Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 6 nº 12 (outubro/2006 - março/2007) - pág. 197-218
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

TRES MOMENTOS DE UNA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA: APOLLONIUS DE PERGA, FRANÇOIS VIETE, JOSEPH-DIEZ GERGONNE*

Mario H. Otero
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

(aceito para publicação em abril de 2006)

Resumen

La tradición matemática –en este caso geométrica- se explicita en la construcción de un círculo tangente a tres círculos dados sobre el plano. De la pléyade de geómetras que la intentan hemos tomado sólo a tres. Se distinguen varios períodos durante los cuales este tema no está considerado ni trivial, ni olvidado ni agotado su tratamiento. En principio está fuera de los temas más atractivos de la geometría: sin embargo resulta de interés para matemáticos grandes y chicos hace más de dos milenios. Se incluyen referencias a tratamientos recientes y hasta computacionales.

Palabras-clave: geometría, tangencias, tradición teórica

Abstract

Mathematical tradition -geometrical in this case- is shown in the construction of a circle tangent to other three given circles on the same plane. From the numerous geometers that have faced this problem I have selected three. Various periods are chosen in which this problem has not be neither considered trivial, nor forgotten, or finished. The problem is outside of the most attractive geometrical subjects of study and it results of interest for mathematicians since almost two thousand years. References to recent and even computational treatments are included.

Keywords: geometry, tangencies, theoretical tradition

1. El que acá presentamos es el texto de la traducción inédita efectuada por Joseph-Diez Gergonne del texto latino escrito por François Viète (1540-1603) bajo el título de Apollonius Gallus -Apolonio francés- que remite al trabajo del geómetra griego (Perga, circa 262-190). El texto estará precedido por la presente brevísima introducción.

Dicha traducción de Gergonne (1771-1859) data del año 8 (1800-1801) y la hemos recogido de un cuaderno suyo en la biblioteca del Instituto de Matemática de la Universidad de Génova en la ciudad universitaria en las montañas de los alrededores de esa ciudad.

La traducción parece ser un primer intento, un borrador, todavía imperfecto vistas algunas desprolijidades que contiene. Las faltas numerosas de una puntuación correcta no llevan casi nunca a hacer ambigua o incorrecta la exposición. Hemos preferido mantener el texto estrictamente tal cual aparece en el cuaderno referido.

La construcción de que se trata es la de un círculo tangente a tres círculos dados sobre el plano. Y con ella han tenido que ver Apolonio, Viète y Gergonne, entre -pero más que- otros. En el curso histórico se dio además una generalización del problema.

David Gisch y Jason M. Ribando (2004), en un trabajo titulado “Apollonius’ problem: a study of solutions and their connections”, señalan la pléyade de geómetras que entre los tres del título trataron esa misma construcción y sus generalizaciones. Aunque los autores dicen no conocer con exactitud las reconstrucciones árabes, señalan cómo aparte de esos tres geómetras. Adrianus Romanus, Fermat, Descartes, Newton, Philip Beecroft (1842), entre otros muchos trataron el tema. Se cuentan por docenas los que así lo hicieron. Mucho más tarde Frederick Soddy -premio Nóbel de física en 1921- redescubrió el problema en 1936 Nature y lo expresó en “Kiss precise”, aún bajo la forma de un poema.

Por cierto no vamos a recorrer el camino de Gisch y Ribando -que publicaron sus resultados en el American Journal for Undergraduate Research en 2004-, lo que los llevó a muchos otros geómetras, a David Eppstein (2001), y a Cinderella, programa computacional con una nueva versión, Cinderella.2 en este mismo 2005.

2. Complementando los datos de Gisch y Ribando con los de Santos y Trevisan -me remito a sus bibliografías- se pueden distinguir varios “períodos” durante los cuales este teorema no está considerado ni trivial, ni olvidado ni agotado su tratamiento. Uno está dado por dos fechas distantes -varios siglos-, entre la de Apollonius (o aún la de Euclides) y la de Pappus; un segundo que iría de Adrianus Romanus, Viète, Fermat y Descartes hasta Newton y hasta los Sangaku de Osaka, obviamente en otra tradición y de algún modo relacionados con el problema de Apolonio (1603/1867); un tercero de Lazare Carnot (1803), Hachette (1808), Français (1809), Poncelet, Gergonne (en 1814-22), Cauchy, Dupin (1831), Gauss, Beecroft -quien en 1842 trata el teorema en forma independiente- Pedersen, Fourché (1892), Muirhead (1898); y un cuarto período desde 1936 a 2005, por ahora, que comprende a Carvalho (1958) y a Bruen et al. (1983), pero también a Wettstein y otros, hasta Cinderella2 (2005).

El problema de Apolonio ha intentado ser resuelto de forma indirecta o directa, por métodos analíticos y geométricos puros -o de dibujos trazados o grabados en madera-, hasta informatizados y, además, tratados en casos similares y/o generalizados.

Es decir que un teorema muy concreto -que en principio está fuera de los temas más atractivos de las matemáticas- resulta de interés para matemáticos, grandes y chicos, desde hace bastante más que dos milenios. Y no nombramos sino algunos. Se trata de un fenómeno que no parece moco de pavo.

3. El texto más antiguo conocido pertenece al tratado sobre las cónicas de Apolonio transmitido a nosotros varios siglos después por Pappus. Pero vamos a proceder al revés: Gergonne publica entre 1810 y 1832 la primer revista de matemáticas que se publica regularmente, los Annales de Mathématiques Pures et Apliquées.

Contribuye en varias revistas y en los mismos Annales a diversos campos de las matemáticas, siendo notorio su aporte con el principio de dualidad que Poncelet daba sólo para casos particulares.

Publica cinco artículos relacionados con la construcción de Apolonio y produce bastante antes su traducción del Apollonius Gallus, que no publica. Traduce igualmente sin publicar un trabajo de Fermat y otro de Poisson, de gran interés, y escribe uno suyo, que iremos editando.

Gisch y Ribando (2004) en sus páginas 21 a 24 presentan pasajes interesantes para nuestro tema y señalan el logro importante de Gergonne al realizar una construcción verdaderamente pesada: “We are truly impressed that Gergonne, or anyone before the computer age, could have the patience of performing this feat” (p.22).

4. Remito al lector, para los trabajos de Apolonio y Vieta, a la bibliografía señalada más abajo, que es sólo una parte de la enorme bibliografía disponible sobre dichos autores aún en el tema particular de las tangencias. En lo que resta me voy a limitar a aludir: 1. a un aspecto de la contribución de Gergonne que tiene que ver más con la teoría de las matemáticas que con éstas mismas, y 2. a dar cierta explicitación de la afirmación de Gisch y Ribando.

4.1 En el texto presentado parcialmente en facsímil -de los Annales, t.7, de 1817- Gergonne sostiene que la geometría analítica provee las soluciones más directas, simples y elegantes a la construcción considerada. Aquí nos interesa lo de analíticas y lo de directas. Especialmente lo primero porque ya mucho antes Gergonne ha efectuado consideraciones de interés comparando métodos analíticos y sintéticos.

En efecto, ya en Notices des Travaux de l’Academie du Gard de 1809 y de 1810 respectivamente aparecieron dos trabajos suyos: “De la méthode dans les sciences en general, et en particulier des sciences exactes” y “Reflexions sur l’usage de l’analise algébrique dans la géométrie”, y también en dicha revista la reseña “Rapport sur les Elémens d’analise géométrique de M. Lhuilier”. En todos ellos se argumenta ampliamente a favor de las ventajas del análisis algébrico. Por otra parte el trabajo -aún inédito- que ganara el premio de la Academia de Bordeaux en 1813
y que retoma -en lo que aquí nos interesa- el contenido de aquel primer trabajo, hace caudal en el mismo sentido.

4.2 La ya citada rotunda afirmación de Gisch y Ribando de la página 22 de su trabajo se basa en que Gergonne ha dibujado y extraído conclusiones en una situación -de sólo aparente confusión de círculos y rectas- que resultaría difícil de lograr hoy para esos autores sin la ayuda de Cinderella programa que, por su parte, permite ocultar parte de aquellos elementos y, por tanto, facilitar la comprensión.

5. No hemos presentado el texto analizando cada uno de los trabajos de los autores principales -Apollonius y Viète- sino que hemos dado los elementos más básicos para

utilizar la bibliografía. A la vez señalamos las razones por las cuales un autor tan descuidado como Gergonne merece una consideración cuidadosa, aún en este caso, aparentement particular –aunque no menos importante- de un haz de construcciones y ecuaciones interrelacionadas conocidas en su conjunto como problema de Apollonius.

Bibliografía - Textos

Apollonius of Perga. Conics; books I-III, Dana Densmore, Santa Fe NM, 2000.

Durrande, Théorie élémentaire des contacts des circles, des sphères, des cylindres et des cônes. Annales de Mathématiques Pures et Apliquées, v.11.

Gergonne, Joseph-Diez. Mémoire sur le cercle tangent à tríos cercles dones, et sur la sphère tangente à quatre sphères données. Mémoires de l'Academie des Sciences de Turín, 1814.

- - - - Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère, Annales de Mathématiques Pures et Apliquées), v.4, 1814..

- - - - Recherche d'un circle qui en touche trois autres sur un plan. Annales de Mathématiques Pures et Apliquées, v. 7, 1817.

- - - - - Reflexion sur l'article précédent /de Poncelet/, Annales de Mathématiques Pures et Apliquées, v. 8, 1817.

- - - - - /Un abboné/ Sur la construction du cercle tangent à trois cercles donnés, Annales de Mathématiques Pures et Apliquées, v.13, 1822.

Poncelet, Jean-Victor. Reflexion sur l'usage de l'analise algébrique dans la géometrie; suivi de la résolution de quelques problèmes dependant de la géométrie de la règle, Annales de Mathématiques Pures et Apliquées, v. 8, 1817.

Poncelet, Jean-Victor. Construction géométrique d'un cercle qui touche trois autres donées sur un plan ou une sphère, d'un cône droit qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace. Annales de Mathématiques Pures et Apliquées, v. 11, 1820.

Thomas, Ivo. Selections illustrating the history of Greek mathematics. Harvard University Press, Cambridge MA, 1957. /textos de Apollonius y Pappus/

Viète, François. The analytic art. Kent State University, Kent OH.

Bibliografía secundaria

Arnold, Vladimir. Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? International Mathematical Union, 2000.

Armogathe, Jean Robert. L'algèbre nouvelle de M. Viète. Corpus, v. v. 1, 1965.

Bogomonly, Alexander. Apollonius problem: what is it? Cut the knot! http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/Apollonius.shtml

Boyé, Anne. Papers on history of science. http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/uk_confboye.htm

Boyé, Anne. L'Apollonius gallus et le problème des trios circles comme defense et illustration de la géométrie synthétique /Thèse, Nantes, Bibliothèque Sciences et Societés, Jussieu, Paris/.

Busard, H. L. Viète, François. C. C. Gillispie (ed.) Dictionary of scientific biography, Scribner's, New York, 1963.

Dhombres, Jean. Saluer François Viète de Fontenay, mathématicien de la Renaisance /comunicación persona/.
Eppstein, David. Tangencies: Apollonian circles. http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/tangencies/apollonian.html
Falanga, Maddalena & Battaia, Luciano. Premessa e presentazione del problema. http://www.batmath.it/matematica/a_apollonio/premessa.htm
Fenaroli, Giuseppina et al. Collezione speciali esistenti nella Biblioteca Matematica dell'Università di Genova. F. Barbieri & F. Cattelani (eds.) Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografi delle matematiche in Italia. Università degli studi de Modena, Modena, 1989.
Gillispie, Charles Coulston (ed.) Dictionary of Scientific Biography, Scribner's, New York, 1970-1980.
Gisch, David & Ribando, Jason M. Apolloius problem: a study of solutions and their connections. American Journal of Undergraduate Research, v. 2, 2004.
Joyce, David E. Euclid's Elements http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
Kolmogorov, Andrey Nikolayevich. Matemáticas. Enciclopedia Soviética, 1936.
Lagarias, Jeffrey C. et al. Beyond the Descartes circle theorem. http://arxiv.org/abs/math/0101066
Macbeth, Danielle. Viète, Descartes, and the emergence of modern mathematics. Graduate Faculty Philosophy Journal, v. 25, 2004.
Otero, Mario H. Joseph-Diez Gergonne (1771-1859): histoire et philosophie des sciences. Université de Nantes, Nantes. 260 p.
Peterson, Ivar. Temple circles, 2001.http://www.maa.org/mathland/mathtrek_4_23_01.html
Ritter, Fréderic. François Viète inventeur de l'algèbre moderne. Dépot de la Revue Occidentale, Paris, 1895.
Rothman, Tony & Fugakawa, Hidetoshi. Japanese temple geometry. http://www2.gol.com/users/coynerhm/0598rothman.html
Santos, Sandra Augusta & Travisan, André Luis. O problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais. www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2004/ps/rp32-04.pdf
Schappacher, Norbert. Lo político en matemáticas. La Gaceta de la RSME, v.8, 2004.
Togliatti, Eugenio G. La biblioteca matemática dell'Università di Genova; formazioni e pleni sviluppi, 1973.
Weisstein, Eric W. Soddy circles. http://MathWorld.wolfram.com/SoddyCircles.html
- - - - - Eric Weisstein's World of Mathematics. http://mathworld.wolfram.com
- - - - - Viète, François (1540-1603). Eric Weisstein´s World of Scientific Biography. http://scienceworld.wolfram.com/biography/Viete.html
Zlobec, Borut Jurcic & Kosta, Neza Mramor. Configurations of circles and the Apollonius problem. torina.fe.uni-lj.si/~neza/clanki/clanek99p.ps
The interactive geometry software Cinderella. http://www.cinderella.de/tiki-index.php

TEXTO

[1]

L’Apollonium français

de François Viète

ou la résurrection de l’Apollonium de Perge

La géométrie ΠΕΡΙ ΕΠΑΦΟΝ
dédié à Adrien romain, Belge,
traduit en français en l’an 8 par J. D. G.

Je me suis proposé, savant Adrien, de construire par la géométrie rationnelle le problème d’Apollonium relatif à la description d’un cercle qui touche trois donnés ; j’ai cherché à résoudre le problème non mécaniquement mais φιλομαθειον de manière à ne pas employer l’hyperbole qui ne peut être décrite par la géométrie κατ’ επισημονικεν λογον. Est méchanisme a doublé le cube par la parabole, Nicomède par la conchoide, Dinostrate et Archimède ont quarré le cercle en employant diverses spirales; mais en moyens ne sont pas géométriques et auraient été rejetés par Euclide et toute son école. Ainsi, savant Adrien, que j’ appellerai volontiers Apollonium le belge, un problème tout plan et non pas solide comme tu l’ avais cru [plusieurs mots barrés sur l’ original], abandonne et les fractionne, tu te sers pour déterminer l’ hyperbole et tu recherches sur le parallélisme du asymptote, travail inutile puisqu’il n’a pour but que de déterminer sur un plan des sections coniques dont on n’a nul besoin dans la résolution du problème dont il s’ agit. Veuille donc bien accueillir favorablement Apollonium ressuscité,sortant des rives de la mer de Grimm et τεχνικο επισημονικω χ[Χ] ρεργιαν.

[2]

Les dix problèmes ω ει επαφων d’ Apollonium de Perge recueillis par Papus d’ Alexandrie que je suivrai un à un dans l’ordre qui sera trouvé l’ option convenable.

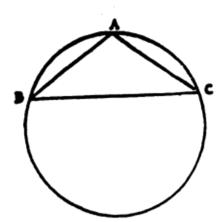
[3]

Problème premier

Décrire un cercle qui passe par trois points donnés en supposant que un point ne soit par tour trois sur une même ligne droite.

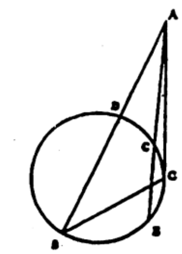
Solution

Fig. 1 Soit donné les trois points A, B, C, par lesquels il faut faire passer le cercle à décrire. On joindra ces points par des droites, et comme par la nature du problème ils ne sont pas tous trois sur une même ligne droite ces droites formeront un triangle dont les sommets des trois angles seront les points A, B, C circonscrivant donc un cercle au triangle selon la méthode enseignée dans les éléments du cercle passera par les trois points A, B, C et sera par conséquent le cercle cherché.



Lemme qui doit servir pour ce qui suit

Fig. 2 Si l' un A B du côté d' un triangle A, B, C est coupé en D de manière que le rectangle construit sus ce côté A B et sur la partie A D soit équivalent au quarré construit sur celui A C des deux autres côtés qui corresponde à cette partie ce côté A C sera tangent en C au cercle passant par le trois points B, D, C.



Démonstration

La circonférence dont il s' agit devant passer par le point C, s' il était possible que A C ne lui fut pas tangente en ce point elle lui serait sécante et par conséquent la reconstruirait en deux points soit E l' autre point le rectangle construit sur A B et A D devrait être égal au rectangle construit sur A E et A C ce qui est absurde puis que le premier de un rectangle est en vertu de la construction égal au quarré construit sur A C lequel ne peut être égal au rectangle construit sur A E et A C, A E et A C étant évidemment inégales A C ne peut donc être sécante au cercle B D C et puis qu'elle rencontre ce cercle elle doit lui être tangente comme la proposition l'annonce.

Problème II

Etant donné deux points et une ligne droite, décrire par ces deux points points un cercle qui soit tangent à la droite donné.

[4]

Solution

Fig. 3. Etant soit A et B deux points et C Z une ligne droite quelconque et qu'il faille faire passer par les deux point A et B une circonférence que soit tangente à la droite Z C. Soit jointe le points A et B par la droite A B. Cette droite étant supposée parallèle à Z C soit coupé A B en deux parties égales en D par la perpendiculaire D C coupant Z C en C et par le points A, B, C soit décrite un cercle car Z C étant parallèle a A B doit aussi être perpendiculaire à C D, d'où il résulte que la circonférence A B C est tangente à C Z au point C.

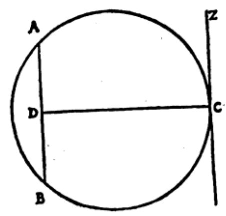
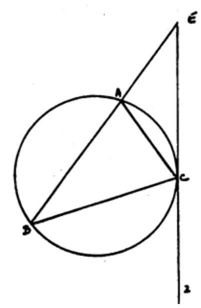


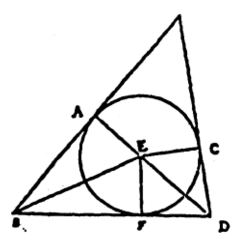
Fig. 4. Si A B n'est pas parallèle à C Z en deux droites se rencontreront en quelque point E alors soit coupé E Z en C de manière que le rectangle construit sur E B et E A soit équivalent au quarré construit sur E C et par les points A, B, C soit décrit un cercle lequel sera tangente à la droite C Z par vertu du lème précédent donc occupent dans tous les cas décrire un cercle qui passant par les deux point A et B soit tangent a une droite CZ ce qu'il fallait trouver.

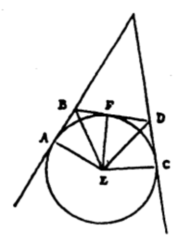


Problème III

Etant donné trois lignes droites décrire un cercle qui soit tangent à chacune en supposant d' ailleurs que une droite ne soit pas parallèle.

Fig. 5 et 6. Soit donnés trois lignes droites AB, CD et BD parmi lesquelles l'une BD ne peut par la construction du problème être parallèle à aucune des deux autres et doit par conséquent la rencontrer en deux points B et D il faut que le cercle décrit soit tangent aux trois droites. Soit coupé en deux angles ABD et CBD en deux parties égales par les droites BE et DE concourant en E et soit abaissé du point E sur BA, BD et BC perpendiculaire EA, EF et EC en perpendiculaire seront égales, en effet au triangle EAB et EFB sont semblables par la construction et de plus égaux puisqu'il





ont EB pour hypoténuse commune donc EA est égal à EF on rencontrerait de la même manière

[5]
soit donc décrit du centre E et avec EA, EF ou EC pour rayon le cercle AFC on aura ainsi décrit un cercle tangent aux trois droites AB, BD et DC aux points A, F et C ce qu'il fallait trouver.

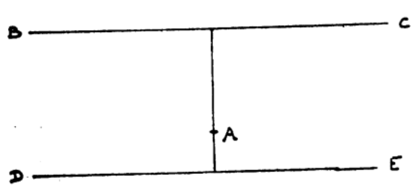
Lemme
Par un point donné mener une ligne droite qui coupe deux droites donnés pour des angles égaux.

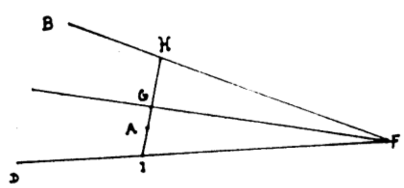
Solution
Fig. 7 et 8. Soit A un point donné, BC et DE deux droites donnés. Il faut mener par le point A une droite qui coupe BC et DE tous des angles égaux.

Fig. 7. Si les droites BC et DE sont parallèles on mènera par le point A une perpendiculaire à l'une d'elles laquelle sera aussi perpendiculaire à l'autre et coupera par conséquent les deux droites tous des angles égaux.

Fig. 8. Si elles ne sont pas parallèles elles se rencontreront soit E leur point de rencontre. Soit coupé l'angle BED en deux parties égales par une droite et soit mener par le point A une perpendiculaire a cette droite la coupant en G et rencontrant les deux droites donnés en H et I les triangles EGH et EGI sont semblables par la construction et de plus égaux puisque le côté EG leur est commune les angles H et I de un triangle sont donc égaux. Il a donc été construit par le point donné A une droite coupant les deux droites donnés EB et ED pour des angles égaux ce qu'il fallait trouver.

Figures 7 et 8[6]



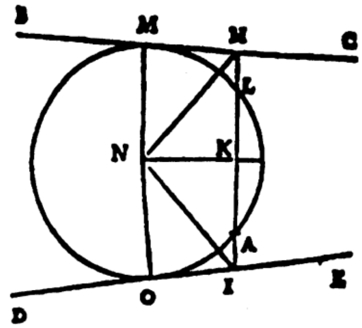


Problème IV
Etant donné deux droites et un point faire passer par le point donné un cercle qui soit tangent aux deux droites donnés

Solution

Fig. 9. Soit donné le point A et les deux droites BC et DE il faut par le point A faire passer un cercle que soit tangent aux deux droites BC et DE, par le point A soit mené la droite IH coupant les deux droites BC et DE, pour des angles égaux soit coupé cette droite en deux parties égales en K et soit porté KA de K en L par les points A

Figure 9



[6]
et L soit décrit un cercle tangent à l'une quelconque des deux droites BC et DE , je dis que le même cercle sera aussi tangent à l'autre, supposons donc que ce cercle soit tangent a BC en M soit N son centre soit construit NO perpendiculaire en O sur DE et soit mené NK comme AL a été coupé en deux parties égales en K et que de plus N est le centre du cercle il en résulte que l'angle NKI est droit. Soit mené NH et NI en droite seront égales comme étant également éloignés de la perpendiculaire NK; mais par la construction KI est égale a KH. D'où il résulte que les triangles rectangles NKI et NKH sont égaux et qu'ainsi les angles NHK et NIK sont égaux retranchant donc un angle des angles KIO et KHM égaux par la construction en angles restants NIO et NHM seront égaux les triangles rectangles NHM et NIO sont donc semblables et de plus égaux comme ayant des hypoténuses égales NH et NI d'où il résulte que NO este égale à NM cette ligne est donc un rayon comme la première et puisqu'elle est de plus perpendiculaire à DE il en résulte que cette droite este tangente au cercle au point O le cercle AMO décrit par le point A est donc tangent aux deux droites données BC et DE ce qu'il fallait trouver.

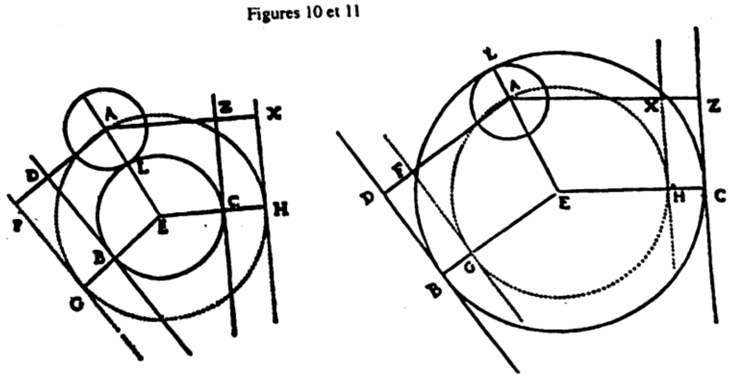
Problème V
Etant donné un cercle et deux droites décrire un cercle qui soit tangent au cercle donné et aux deux droites données.

Solution
Fig. 10 et 11. Soit donné le cercle dont le centre est A et les deux droites ZC et DB. Il s'agit de décrire un cercle qui touche le cercle donc le centre est A est les deux droites ZC et DB soit abaissé AZ et AD perpendiculaires sur DB et ZC sur lesquelles on partira à partir des points D et Z des parties DF et ZX égales au rayon du cercle dont le cercle est A par les points X et F ou soient menées les droites XH et FG parallèles a ZC et DB et soit décrit un cercle passant par le point A et touchant

[7]
les deux droites FG et XH soit E le centre du cercle, il est clair que ce centre E sera aussi le centre du cercle tangent au cercle dont le centre est A et aux deux droites DB et ZC puisqu'

en ajoutant ou retranchant des grandeurs égales à des grandeurs égales les restes sont égaux quant au rayon de ce cercle il sera la perpendiculaire EC sur ZC.

Figures 10 et 11



Lemme I

Si deux cercles se coupent réciproquement la droite mené par l'un des points d'intersection et par le centre de l'un du cercle en passera par le centre de l'autre.

Démonstration

Figure 12

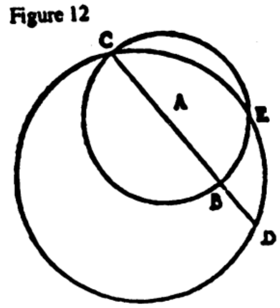


Fig. 12 Soit les deux cercles CEB et CED se coupant en deux points C et E et soit A le centre du cercle CEB et soit menée par l'une C des intersections et par le centre A la droite CB rencontrant en D le cercle CED, je dis que la droite CD en passera par le centre de ce cercle pour le rencontrer soit joint le point E aux points C, B et D par les droites EC, EB et ED l'angle CEB est droit comme inscrit au demi cercle. Donc l'angle CED plus grande ou plus petit que CEB de l'angle BED n'est pas droit la droite CD n'est donc pas un diamètre du cercle CED elle ne passe donc pas par son centre ce qu'il fallait démontrer.

Lemme II

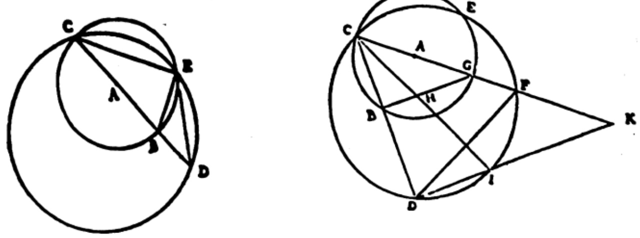
Si deux cercles se coupant réciproquement en deux points on mène par l'un quelconque de ces points une droite coupant les deux cercles en deux autres points les segmentes formés par ces droites inscriront par semblables.

Démonstration

Fig. 13 et 14. Soit les deux cercles CEB et CED se coupant réciproquement en deux points C et E par l'une des intersection C soit mené d'une manière quelconque la droite CD coupant les deux cercles et B et D. Je dis que les deux segments formés sur CB et CD inscriront par semblables en effet et la droite CD passera par le centre du cercle CEB ou elle n'y passera par supposons

Fig. 13. premièrement qu'elle y passe et soit A ce centre elle ne passera pas par le centre

Figures 13 et 14



[8]

de l'autre cercle CED d'où il résulte que CD est un diamètre du cercle CEB et n'est pas un diamètre du cercle CED il est donc impossible dans ce cas que les deux segments formés sur CD et CB soient semblables.

Fig. 14. Supposons maintenant que la droite CD ne passe pas par le centre A du cercle CEB menons par le point C et par ce centre A la droite CF rencontrant les deux cercles en G et F et soit mené BG et DF l'angle CBG sera droit comme inscrit au demi cercle, au contraire l'angle CDF ne sera pas droit mais plus grand ou plus petit parce que CF n'est pas un diamètre du cercle CED les droites BG et DF ne seront donc pas parallèles. Soit H le centre du cercle CED et soit mené par ce centre le diamètre CI. Soit mené par D et I la droite DK rencontrant en K le prolongement de CF l'angle CDI sera droit et par conséquent DK sera parallèle à BG et ou il suit que CB sera à CD comme CG est à CK. Or CK n'est pas égal à CI ou n'aura donc pas CB:CD :: CG:CI d' où il résulte que dans tous les cas les deux segments formés sur CB et CD ne seront pas semblables, ce qu'il fallait démontrer.

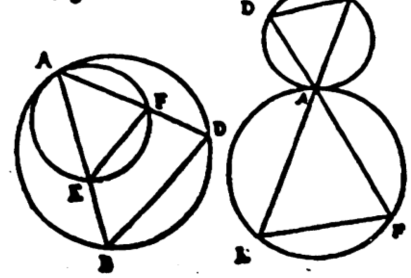
Lemme III

Si on mène parallèlement à l'un quelconque des côtés d'un triangle une droite de manière qu'elle forme avec les deux autres côtes ou leur prolongement un triangle semblable au premier et ayant même forme et que lui le cercle circonscrit à l'un des ces triangles sera tangent au cercle circonscrit à l'autre et aura pour point de contact avec lui le sommet commun des deux triangles.

Démonstration

Fig. 15 et 16. Soit le triangle ABD et soit coupé sur deux côtes AB et AD ou leur prolongement par la droite EF parallèle à l'autre côte BD il en résultera les deux triangles semblables BAD et EAF ayant même sommet A. Je dis que le cercle circonscrit au triangle EAF touchera le cercle circonscrit au triangle BAD au sommet commun A de ces deux triangles.

Figures 15 et 16



[9]

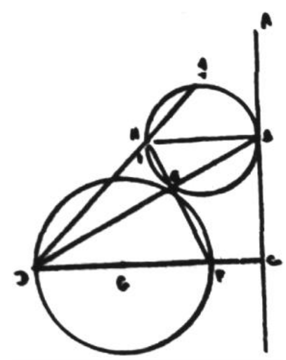
En effet imaginons que ces deux cercles soient décrits chacun d'eux devrait passer par le point A ils se couperont ou se toucheront en ce point or s'ils se coupaient les deux segments formés sur AD et AF seraient dissemblables or ces segments sont semblables car les côtes homologues des deux triangles semblables sont entre eux comme les diamètres des cercles circonscrits les deux cercles ne peuvent donc se couper en A ils sont donc tangents l'un à l'autre en ce point ce qu'il fallait démontrer.

Problème VI

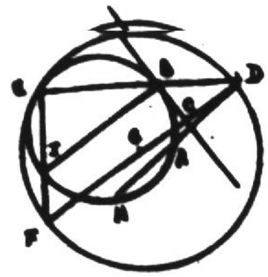
Etant donné un point, une droite et un cercle; faire passer par le point donné un cercle que soit tangent à la droite et au cercle donné.

Solution

Fig. 17 et 18. Soit donné un point A, une droite quelconque BC et enfin un cercle DEF il s'agit de faire passer par le point A un cercle qui soit tangent à la droite BC et au cercle DEF. Par le centre G du cercle DEF soit abaissé sur BC la perpendiculaire DC coupant ce cercle en D et F et soit mené DA soit coupé cette droite en H de manière que le rectangle construit sur DA et DH soit équivalent au rectangle construit sur DC et DF par les points A et H. Soit décrite une circonférence touchant la droite donné en B et soit mené DB coupant en E le cercle DEF en menant EF l'angle DEF sera droit dans le quadrilatère EBCF les angles E et C sont droits. D'où il résulte que les angles B et F sont suppléments l'un de l'autre. Ces angles DBC et DFE sont donc égaux, les triangles



rectangles DEF et DCB sont donc semblables et par conséquent le rectangle construit sur DB et DE est équivalent au rectangle construit sur DC et DF et par conséquent au rectangle construit sur DA et DH qui par la construction est équivalent au dernier le point E est donc un point du cercle HAB mais ce point appartient aussi au cercle DEF ces deux cercles sont donc sécant ou tangent l'un à l'autre au point E or soit mené BH diamètre du cercle HAB au cercle touchant la droite BC en B il s'en suit que l'angle CBI est droit et que par conséquent BI et DF sont parallèles or en menant EI[10]



L' angle IEB est droit comme l'angle DEF d'où il résulte que FE et EI ne font qu'une seule droite FI. Les triangles DEF et BEI sont donc semblables et ont même angle en tournant communes et par conséquent les cercles circonscrits aux triangles sont tangents et non sécants l'un à l'autre au point E il à donc été décrit par le point A un cercle BAE qui touche en B la droite donnée BC et en E le cercle donné DEF ce qu'il fallait faire.

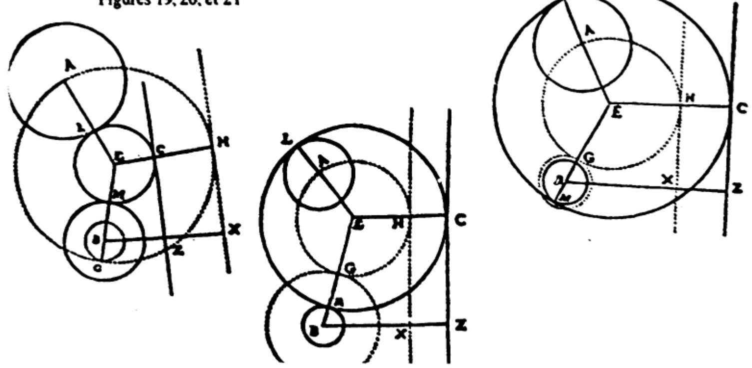
Problème VII

Etant donné deux cercles et une ligne droite décrire en trois un cercle qui touche les deux cercles donnés et la droite donnée.

Solution

Fig. 19, 20 et 21. Soit donné deux cercles le premier ayant A pour centre et le sécant B et soit donné une droite quelconque CZ. Il s'agit de décrire un troisième cercle que soit tangent aux deux cercles dont les centres sont A et B et à la droite CZ. Pour y parvenir soit abaisse du point B sur CZ la perpendiculaire BZ et soit pris sur cette perpendiculaire ou sur sont prolongement un point X tel que ZX soit égal au rayon AL du premier deux cercles donnés. Par le point X soit menée XH parallèle a CZ et du

Figures 19, 20, et 21



point B comme centre et d'un rayon égal à la somme ou à la différence de ceux des deux cercles donnés soit décrit un cercle enfin par le point A soit décrit un cercle qui touche celui-là en G et la droite XH en H et soit E son centre, il est évident que ce centre E devra aussi être celui du cercle qui touche les cercles donnés dont les centres sont A et B et la droite donné CZ car de toute part ce cercle aura pour rayon le rayon du cercle AHG augmente ou diminue d'une même quantité. C'est pourquoi abaissant sur CZ la perpendiculaire EC elle sera le rayon du cercle

[11]

touchant les deux cercles dont les centres sont A et B aux points L et M et la droite CZ au point C comme il était demandé, mais la question présente trois cas que voici

Fig. 19. 1º. Si on veut que le troisième cercle touche extérieurement les deux cercles donnés en supposant que celui dont le centre est A soit le plus grand et celui dont le centre est B le plus petit il faudra prendre pour rayon du cercle auxiliaire dont le centre est B la différence du rayon du cercle donné et partir LA de Z en X sur le prolongement de BZ.

Fig. 20. 2º. Si l'on veut que le troisième cercle embrasse les deux centres il faudra en supposant toujours que le cercle dont le centre est A soit le plus grand prendra pour rayon du cercle auxiliaire dont le centre est B la différence du rayon des deux cercles donnés mais porter AL de Z en X sur BZ même.

Fig. 21. 3º. Enfin si l'on veut que le troisième cercle touche l'un des deux cercles donnés extérieurement et embrasse l'autre il faudra prendre pour rayon du cercle auxiliaire dont le cercle est B la différence du rayon des deux cercles donnés est partir AL de Z en X sur BZ même.

Problème VIII

Etant donné deux points et un cercle, faire passer par les deux points donnés un cercle qui soit tangent au cercle donné.

Solution

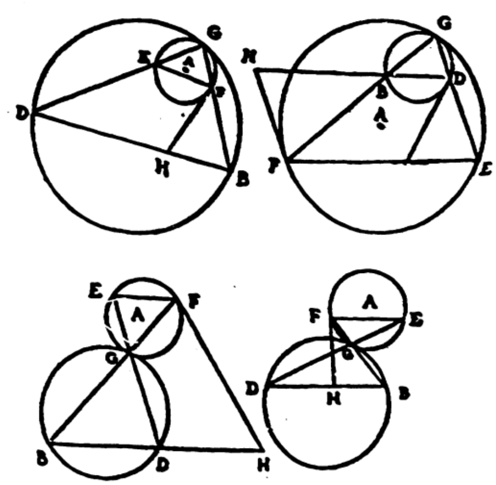
Fig. 22 23 24 25

Soit donné deux points B et D et de plus le cercle EFG dont le centre est A il faut par les points B et D décrire un cercle qui touche le cercle EFG. Pour cela soit mené BD et soit pris sur cette droite ou sur son prolongement un point H de manière que le rectangle construit BD et BH soit égal à la différence du quarré construit sur AB et AF. Soit mené par le point H la tangente HF au cercle donné par les points B et F. Soit mené BG coupant le même cercle en F et en G. Soit joint le point G au point D par la droite DG

[12]

coupant le cercle donné en F et par les points B, D, G soit fait passer une circonférence comme le rectangle construit sur BD et BH est par la construction égal à la différence des quarrés de AB et AF qui est elle même égale au rectangle construit sur BG et BF puisqu'elle est le quarré de la tangente mené par le point B au cercle donné il en résulte que le rectangle construit sur BD et BH est égal au rectangle construit sur BG et BF les quatre points D, G, F, H appartiennent donc a un même cercle. Les triangles BDG et BFH sont donc semblables et par conséquent les angles BGD et BHF sont égaux et il en est de même des angles BDG et BFH or ce dernier est égal à l'angle GEF puisqu'il a comme lui pour mesure la moitié de l'arc GF les deux angles BDG et GEF sont donc égaux les droites EF et BD sont donc parallèles et par conséquent le cercle circonscrit au triangle GBD doit toucher au point G le cercle dont le centre est A puisque celui ci est circonscrit au triangle EGF a donc été décrit par les points B et D au cercle BGD tangent en G au cercle EGF, ainsi qu'il devait être fait.

Figures 22, 23, 24, 25



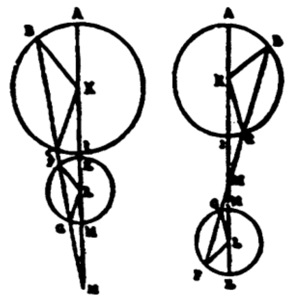
Lemme I

Etant donné deux cercles déterminés sur la droite qui joint leur centre un point tel qu'en menant par ce point une droite coupant les deux cercles est droite détermine dans l'uns et donc l'autre du segment semblable.

Solution

Fig. 26 et 27. Soit donné les deux cercles ABI et HFE dont les centres dont K et L et soit mené KL il s'agit de trouver sur cette droite un point par le quel menant une sécante commune aux deux cercles donnés elle détermine dans l'une et dans l'autre un segment semblable soit pris[13]

Figures 26 et 27



Sur KL ou sur son prolongement un point M tel qu'on ait KM:LM :: AK:EL. Voici que si par le point M on mène une sécante commune aux deux cercles ABI et EFH, elle déterminera aux deux cercles des lignes semblables.

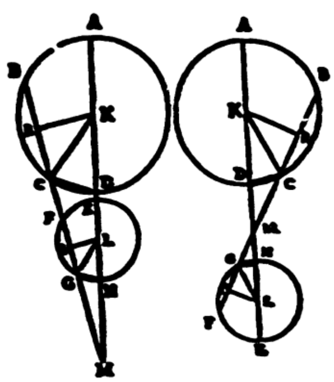
Démonstration

En effet soit mené par le point M la droite BG coupant le cercle dont le centre est K en B et C et celui dont le centre est L sera F et G et soit mené les rayons KB et KC, LF et LG ce qui formera deux triangles BKC et FLG or comme par la construction KM: LM:: KB: LF:: KC:LG il en résulte que les triangles MKB et MLF sont semblables et qu'il en est de même des triangles MKC et MLG les deux droites KB et KC sont donc parallèles aux deux droites LF et LG l'angle BKC est donc égal à l'angle FLG et par conséquent les segments formés sur BC et FG sont semblables, il a donc été déterminé sur la droite KL joignant les centres des deux centres donnés ABI et EFH un point M tel qu'en menant par ce point d'une manière quelconque une droite coupant les deux cercles en segments déterminés par cette droite soient semblables, ainsi qu'il était prescrit de le faire.

Lemme II

Fig. 28 et 29. Soit deux cercles ABD et EFH, KL la droite joignant leur centre et rencontrant le premier en A et D et la sécante en E et H. Soit M le point de la direction de KL tel que toute sécante commune au deux cercles passant par ce point détermine dans l'un et dans l'autre des segments semblables soit MB une des ces droites A et B les intersections les plus éloignées du point M; DC les deux autres intersections du même cercle EF les deux intersections d'autre cercle en plus éloignés de ce point M et G et H en plus proches. je dis que le rectangle construit sur MG et MB sera équivalant au rectangle construit sur AMH et MA

Figures 28 et 29



[14]

Démonstration

Soit abaissé du centre K et L sur les cordes BC et FG en perpendiculaire KR et LS et soient menés les rayons KC et LG comme BC et FG sont du bas de segment semblable des deux cercles et que CR et GS sont les moitiés de ces cercles il en résulte que les triangles rectangles KRC et LSG sont semblables et que par conséquent KC et LG sont parallèles des angles CKD et GLH sont donc aussi égaux. Si donc l'on mené CD et GH en triangles CKD et GLH seront aussi semblables et par conséquent CD et GH seront parallèles, on aura donc MH: MG:: MD: MC mais on a aussi MD : MC :: MB : MA donc MH : MG :: MB : MA et par conséquent le rectangle construit sur MA et MH est équivalent au rectangle construit sur MG et MB.

Cela posé, je dis q'on aura par les mêmes raisons le rectangle construit sur ME et MD équivalent au rectangle construit sur MF et MC.

Car on a d'abord ME : MF :: MG : MH et puisqu'on a MG : MH :: MC : MD on aura aussi ME :MF :: MC : MD et par conséquent le rectangle construit sur ME et MD est équivalent au rectangle construit sur MF et MC.

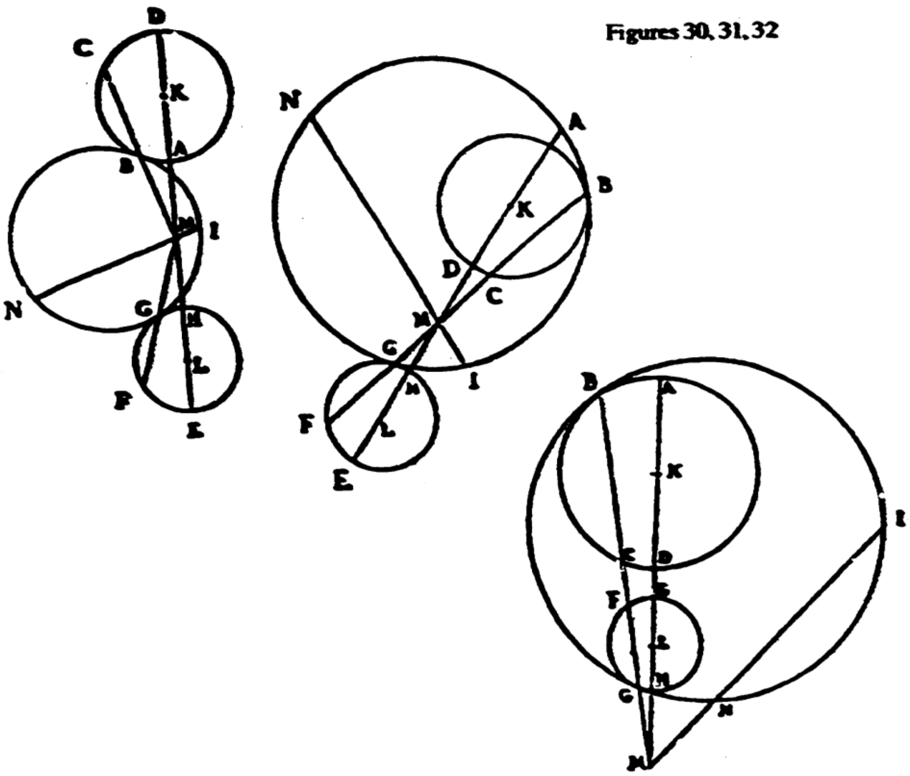
Problème IX

Etant donné deux cercles et un point par le point donné faire passer un cercle qui soit tangent aux deux cercles donnés.

Solution

Fig.30-31-32

Soit donné les deux cercles ABD et LFH et de plus le point I il faut par le point I faire passer un cercle qui soit tangent aux deux cercles ADD et EFH pour cela soit joint les centres K et L des deux cercles donnés par la droite KL et soit déterminé sur la direction de cette droite par le premier des deux lèmes précédents un point



Figures 30, 31, 32

[15]

M tel que la sécante commune aux deux cercles passant par ce point détermine dans l'un ou dans l'autre des segments semblables. Soit A et D les points d'intersection de la droite KL avec le cercle dont le centre est K et EIH les points d'intersection avec le cercle dont le centre est L soit mené MI et soit pris par la direction de cette droite un point N tel que le rectangle construit sur MI et MN soit équivalent au rectangle construit sur MH et MA et soit décrit par les points N et I un cercle tangent au cercle dont le centre K comme il a été enseigné au 8è problème et soit B le point de contact. Soit mené BM coupant le cercle dont le centre est K en B et C et celui dont le centre est L en G et F par la construction le rectangle construit sur MN et MI est égal au rectangle construit sur MH et MA mais en vertu du second des deux lèmmes précédents au dernière rectangle est équivalent a celui construit sur MB et MG dont celui-ci est aussi équivalent au rectangle construit sur MI et MN et par conséquent les quatre point B,G,N et I appartiennent a un même cercle; mais le point G appartient aussi au cercle dont le centre est L le cercle décrit par les trois points I, B et N et celui dont le centre est L ont donc le point G commune ils doivent donc se couper ou se toucher en ce point. Or les deux cercles IBN et ABD se touchant en B par la construction il en résulte que les deux segments dont les basses sont BC et BG sont semblables; mais par l'hypothèse et par la construction les segments dont les basses sont BC et FG sont aussi semblables donc les segments ayant pour basses BG et FG sont aussi semblables. D'où il résulte que les deux cercles BIG et EFG ne se coupent pas; mais sont

[16]

tangents l'un à l'autre au point G, il a donc été décrit par le point I un cercle touchant les deux cercles ABD et EGH aux point B et G ainsi qu'il devait être fait.

Problème X

Trois cercles étant donnés, décrire un quatrième cercle qui les touche tous.

Solution

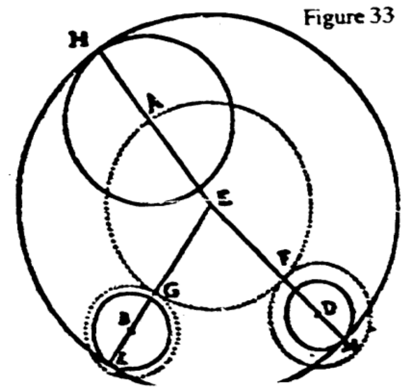


Figure 33

Fig. 33, 34, 35, 36. Soit donnés trois cercles le premier dont le centre est A le second dont le centre est B et le troisième dont le centre est F. Il s'agit de décrire un quatrième cercle qui touche ces trois là pour y parvenir du centre D et d'un rayon DF égal à la somme ou à la différence du rayon des deux autres cercles soit décrit un cercle que nous appellerons le premier du centre B et d'un rayon BG égal à la somme ou à la différence du rayon des deux autres cercles soit décrit un autre cercle que nous appellerons le second, enfin soit décrit par le point A un cercle tangent aux autres un et deux en G et F et soit E le centre de ce cercle il est évident que ce point E sera aussi le centre du cercle touchant les trois cercles donnés, car les intervalles restent de toute part égaux lorsqu'on leur ajoute ou q'on leur retranche de toutes parts des intervalles égaux, il ne sera donc plus question que de mener du point E par le centre de l'un des cercles donnés une droite et de prendre pour rayon la partie de cette droite comprise.

[17]

depuis ce centre jusqu'à la rencontre du cercle la plus proche ou la plus éloignée de ce point ce qui dépendra tout à la fois et du rayon qu'on aura pris pour décrire les cercles un et deux et de la manière dont on exigera que les cercles donnés soient touchés en diverses circonstances en presentant les quatre cas suivants.

Fig.33 1º. Si l'on veut que le quatrième cercle enveloppe les trois autres soit A le centre du plus grand B celui du moyen et D celui du plus petit il faudra prendre pour rayon des cercles un et deux la différence du rayon du cercle A et du rayon de celui des deux autres cercles donnés qui n'a pas le même centre que celui q'ouvrent décrire et décrire ensuite par le point A un cercle qui touche les cercles 1 et 2 extérieurement.

Figure 34

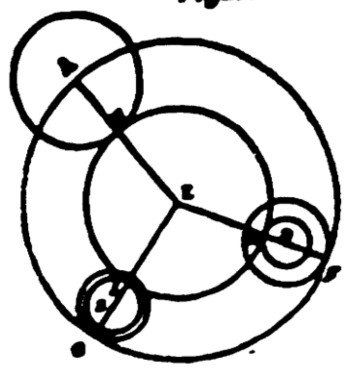


Fig. 34 2º. Si l'on veut que le quatrième cercle touche les trois outres extérieurement là supposant toujours que celui dont le centre est A soit le plus grand, celui dont le centre est B le moyen et celui dont le centre est D le plus petit il faudra encore décrire les cercles 1 et 2 du même rayon que dans le premier cas mais les cercles devront être enveloppes par celui décrit par le point A.

Figure 35

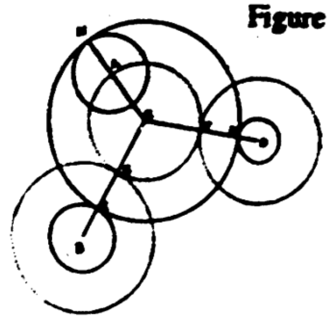


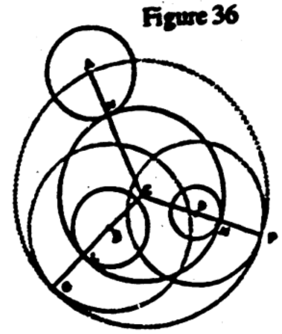
Fig. 35 3º. Si l'on veut que le quatrième cercle touche extérieurement deux des cercles donnés et enveloppe le troisième il faudra prendre pour rayon de chacun des cercles 1 et 2 la somme des rayons du cercle A et de celui des deux autres cercles donnés qui n'a pas le même centre que celui q'on veut décrire, et décrire par le point A un cercle qui touche extérieurement les cercles 1 et 2.

Fig. 36 4º. Enfin si l'on veut que le quatrième cercle enveloppe deux des cercles donnés et touche extérieurement le troisième il faudra encore décrire les cercles 1 et 2 du même rayon que dans le cas précédent mais le cercle décrit par le point A devra envelopper les cercles 1 et 2.

[18]

Tels sont en général les procédés qu'il faut suivre pour la description d'un cercle qui soit tangent à d'autres cercles et aux droites mais la doctrine particulière de la description d'un cercle qui soit tangent à des donnés qui se touchent elles mêmes mérite l'être traitée spécialement à cause de sont utilité principalement dans l'astronomie et dans la mécanique αυτοματα.

Figure 36



Note du traducteur, J.D.G. –

L'auteur termine par quelques observations sur des recherches dont s'occupait sont ami Adrien mais ces recherches étant étrangères à l'objet du problème précédent j'ai cru devoir terminer ici.

Mario H. Otero
Universidad de la República,
Departamento de Historia y Filosofía de la Ciencia
Montevideo, Uruguay

E-mail: mhotero@adinet.com.uy