Este tipo de movimento terá um papel centralizador, ou organizador, na descrição dos movimentos que têm lugar em sua vizinhança, pois o movimento estacionário será o estado limite para o qual um sistema deve tender assintoticamente. No caso em que temos apenas um grau de liberdade, estes movimentos são pontos de equilíbrio ou movimentos periódicos mas, para dimensões maiores, podem ser movimentos contendo um tipo mais brando de recorrência.

É importante ressaltar que a maioria dos objetos matemáticos que aparecem no estudo qualitativo, tinha sido definida, até este momento, para o caso de sistemas conservativos, pois este estudo foi motivado inicialmente pelos problemas da mecânica celeste. Pela própria natureza dos casos tratados pelos soviéticos, oriundos de problemas de física aplicada à engenharia, várias destas noções serão redefinidas para sistemas dissipativos[5].

Admitindo, com os autores soviéticos, que os modelos são idealizações, surge naturalmente a pergunta: como garantir que as respostas que obtemos para os modelos fornecem informações efetivas sobre o sistema físico?

Para obter uma resposta, é necessário investigar as propriedades que devem ser impostas ao modelo para que possamos, a partir dele, obter uma resposta razoável para a pergunta que colocamos sobre o sistema físico que deu origem a este modelo. Para Andronov e os co-autores do livro sobre as oscilações, os movimentos estacionários possuem um interesse especial, pois permitem analisar as propriedades dos modelos que tornam as respostas as mais verossímeis possíveis. É preciso, portanto, voltar-se para a própria natureza e escolher as propriedades essenciais, e reconhecíveis, dos movimentos estacionários. Ora, por definição, um movimento deste tipo permanece sobre si mesmo após um intervalo de tempo arbitrário, mesmo que ele seja submetido a perturbações aleatórias inevitáveis. No pior dos casos, uma perturbação poderá transformar um movimento estacionário em um movimento bastante próximo.

Do mesmo modo, para que as informações sobre um sistema físico sejam legítimas, ainda que obtidas a partir de soluções do modelo concebido como idealização deste sistema, suas soluções devem ser resistentes a perturbações. Esta exigência diz respeito também à possibilidade de verificação experimental. Comparando as respostas fornecidas pela análise do modelo com os resultados de um experimento, podemos julgar se a idealização é legítima. Para isto, exige-se que o modelo resista a pequenas perturbações uma vez que as propriedades físicas do experimento não podem ser reproduzidas de maneira exata. Estas perturbações podem ter lugar em dois níveis distintos: nas coordenadas de movimentos especiais definidos por um certo modelo; ou na própria definição do modelo. Os autores

---

[5]Por exemplo, nos problemas relativos às oscilações forçadas, temos movimentos periódicos em situações distintas daquelas que encontramos na mecânica celeste, como o é o caso dos ciclos limite, descobertos inicialmente por Van der Pol e, mais tarde, por Andronov. Para maiores detalhes sobre a história da matematização destes problemas ver [11].

soviéticos afirmam enfaticamente que os aspectos do comportamento de um modelo que não resistem a estes dois tipos de perturbação não possuem nenhum interesse físico.

Considerando que o modelo a que nos referimos aqui é uma equação diferencial, o primeiro tipo seria uma perturbação **de** trajetórias **no** conjunto de trajetórias. Por exemplo, uma solução periódica, considerada em si mesma (abstraindo-a do conjunto de trajetórias) é trivialmente estável, pois retorna à sua posição inicial, como havia sido definido por Poincaré [20]. O próprio Poincaré define também um tipo mais brando de estabilidade, quando a trajetória retorna à vizinhança de sua posição inicial [21]. Se levarmos em conta que uma trajetória está imersa no conjunto de trajetórias, Lyapunov propôs que ela seja dita “estável” se, perturbando sua condição inicial, obtivermos uma outra trajetória que permaneça próxima durante um intervalo de tempo arbitrário [13].

Como já dissemos, a pesquisa em sistemas dinâmicos fora inspirada, até então, pelos problemas da mecânica celeste, em particular pelo problema da estabilidade do sistema solar, no qual a configuração dos astros pode sofrer perturbações em virtude da atração de um outro astro, ou pelo problema da estabilidade de equilíbrio de um fluido em rotação. Do estudo destes problemas, surgem as diversas definições de estabilidade colocados **no** conjunto de trajetórias, nas quais investiga-se o comportamento de uma trajetória individual ou o comportamento de trajetórias vizinhas a uma trajetória dada[6]. Em todos estes casos, as perturbações só podem se dar no domínio das soluções da equação, jamais sobre a forma da equação propriamente dita. Ou seja, as definições tradicionais de estabilidade colocavam-se no âmbito das trajetórias.

Mas lembramos que a perturbação pode se dar em um outro nível, isto é, na forma da equação diferencial propriamente dita. Nosso objetivo aqui é, portanto, definir a estabilidade como uma propriedade **do** conjunto de trajetórias, questão que se coloca em um contexto distinto das definições de estabilidade **no** conjunto de trajetórias.

Considerando-se o conjunto de trajetórias definido por um certo sistema, queremos saber se este conjunto é “estável” após uma perturbação do sistema e veremos qual o significado atribuído a este conceito neste novo contexto.

Tendo sido motivados por um novo campo de aplicabilidade– as oscilações forçadas– a originalidade do trabalho dos soviéticos está justamente em colocar o problema da estabilidade também no nível das equações:

“Para que os processos estacionários existam por longo tempo em um sistema real, eles devem ser estáveis não apenas com respeito a pequenas variações das coordenadas e das velocidades, mas também com respeito a pequenas variações na própria forma das equações diferenciais que descrevem o sistema” [4][7].

Concretamente, preservar a forma das equações diferenciais, não significa tratar de um problema algébrico, relativo ao modo como estas equações são escritas. Admitindo que esta forma possa variar, deseja-se investigar a modificação produzida no conjunto de soluções desta equação diferencial. Uma variação da equação produz uma perturbação **do** conjunto de trajetórias definido por esta equação que não deve alterar significativamente o aspecto global deste conjunto.

---

[6] Para um estudo histórico destas definições no contexto dos problemas que as motivaram ver [26] e [27].

[7] Tradução da autora.

Dito isto, será necessário investigar o que quer dizer, matematicamente, "não alterar significativamente o aspecto global do conjunto de trajetórias". Como afirmar que, após uma perturbação, o conjunto de trajetórias obtido mantém-se "parecido" com o original? O que quer dizer ser "parecido" neste contexto?

Estas perguntas são respondidas no artigo escrito conjuntamente por Andronov e Pontryagin, no mesmo ano de 1937, empregando-se a noção de homeomorfismo (sem a utilização desta nomenclatura). Dois conjuntos de trajetórias são "parecidos" quando podem ser transformados um no outro por um homeomorfismo próximo da identidade que leve cada trajetória de um conjunto em uma trajetória do outro[8].

Os autores trabalham com o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) + p(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y+q(x,y) \end{cases}$$

Onde P, Q, p e q são todas funções analíticas de x e y; e p e q são tidas como pequenas perturbações de P e Q.

Diz-se que um sistema é "*grossier*" ("grosseiro") em uma região G se, qualquer que seja η, existe ε tal que, para todas as funções p e q possuindo (bem como suas primeiras derivadas) módulo menor que ε, existe uma transformação biunívoca e bicontinua da região G nela mesma, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) nesta região, os pontos transformados estão a uma distância menor que η dos pontos originais;

(ii) os pontos de uma mesma trajetória do sistema não perturbado correspondem a uma mesma trajetória do sistema perturbado.

Esta definição equivale a dizer que o conjunto de trajetórias em G é transformado por um homeomorfismo próximo da identidade[9]. Logo, um sistema é "*grossier*" se uma perturbação na definição do sistema mantém suas trajetórias, a menos de um homeomorfismo. Ou seja, o conjunto de trajetórias não é alterado significativamente quando seu aspecto topológico não se altera[10].

A equivalência via homeomorfismo é principalmente uma escolha das propriedades consideradas importantes de se preservar[11]. O adjetivo "*grossier*" corresponde, no dizer dos próprios autores, à situação em que a "estrutura qualitativa" do conjunto de trajetórias do sistema não é alterada por perturbações. Esta observação provavelmente inspirou a denominação que será mais tarde empregada para a *grossièreté* de um sistema pois, como veremos na seção seguinte, esta propriedade será chamada de *estabilidade estrutural*.

8Em particular, esta transformação preserva a orientação das trajetórias e não altera a estrutura do espaço.

9Na verdade, C^0-próximo.

10Cabe lembrar que os trabalhos de Pontryagin, anteriores ao encontro com Andronov, eram dedicados à topologia, e ele sabia perfeitamente as restrições que a utilização de uma transformação com mais estrutura poderia impor ao problema.

11Voltaremos a falar de como a exigência da *grossièreté* de um sistema, no domínio dos sistemas, pode ser entendida a partir da necessidade de classificação. Se quisermos construir uma classificação razoável, que não contenha excessivas classes, os elementos de cada classe não devem ser *finos* ao ponto de se tornarem patológicos, ou seja, uma perturbação do sistema deve deixá-lo na mesma classe.

Ainda no artigo de 1937, os autores observam que a definição da "*grossièreté*" de um sistema pode ser considerada como uma definição de estabilidade para um conjunto de trajetórias de um sistema dinâmico em relação a variações suficientemente pequenas na definição do sistema. Em seguida, Andronov e Pontryagin estabelecem quais são as características de um sistema plano que é "*grossier*". Retornaremos mais adiante a estas condições.

Gostaríamos de ressaltar que a definição de estabilidade proposta pelos soviéticos prima pela simplicidade e pela facilidade com que pode ser estendida a dimensões superiores. Esta definição pode parecer natural atualmente, mas no processo histórico ela significou uma inovação importante. Em se tratando de novas definições em matemática, este não é um caso isolado pois, em muitos exemplos, uma vez estabelecidas, definições matemáticas importantes podem soar como eternas.

2. A formalização da estabilidade estrutural e a difusão deste conceito no Ocidente

A introdução dos trabalhos dos autores soviéticos nos Estados Unidos, deveu-se sobretudo a Solomon Lefschetz, matemático russo que trabalhava neste país e que, antes da Segunda Guerra Mundial, já conhecia e admirava os trabalhos de Pontryagin em topologia, chegando a considerá-lo um dos maiores topólogos do mundo[12]. Por motivos distintos de Pontryagin, Lefschetz também iria mudar as orientações de sua pesquisa, que era dedicada, inicialmente, a problemas de matemática pura. Para mais detalhes sobre a trajetória de Lefschetz, suas relações com os esforços de guerra americanos, e seu papel no desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos nos EUA, ver o artigo de Amy-Dahan Dalmedico, "La renaissance des systèmes dynamiques aux Etats-Unis après la Deuxième Guerre Mondiale: l'action de Solomon Lefschetz" [7]. A primeira tradução para o inglês do livro Teoria das Oscilações, de Andronov, Vitt e Khaikin, aparece em 1949 sob a direção de Lefschetz [2], no entanto, esta tradução exclui a introdução que citamos na seção anterior, na qual os autores soviéticos justificavam a importância de um sistema ser resistente a perturbações. Mas deve-se ao próprio Lefschetz a denominação da propriedade de "*grossièreté*" de um sistema como "estabilidade estrutural ("*structural stability*").

Sob a orientação de Lefschetz, em 1952, um aluno seu chamado De Baggis retoma alguns aspectos do artigo de Andronov e Pontryagin. A citação abaixo mostra que o ponto de vista de Andronov, e dos outros pesquisadores soviéticos que escreveram com ele, foi difundido entre os alunos de Lefschetz:

> "For physical systems to perform certain operations they must, if they are to be useful, posses a certain degree of stability. (...) The stability requirements of experiments provide a clue to the restrictions a mathematician should place on his nonlinear problems. (...) The "essential features" of systems to be preserved under small perturbations are described mathematically by the topological character of the phase portrait" [9].

No artigo de 1937, Andronov e Pontryagin propuseram que uma primeira condição necessária para a estabilidade estrutural era a de que as singularidades e as soluções

[12]Ver palestra proferida por E.F. Mishchenko na conferência internacional realizada em Moscou em 1998, para celebrar os 90 anos de nascimento de Pontryagin [14].

periódicas fossem hiperbólicas[13]. Afirmavam, em seguida, como uma segunda condição necessária, que não deviam existir trajetórias ligando duas singularidades de tipo colo (ditas também de tipo “sela”). Sem proceder a uma demonstração, os autores usavam a classificação dos tipos de trajetórias de um sistema plano com singularidades isoladas (que conhecemos hoje como “Teorema de Poincaré-Bendixson”) e a noção de estabilidade de Lyapunov para justificar serem estas condições necessárias e suficientes para a estabilidade estrutural.

De Baggis demonstra, em 1952, que as condições propostas por Andronov e Pontryagin caracterizam efetivamente os sistemas estruturalmente estáveis no disco em R^2. Inicialmente, considerava-se que o sistema diferencial era definido por um campo de vetores analítico, ao passo que esta demonstração supõe apenas que o campo[14] seja C^1.

Maurício Peixoto, importante matemático brasileiro, também trabalhou com Lefschetz em Princeton, tendo confirmado, em entrevista concedida à autora, que houve grande influência dos soviéticos sobre esta escola nos EUA. Quando ainda trabalhava na Escola de Engenharia, por volta de 1955, Peixoto teve contato com o trabalho de De Baggis e, através dele, com o problema da estabilidade estrutural, o que despertou seu interesse para ir a Princeton em 1957.

Em 1959, Peixoto publica um artigo fundamental na história da Teoria dos Sistemas Dinâmicos chamado “On Structural Stability” [16]. Neste trabalho, é apresentada uma definição da estabilidade estrutural um pouco distinta daquela que fora proposta por Andronov e Pontryagin, que será generalizada para sistemas em dimensão qualquer. Em meados do século XX, por inspiração do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, predominava, na matemática, a tentativa de classificação de seus objetos, com ênfase em suas estruturas e na definição de relações de equivalência entre eles[15]. Esta preferência deixava à margem as pesquisas sobre equações diferenciais, inclusive as realizadas por Poincaré. Peixoto intuiu, então, que era preciso expressar esta teoria com base na Teoria dos Conjuntos, e a noção de estabilidade estrutural seria o primeiro passo para esta nova formulação. A importância da classificação das equações diferenciais não havia passado despercebida a Poincaré, como o próprio Peixoto menciona. Contudo, a matemática ainda não oferecia as ferramentas para que esta motivação fosse expressa em bases rigorosas. É verdade que Poincaré já considerava implicitamente um conjunto de sistemas, ao dizer, por exemplo que um certo tipo de sistema é “excepcional”; ao afirmar múltiplas vezes seu interesse pelo estudo da “maioria” dos sistemas dinâmicos; ou ainda, ao estudar as “bifurcações” produzidas pela variação dos parâmetros contidos nas equações usadas na investigação das figuras de equilíbrio de um fluido. No entanto, sem a noção de espaços funcionais, nenhuma destas intuições poderia encontrar sua contrapartida matemática adequada, o que só poderá acontecer somente em meados do século XX.

---

[13]Notamos que esta nomenclatura não era empregada.

[14]A condição de ser C^1 é a melhor que podemos esperar pois, se for C^0, nenhum sistema dinâmico com singularidade poderá ser estruturalmente estável. Ou seja, esta condição seria forte demais para o tipo de fenômenos que queremos estudar.

[15]As informações deste e do próximo parágrafo seguem o testemunho do próprio Maurício Peixoto em entrevista concedida à autora [18].

Peixoto afirma que, ao partir para Princeton, estava convencido de que, para se aprofundar nos resultados propostos por Andronov e Pontryagin, era preciso adotar o ponto de vista dos espaços funcionais. Chegando aos Estados Unidos, durante um seminário, passou a explicar como isto deveria ser feito, ao que Lefschetz reagiu observando que, a partir dali, poder-se-ia colocar todo tipo de questão sobre a estabilidade estrutural.

O matemático brasileiro passa a considerar o problema no espaço funcional dos sistemas dinâmicos de classe C^1. Em um primeiro momento, ele considera sistemas tal como definidos pelos soviéticos, ou seja, definidos em D^2, entrando transversalmente na fronteira desta região e demonstra ser desnecessária a condição (i) exigida no artigo de Andronov e Pontryagin (a exigência de que o homeomorfismo fosse próximo da identidade). A estabilidade estrutural é definida apenas pela existência de um homeomorfismo que leve trajetórias do sistema nas trajetórias do sistema perturbado e, ainda no mesmo artigo, esta definição é estendida para um disco *n*-dimensional. Estabelecia-se, deste modo, o espaço dos sistemas dinâmicos (definidos no disco) e uma relação de equivalência neste espaço (equivalência topológica).

Com a nova definição, o subconjunto dos sistemas estruturalmente estáveis passa a ser visto como um aberto no conjunto dos sistemas dinâmicos. Seguindo os objetivos do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, restava ainda o problema de classificar os sistemas dinâmicos, ou seja, descrever as classes de equivalência do espaço dos sistemas no interior das quais todos os sistemas seriam estruturalmente estáveis. No entanto, este problema é, em geral, intratável, mas um primeiro passo está na verificação da densidade dos sistemas estruturalmente estáveis no espaço dos sistemas dinâmicos.

3. A compreensão global dos Sistemas Dinâmicos e os passos posteriores da pesquisa

No universo dos sistemas definidos no disco bidimensional, que era o caso tratado no artigo dos soviéticos, Peixoto conseguiu demonstrar que os sistemas estruturalmente estáveis são densos. Isto quer dizer que, dado um sistema qualquer neste espaço, há, em sua vizinhança, um sistema estruturalmente estável. Segundo o ponto de vista exposto na primeira seção, o sistema ser estruturalmente estável é uma condição de possibilidade de que ele possa constituir um modelo para um sistema físico. A densidade é, neste sentido, a propriedade que garante que esta condição é factível pois, se partimos de um sistema que não é estruturalmente estável, é possível perturbá-lo para obter um outro que possua esta propriedade e restabeleça a condição de modelização.

Em 1958, ainda em Princeton, Peixoto é apresentado a Steve Smale, matemático americano que viria a ser um dos personagens principais no desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Quando Peixoto comunica seus resultados a Smale, este sugere imediatamente que eles sejam generalizados para sistemas definidos na esfera. No início dos anos 60, já de volta ao Brasil e trabalhando no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Peixoto passa a se dedicar aos sistemas definidos em uma variedade compacta bidimensional qualquer. Neste mesmo período, Smale também está em visita ao IMPA e busca formular uma generalização das principais definições para dimensões superiores.

Para colocar a questão da estabilidade estrutural em dimensão maior que dois é de fundamental importância a reformulação do problema proposta por Peixoto em um artigo de 1962 [17]. O universo das equações diferencias, ou o espaço dos fluxos definidos em uma variedade de dimensão qualquer, passa a ser encarado como um espaço de Banach β (se o sistema é definido em uma variedade compacta), o que permitirá tratar matematicamente as questões de abertura e densidade dos estruturalmente estáveis neste espaço. O autor investiga como o subconjunto Σ dos sistemas estruturalmente estáveis está mergulhado em β, demonstrando, por exemplo, para dimensão qualquer, que Σ é um cone com uma quantidade enumerável de componentes conexas[16].

Neste mesmo artigo, voltando-se novamente para o caso bidimensional e utilizando a topologia C^r, Peixoto dedica-se a provar que as condições de Andronov e Pontryagin caracterizam completamente os sistemas estruturalmente estáveis. Estas condições são: toda trajetória tende para uma singularidade ou para uma trajetória fechada, sendo tais trajetórias hiperbólicas e em número finito; e não há trajetórias conectando dois pontos de sela. Além disso, os estruturalmente estáveis formam um conjunto aberto e denso no universo dos sistemas e Peixoto declara, então, que eles são "genéricos".

Lembramos que os autores soviéticos analisaram uma situação em que o Teorema de Poincaré-Bendixson podia ser aplicado. Este teorema classifica o comportamento de todas as trajetórias afirmando que elas tendem para uma singularidade ou para uma trajetória fechada. Mas isto só vale para sistemas definidos na esfera cujas singularidades são isoladas. No caso geral de sistemas definidos em variedades de duas dimensões não se sabe quais são os conjuntos limites possíveis para onde tendem as trajetórias. Estes conjuntos limites devem ser compostos de movimentos que possuam algum tipo de recorrência. Podemos dizer então, grosso modo, que para saber se os conjuntos limites compostos de trajetórias periódicas são densos, devemos investigar se, ao se perturbar um movimento recorrente, podemos "fechá-lo", gerando uma trajetória periódica. A este problema, que é introduzido no artigo de Peixoto sem ser demonstrado, refere-se um resultado muito importante da teoria, chamado "*Closing Lemma*". Na verdade, Peixoto se serve de um resultado um pouco mais fraco que ele crê bastar para demonstrar seu teorema principal sobre a densidade. No entanto, percebeu-se mais tarde que este resultado não valia para superfícies não-orientáveis, o que invalida o teorema de Peixoto sobre a abertura e a densidade dos estruturalmente estáveis em uma variedade bidimensional qualquer[17].

Nos casos em que a demonstração da densidade permanece válida, isto é, para fluxos em variedades compactas bidimensionais orientáveis, temos um quadro global do comportamento dos sistemas que é bastante satisfatório. Isto por dois motivos: porque os estruturalmente estáveis são bem caracterizados pelas condições de Andronov e Pontryagin; e porque, sendo densos, os estruturalmente estáveis podem aproximar qualquer sistema. Quanto ao problema de classificação, se ele era intratável no espaço de todos os sistemas,

---

[16]Tal resultado decorre do teorema de aproximação de Weierstrass. Como o conjunto dos sistemas definidos por polinômios com coeficientes racionais é denso em Σ, conclui-se que em cada componente conexa devemos ter um representante deste tipo de sistema. Se as componentes conexas fossem não enumeráveis, existiria alguma componente não contendo nenhum sistema definido por polinômios deste tipo.

[17]Charles Pugh, matemático americano que visitou o IMPA várias vezes e comunicou este erro a Peixoto, demonstrou, em 1967, o *Closing Lemma* na topologia C^1, ver [24] e [25]. Para a topologia C^r com *r>1* o problema é complexo e deu origem a um vasto campo de pesquisas.

ele se torna bem mais viável no subconjunto dos sistemas estruturalmente estáveis[18]. Sendo aberto e denso, podemos dizer que este conjunto é "grande" no espaço de todos os sistemas ou, em um certo sentido, que "quase todos" os sistemas são tratáveis. Como diz Peixoto, um subconjunto aberto e denso é "genérico" no universo onde ele habita.

Uma compreensão satisfatória dos sistemas dinâmicos, a exemplo do resultado de Peixoto, exige três procedimentos:

(i) uma caracterização de um certo tipo de sistema;

(ii) a demonstração de que os sistemas deste tipo são robustos;

(iii) a demonstração de que o subconjunto de sistemas deste tipo é genérico no conjunto de todos os sistemas.

Sublinhamos que a "robustez" é traduzida matematicamente, neste momento, pela estabilidade estrutural. Para a situação bidimensional, temos uma caracterização forte dada pelo resultado de Peixoto, resta saber o que acontece para dimensão qualquer. Este será o ponto de partida dos famosos trabalhos de Smale, que se dedicará à formulação de novas conjecturas de "genericidade". Após o primeiro encontro com Peixoto, Smale irá se dedicar a estender o resultado de genericidade para dimensões superiores e sua experiência anterior em Topologia deixava-o bastante otimista.

Peixoto já havia postulado que, para estender a caracterização da estabilidade estrutural para dimensão maior que dois, era necessário acrescentar uma condição às propriedades propostas por Andronov e Pontryagin, a fim de que o sistema tenha um comportamento global simples, parecido com o descrito pelo Teorema de Poincaré-Bendixon em duas dimensões. Sistemas deste tipo (sem trajetórias recorrentes e conjuntos minimais não triviais) viriam a ser chamados "Morse-Smale". Smale conjectura então que "quase todos" os sistemas dinâmicos são de tipo "Morse-Smale". Isto é, o subconjunto dos sistemas deste tipo seria aberto e denso no conjunto de todos os sistemas dinâmicos.

Logo após sua chegada ao Rio de Janeiro, em 1959, Smale recebe uma carta de Levinson dizendo que sua conjectura não podia ser verdadeira. Smale percebe seu erro mas não se desanima, propondo outras conjecturas de genericidade com definições menos restritivas. Em uma nota autobiográfica chamada "Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio"[19], Smale atribui esta parte de seu trabalho à sorte de estar no IMPA, por volta de 1960, onde confluíram tradições históricas diversas em dinâmica, que, apesar de lidarem com o mesmo assunto, faziam-no de forma isolada. A saber, são três estas tradições: Cartwright-Littlewood-Levinson; Poincaré-Birkhoff; e, finalmente, os trabalhos sobre a estabilidade estrutural dos autores soviéticos, de que ele tomou conhecimento através de Peixoto.

Diante da limitação intrínseca de sua conjectura inicial sobre a genericidade dos sistemas estruturalmente estáveis, Smale e outros colegas percebem que é preciso redefinir os três itens (citados anteriormente) necessários para uma compreensão global dos sistemas dinâmicos. Estas redefinições passam por diversas etapas, inicialmente de cunho

[18] Como nosso objetivo é traçar a história da estabilidade estrutural, não falaremos aqui de resultados que decorreram do artigo de Peixoto e que concernem o estudo das possíveis classes e do complementar dos estruturalmente estáveis. Para uma descrição de diversos problemas correlatos aos trabalhos de Peixoto que se desenvolveram no IMPA no início dos anos 60 ver [29].

[19] A nota foi apresentada em uma conferência realizada em 1996, no IMPA, na comemoração do aniversário de 45 anos do CNPQ e uma versão ampliada foi publicada em 1998 [28].

topológico, mas que culminam com uma conjectura recente de Jacob Palis propondo uma nova compreensão global dos sistemas dinâmicos em termos estocásticos[20]. Independente dos resultados, estas redefinições dos critérios de "robustez" e "genericidade" motivarão a pesquisa em sistemas dinâmicos por diversos anos e constituirão um impulso fundamental no desenvolvimento da escola brasileira.

Não continuaremos analisando o que aconteceu depois[21], pois nosso objetivo era chegar até as primeiras motivações da pesquisa em sistemas dinâmicos que se desenvolveram no IMPA a partir dos anos 60.

Bibliografia

[1] ANDRONOV, A., PONTRYAGIN, L. 1937. Systèmes Grossiers. *Doklady Akademi Nauk SSSR*, (5), pp. 247–250.

[2] ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., KHAIKIN, S. E. 1949. *Theory of Oscillations*. Princeton, Princeton University Press. Trad. N. Goldskaja, Ed. Solomon Lefschetz.

[3] ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., KHAIKIN, S. E. 1959. *Teoriya Kolebanii*. Moscou, Fizmatgiz. Republicação do original de 1937.

[4] ANDRONOV, A. A., VITT, A. A., KHAIKIN, S. E. 1966. *Theory of Oscillators*. Oxford, Pergamon Press. Trad. F. Immirzi.

[5] ANOSOV, D. V. 1986. Structurally Stable Systems. *Proceedings os the Steklov Institute os Mathematics*, , pp. 61–95.

[6] AUBIN, D., DAHAN-DALMEDICO, A. 2002. Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: *Longue Durée* and Revolution, Disciplines and Cultures. *Historia Mathematica*, , pp. 273–339.

[7] DAHAN DALMEDICO, A. 1994. La renaissance des systèmes dynamiques aux États-Unis après la Deuxième Guerre Mondiale: l'action de Solomon Lefschetz. *Rendiconti dei circolo matematico di Palermo (II)*, , pp. 133–166.

[8] DAHAN DALMEDICO, A., CHABERT, J.-L., CHEMLA, K. 1992. *Chaos et déterminisme*. Points Sciences. Paris, Seuil.

[9] DE BAGGIS, H. F. 1952. Dynamical systems with stable structures. *Annals of Mathematics Studies*, (29), 37–59. In: [12].

[10] DINER, S. 1992. *Les voies du chaos déterministe dans l'école russe*. In: [8], pp.331-370.

[11] ISRAEL, G. 1996. *La mathématisation du réel*. Paris, Seuil.

[12] LEFSCHETZ, S. 1952. *Contributions to The Theory Of Nonlinear Oscilations II*. Annals of Mathematics Studies. Princeton, Princeton University Press.

[13] LYAPUNOV, A. M. 1907. Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse (2)*, , pp. 203–474. Tradução francesa por Edouard Davaux. Versão francesa reimpressa por Jacques Gabay, Paris, 1988.

[14] MISHCHENKO, E. F. 1999. A Few Words About L. S. Pontryagin And His Scientific Activity. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, , pp. 1–7.

[20] Para uma descrição das conjecturas que se seguiram a de Smale até a nova proposição de Palis, ver [15]

[21] Fazemos isto brevemente em [26].

[15] PALIS, J. 2000. A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. *Astérisque*, , pp. 339–351.
[16] PEIXOTO, M. 1959. On Structural Stability. *Annals of Mathematics*, , pp. 199–222.
[17] PEIXOTO, M. 1962. Structural Stability on Two-dimensional Manifolds. *Topology*, , pp. 101–120.
[18] PEIXOTO, M. 2000. *Entrevista realizada no Instituto de Matemática Pura e Aplicada-RJ*.
[19] PIETROCOLA, M., FREIRE JR., O. 2005. *Filosofia, Ciência e História: Michel Paty e o Brasil, uma homenagem aos 40 anos de colaboração*. São Paulo, Discurso Editorial-Fapesp.
[20] POINCARÉ, H. 1885. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (3^e partie). *Journal de Mathématiques (4^e série)*, . In: [22], t.I, pp. 90-158.
[21] POINCARÉ, H. 1892-1899. *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris, Gauthier-Villars.
[22] POINCARÉ, H. 1951-1956. *Œuvres d'Henri Poincaré*. Paris, Gauthier-Villars. Ed. Paul Appel et al.
[23] PONTRYAGIN, L. S. 1978. A Short Autobiography of L. S. Pontruagin. *Russian Mathematical Surveys*, (6), pp. 7–24.
[24] PUGH, C. 1967a. The closing lemma. *American Journal of Mathematics*, , pp. 956–1009.
[25] PUGH, C. 1967b. An improved closing lemma and a general density theorem. *American Journal of Mathematics*, , pp. 1010–1021.
[26] ROQUE, T. 2001. *Ensaio sobre a gênese das idéias matemáticas: exemplos da teoria dos sistemas dinâmicos*. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
[27] ROQUE, T. 2005. *Estabilidade: exigência física ou formalidade matemática?* In: [19], pp.275-300.
[28] SMALE, S. 1998. Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio. *The Mathematical Intelligencer*, (1), pp. 39–44.
[29] SOTOMAYOR, J. 2000. Uma lista de problemas de EDO. *Revista de Matemática e Estatística*, pp. 223–245.
[30] ZERNER, M. 1997. The Mathematical Model: Epistemological Tool or Ideological Notion? *Atas do 20º Congresso Internacional de História das Ciências*.

Tatiana Roque
Instituto de Matemática – UFRJ
Rio de Janeiro - Brasil

E-mail: tati@im.ufrj.br