

OS NÚMEROS PENTAGONAIS DE LEONHARD EULER

John A. Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN – Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2018)

Resumo

Apresenta-se, no presente trabalho, o texto latino, bem como uma tradução para o português, do artigo *De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium* (“Sobre as notáveis propriedades dos números pentagonais”) da autoria de Leonhard Euler. No referente artigo, Euler continua investigações começadas noutros lugares, fazendo uma expansão do conceito de “números pentagonais” e deduzindo várias propriedades dos números pentagonais generalizados e consequências do Teorema dos Números Pentagonais. Apresenta-se também uma pequena introdução, contextualizando historicamente Euler e seu trabalho sobre os números pentagonais.

Palavras-chave: Euler, Números Pentagonais, Matemática, História.

[THE PENTAGONAL NUMBERS OF LEONHARD EULER]

Abstract

Herein is presented the Latin text, as well as a Portuguese translation, of Leonhard Euler’s article *De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium* (“On the Remarkable Properties of Pentagonal Numbers”). In this article, Euler continues work began elsewhere, by expanding the concept of “pentagonal numbers” and deducing various properties of the generalized pentagonal numbers and consequences of the Pentagonal Number Theorem. There is also presented a small introduction, contextualizing historically Euler and his work on the pentagonal numbers.

Keywords: Euler, Pentagonal Numbers, Mathematics, History.

Introdução

Já em 1741, Euler estava matutando sobre o que viria a ser chamado o Teorema dos Números Pentagonais. Era só por volta de 1750, porém, ele havia achado uma demonstração para o teorema. Seu último trabalho sobre o mesmo foi apresentado à Academia de São Petersburgo em 1775 e publicado nas *Atas* da Academia em 1780, embora esse número só veio a ser impresso em 1783. Em 1775 Euler ainda apresentou à Academia um outro trabalho em que deduziu várias consequências do referido teorema. Foi publicado no mesmo número das *Atas*. Daremos, no presente trabalho, o texto latino e uma tradução (feita pelo presente autor junto com uma aluna sua de pós-graduação) para o português desse segundo artigo. Faremos primeiro, contudo, algumas considerações sobre Euler e a sua época, bem como alguns esclarecimentos sobre os números pentagonais.

O Século das Luzes

Quando Leonhard Euler nasceu em 1707, estava nascendo também o Iluminismo. Euler cresceu junto com esse movimento e adotou uma forma dessa filosofia. Básico ao Iluminismo é o princípio de que o homem, por força das suas atividades guiadas pela sua inata racionalidade, poderá gerar enormes progressos em todas as esferas da sua vida.

Os pensadores do Iluminismo foram influenciados pelos predecessores do Empirismo e do Racionalismo, especialmente, no primeiro caso, por John Locke (1632-1704) e David Hume (1711-1776) e, no segundo caso, por René Descartes (1596-1650). Sob essas influências, tendiam a rejeitar a metafísica especulativa e voltar-se à natureza, investigada pela razão, como a fonte do conhecimento. As leis da natureza, porém, não são transparentes para o homem devido aos dogmas impostos pela religião e pelo estado. Assim, houve uma forte tendência, entre esses pensadores, a rejeitar o autoritarismo da Igreja e do Estado para que a razão poderia ter acesso às verdades da natureza. Isto foi mais acentuado na França, reduto da Igreja Católica com a sua forte estrutura hierárquica e de um regime político centrado numa poderosa monarquia. De fato, o pensamento iluminista desembocaria, no final do século na Revolução Francesa. Nos países de língua alemã, as seitas protestantes foram vistas como menos autoritárias e, portanto, houve muito menos oposição à religião. Euler, por exemplo, era profundamente religioso.

Outra influência considerável sobre os pensadores iluministas era o crescimento da ciência, uma atividade humana em perfeita sintonia, para esses pensadores, com o propósito deles de investigar a natureza racionalmente. Marcante também foi a tendência de a ciência tornar-se cada vez mais matematizada, especialmente com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e o estudo de equações diferenciais. Esses aspectos da matemática estavam sendo aplicados aos problemas da ciência e da engenharia com grandes resultados tanto na compreensão teórica do universo, quanto na produção tecnológica, e, nisso, Euler participava plenamente. Ainda mais, os sucessos da ciência reforçaram a crença dos iluministas, de que a investigação racional da natureza iria resultar no progresso, não somente nas áreas técnicas, mas também em todas elas, inclusive na própria felicidade humana.

O Século das Luzes também viu o estabelecimento de revistas científicas especializadas e academias dedicadas às ciências e à matemática, sendo a mais prestigiosa dessas instituições a Academia das Ciências da França, já fundada em 1666. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) almejava a criação de uma série de tais academias na Europa toda e foi instrumental no surgimento de várias delas, inclusive as duas nas quais Euler trabalharia, a da Alemanha e a da Rússia. A criação de uma academia russa mostra a força das ideias iluministas, pois a Rússia do século XVIII era bastante subdesenvolvida, tendo um sistema socioeconômico medieval e um sistema educacional disfuncional. Patrocinada pelo czar Pedro (1672-1725), o Grande, a Academia Russa, localizada na nova capital de São Petersburgo, foi um dos elementos principais do plano do czar para a modernização da Rússia. O plano de um país modelado pela França, porém, recebeu fortes críticas por vários setores da nação que favorizavam a “eslavização” da mesma, promovendo assim sua herança eslava histórica. O conflito seria duradouro e teria consequências para o desenvolvimento do país, bem como para os cientistas estrangeiros que vieram a trabalhar na academia.

As Andanças de Euler

Ao contrário do seu contemporâneo mais jovem, Immanuel Kant (1724-1804), de quem se diz que nunca havia posto os pés fora da sua cidade natal, Euler viveu em três cidades, de três países, diferentes: Basileia e suas redondezas na Suíça de 1707 a 1727, São Petersburgo na Rússia de 1727 a 1741 e, de novo, de 1766 a 1783 e Berlim na Alemanha de 1741 a 1766.

Suíço de nascimento, Euler passou a juventude nos arredores de Basileia e foi nessa cidade que se educou, concluindo seus estudos na Universidade de Basileia em 1726. Embora seu pai havia proposto para Euler a profissão de ministro calvinista, Euler, ao ingressar na universidade, conheceu Johann Bernoulli (1667-1748), professor de matemática na referida instituição. Bernoulli reconheceu logo o talento do jovem Euler e convenceu os Euler, pai e filho, a mudar seu curso de Teologia para Matemática. Ainda em 1726, Euler submeteu um trabalho sobre a melhor maneira de afixar os mastros em embarcações marítimas à Academia da França. Não ganhou o prêmio (um prêmio, aliás, que acabaria ganhando várias outras vezes na sua carreira), mas ficou no segundo lugar, propiciando-lhe certa fama internacional. No próximo ano, submeteu uma monografia sobre a acústica para a Universidade de Basileia numa tentativa fracassada de obter a posição de professor de física dessa instituição.

Enquanto aluno, Euler fez grande amizade com os filhos de Bernoulli. Esses, através da recomendação de Leibniz, haviam conseguido posições na nova Academia de São Petersburgo, que procurava pesquisadores estrangeiros, devido ao fato de que não houve uma abundância de russos formados nas ciências. Foi através desses seus amigos que Euler recebeu o convite de se empregar na referida Academia. As publicações da Academia de São Petersburgo começaram a beneficiar-se logo com os trabalhos do jovem matemático suíço, que acabaria sendo reconhecido como um dos mais prolíficos matemáticos da história. Se relevou como um grande inovador em várias áreas da matemática, incluindo na Teoria dos Números, no Cálculo das Variações e na Análise Infinitesimal. Contribuiu

também à Álgebra, à Geometria, à Mecânica e à Astronomia, bem como outros ramos das ciências matemáticas. Teve, porém, alguns problemas de saúde, ficando cego de um olho em 1738.

Em 1734, Euler casou-se com Katharina Gsell (1707-1773), filha de um pintor originado de Basileia que morava em São Petersburgo. Katherina não estava inteiramente feliz em São Petersburgo porque temia as grandes conflagrações que assolavam, de tempos em tempos, as casas de madeira na capital russa. Isto, talvez conjuntamente com os desconfortos causados, na comunidade dos estrangeiros, pelos partidários da eslavização, levou Euler a aceitar, em 1741, o convite do Rei de Prússia, Frederico II (1712-1786), a integrar a recém fundada Academia de Berlim. Na Alemanha, Euler parece ter redobrado a sua produção, pois, não somente produziu muitos trabalhos para seu novo patrão, mas ainda mandava trabalhos para seu velho patrão em São Petersburgo. Euler também teve muito trabalho referente ao gerenciamento da Academia de Berlim, sempre, porém, nos bastidores, nunca em uma posição oficial. Embora isto o prejudicava financeiramente, o pior de tudo foi a sua má convivência com Frederico, pois o rei só prezava as ciências como instrumento de equipar o seu exército. Euler até chegou a almejar uma posição em Londres, mas acabou aceitando, em 1766, o convite de Catarina (1729-1796), a Grande, de voltar para São Petersburgo.

Já em 1771, porém, conforme os receios da sua esposa, a casa de Euler foi destruída por fogo e a família escapou viva com dificuldade. Catarina os cedeu uma nova casa, mas, nesse mesmo ano, Euler se submeteu a uma operação de catarata e, devido a complicações pós-operatórias, veio a perder, quase por completo, a visão do segundo olho. Embora quase cego, conseguiu, com a ajuda dos seus assistentes e sua prodigiosa memória, continuar suas pesquisas matemáticas no mesmo ritmo de antes, até seu falecimento em 1783.¹

A Teoria dos Números no Tempo de Euler

Segundo a conhecida análise de Weil (2001), a Teoria dos Números moderna nasceu com a publicação, por Bachet de Méziriac (1581-1638), do texto (em grego com tradução para latim) da *Aritmética* de Diofanto (c. 250) em 1621 ou, mais propriamente, com o encantamento de Pierre de Fermat (1601-1665) com essa obra. Fermat, um matemático amador francês, fez algumas descobertas interessantes sobre os números, mas, apesar de várias tentativas, não conseguiu interessar outros matemáticos da sua época nesse ramo da matemática. De fato, o tópico “quente” desse período era problemas, tanto teóricos, quanto práticos, oriundos do Cálculo e o desinteresse geral sobre a Teoria dos Números levou-a ao esquecimento. Saiu do oblévio, no entanto, em 1729 quando Christian Goldbach (1690-1764), secretário da Academia de São Petersburgo, apresentou algumas teses de Fermat ao Euler na sua correspondência.² Euler ficou tão intrigado com o assunto quanto Fermat e a

¹ Os dados das seções anteriores foram retirados de Bell (1937), Breidert (2007), Calinger (2007), Condorcet (2005), Fellmann (2007), Finkel (2007), Fuss (2005), Hoffmann (2007), Hopkins e Wilson (2007), O'Connor e Robertson (1998) e Wilson 2002.

² Goldbach morava em Moscou, Euler, como já vimos, em São Petersburgo.

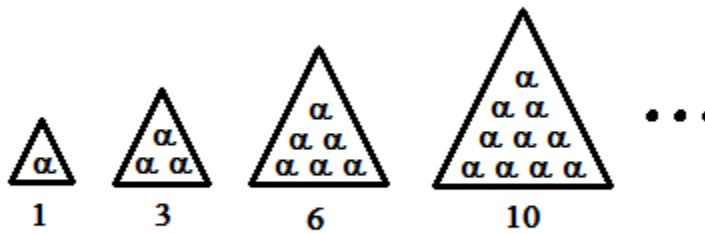
Teoria dos Números passou a ser um dos principais campos da sua pesquisa e, nas mãos dele, se revelou um assunto que merecia atenção.

Enquanto a análise de Weil esteja correta em linhas gerais, há detalhes que enriqueceriam a história. Houve, por exemplo, várias pessoas na época de Fermat que se interessaram, em maior ou menor grau, na Teoria dos Números. Como Goldbach um pouco mais tarde, Marin Mersenne (1588-1648) servia como intermediário entre vários matemáticos, incluindo Fermat, e muita da sua correspondência tinha a ver com assuntos relacionados com a Teoria dos Números. Entre seus correspondentes se numeravam René Descartes, que se interessava em números perfeitos, multiperfeitos e amigáveis, e Bernard Frenicle de Bessy (?-1675), que escreveu a pequena obra³ *Tratado sobre Triângulos Retângulos em Números Inteiros*, publicado postumamente em 1676. Também se sabe que Euler provavelmente se envolveu com a Teoria dos Números primeiramente através dos Bernoulli, embora parece que foi mesmo o contato com as ideias de Fermat que aguçou seu interesse nesse assunto.

Números Pentagonais

Os números poligonais são seqüências de números, representados por pequenos seixos ou outro artifício, postos na forma geométrica dos polígonos regulares. Foram muito estudados na antiguidade, especialmente na escola pitagórica, onde tiveram o papel de auxiliar suas especulações cosmológicas. Também eram úteis, na ausência do simbolismo algébrico, na formulação de proposições matemáticas gerais. (Ver Fossa, 1999.)

A primeira seqüência é a dos números triangulares. A Figura 1 mostra os primeiros quatro números triangulares no estilo de Nicómaco de Gerasa (1938), um matemático “grego” (Gerasa é hoje Jerash na Jordânia) do primeiro século depois do Cristo. O *gnomon*, ou seja, o que é acrescentado a um número da seqüência para obter o próximo, é o lado do próximo (isto é, o lado do precedente mais a unidade). Os números triangulares são dados pela fórmula⁴: $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$.



³ Para uma tradução dessa obra, ver Frenicle de Bessy (2014).

⁴ Claramente, as fórmulas algébricas não eram conhecidos na antiguidade.

Figura 1. Números Triangulares

O início da sequência dos números quadrados é mostrado na Figura 2. O *gnomon* do próximo número é a figura L de dois lados adjacentes (duas vezes o lado do número precedente mais a unidade). Os quadrados são dados pela fórmula: $s_n = n^2$. Ao desenhar a diagonal do quadrado, fica evidente que cada quadrado é a soma de dois triângulos sucessivos.

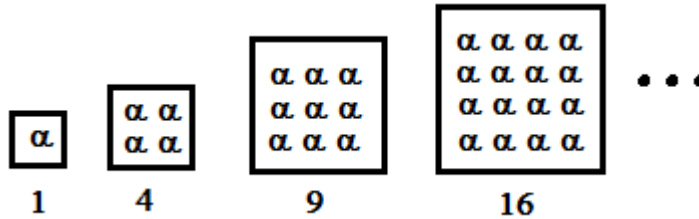


Figura 2. Números Quadrados.

Na Figura 3, mostra-se os primeiros números pentagonais. O *gnomon* do próximo é a figura formada por três lados sucessivos (três vezes o lado do precedente mais a unidade). Os números pentagonais são dados pela fórmula: $p_n = \frac{n(3n-1)}{2}$. O desenho de Nicômaco mostra que cada número pentagonal é a soma de um quadrado com o triângulo precedente, ou seja, $p_n = s_n + t_{n-1}$. Ao dividir o quadrado em dois triângulos, obtemos $p_n = t_n + 2t_{n-1}$.

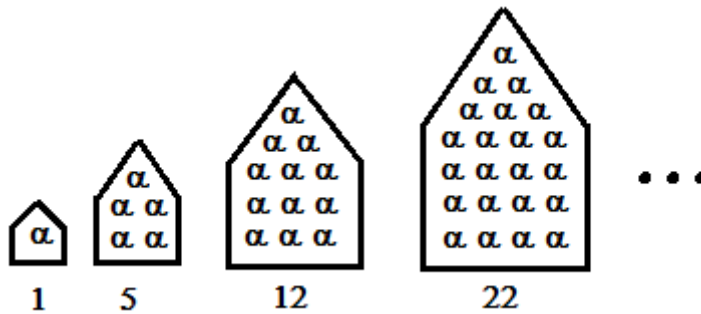


Figura 3. Números Pentagonais.

O Artigo de Euler

Logo no início do artigo Euler (1780a, E542 na classificação de Eneström⁵), aqui traduzido, faz-se uma expansão do conceito de números pentagonais. Além dos números da forma $\frac{3nn-n}{2}$, também contempla os da forma $\frac{3nn+n}{2}$. Cota e Fossa (2011) mostraram que a expansão de Euler é apropriada porque números dessa forma podem ser postos na forma geométrica de um pentágono (ver a Figura 4).

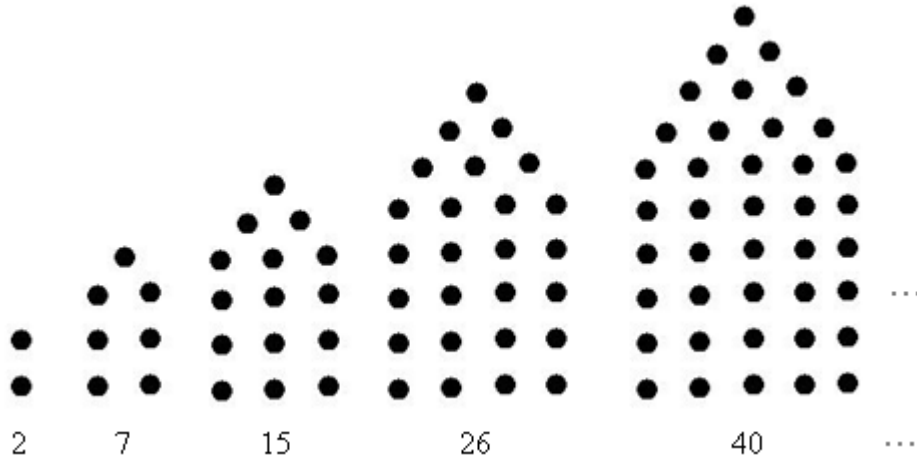


Figura 4. Números Pentagonais Adicionais.

Fonte: Cota e Fossa (2011).

Observamos que, embora os pentágonos da Figura 4 não são regulares (nem os de Nicómaco são dados de forma regular), têm várias analogias fortes com os números pentagonais propriamente ditos. O *gnomon* continua sendo três lados adjacentes, embora isto agora é três vezes o lado do precedente mais dois (em vez de mais a unidade) e em termos algébricos temos $p_n = s_n + t_n = 2t_n + t_{n-1}$. Assim é razoável denominar esses números como “pentagonais”, em analogia com os pentagonais propriamente ditos.

Em vários outros trabalhos, bem como na sua correspondência, Euler havia discutido o assim chamado Teorema dos Números Pentagonais que afirma que

$$\prod_{u=1}^{\infty} (1 - x^u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p(n)}$$

onde $p(n) = \frac{3n^2 \mp n}{2}$, os números pentagonais generalizados. Há duas demonstrações desse teorema em Euler (1780b, E541).

⁵ Trata-se de uma lista cronológica das obras de Euler, feita pelo matemático sueco Gustav Eneström (1852-1923).

O artigo aqui traduzido (E542) é uma continuação do trabalho feito em E541, pois apresenta outras propriedades nos números pentagonais generalizados e consequências do Teorema dos Números Pentagonais. Mencionamos, a título de exemplo, apenas um desses resultados aqui. Euler notou que a função $\sigma(n)$, a soma dos divisores (positivos) do inteiro positivo n , para qual ele usa a notação $\int n$, gera uma sequência irregular e, portanto, o próximo elemento da sequência não pode ser determinado a partir do precedente. Assim, ele usa os números pentagonais generalizados para definir um procedimento recursivo para determinar o próximo elemento da sequência de vários dos elementos precedentes (ver §. 5). Talvez seja mais fácil usar a propriedade multiplicativa da função σ , que também é recursiva, mas usa a decomposição em números primos, em vez dos números pentagonais, mas, mesmo assim, o resultado de Euler é intrigante.

Ao concluir, mencionamos alguns detalhes sobre o texto latino. Em geral, o estilo de Euler não é muito rebuscado e, assim, é de leitura relativamente fácil. Graficamente, utiliza as convenções de praxe em textos latinos, em que v é frequentemente usado para u e, às vezes, u para v ; i é também usado para j . Um s esticado é usado sempre que o s minúsculo não se ocorre no final de uma palavra. Usamos o símbolo f para o s esticado. O resultado, especialmente em textos antigos em que a impressão deixou de ser nítida, parece com uma palavra escrita com f . Raramente, porém, há margem para confusão. Mantemos essas convenções gráficas na nossa apresentação do texto latino. O texto original também tem uma ligatura sempre que haja a combinação ct . Não reproduzimos essa ligatura na nossa apresentação do texto.

Bibliografia

BELL, Eric Temple. 1937. *Men of Mathematics*. New York: Simon & Schuster.

BREIDERT, Wolfgang. Leonhard Euler and Philosophy. In: BRADLEY, Robert E.; SANDIFER, Edward C. (Ed.). 2007. *Leonhard Euler: Life Work and Legacy*. Amsterdam: Elsevier, p. 97-10.

CALINGER, Ronald S. Leonhard Euler: Life and Thought. In: BRADLEY, Robert E.; SANDIFER, Edward C. (Ed.). 2007. *Leonhard Euler: Life Work and Legacy*. Amsterdam: Elsevier, p. 5-60

CONDORCET, *Eulogy to Mr. Euler*. 2005. [Originalmente, 1786.] Disponível em: <<http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>>. Acesso em 20/04/2017.

COTA, Andreia Caroline da Silva, e FOSSA, John A. “Alguns Aspectos Históricos da Investigação de Leonhard Euler sobre os Números Pentagonais”. In: Carlos Henrique Barbosa, GONÇALVES; Eva Maria Siqueira, ALVES. (Ed.). 2011. *Anais do IX SNHM*.

EULER, Leonhard. 1780a. “De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium”. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitinae*. p. 56-75.

_____. "Evolutio producti infiniti $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ in seriem simplicem". 1780b. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, p. 56-75.

FELLMANN, Emil. *Leonhard Euler*. 2007. Tradução de Erika Gautschi & Walter Gautschi. Basel: Birkhäuser Verlag.

FINKEL, Benjamin. Leonhard Euler. In: William DUNHAM 2007. (Ed.). *The Genius of Euler: Reflections on his Life and Work*. Washington, DC: MAA, p. 5-12.

FOSSA, John A. "Uma Caracterização da Matemática Platônica. In: Circe Mary Silva da, SILVA (Ed.). 1999. *Anais do III Seminário Nacional de História da Matemática*. Vitória: UFES.

FRENICLE DE BESSY. *Tratado sobre Triângulos Retângulos em Números Inteiros*. 2014. Tradução e Comentário de John A. Fossa. Natal: Editora da UFRN.

FUSS, Nicolas. *Eulogy of Leonhard Euler*. 2005. Tradução de John S. D. Glaus. Disponível em: <<http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>>. Acesso em 20/04/2017.

HOFFMANN, Peter. Leonhard Euler and Russia. In: BRADLEY, Robert E.; SANDIFER, Edward C. (Ed.). 2007. *Leonhard Euler: Life Work and Legacy*. Amsterdam: Elsevier, p. 61-73.

HOPKINS, Brian, e WILSON, Robin. The Truth about Königsberg. In: BRADLEY, Robert E.; SANDIFER, Edward C. (Ed.). 2007. *Leonhard Euler: Life Work and Legacy*. Amsterdam: Elsevier, 409-420.

O'CONNOR, J. J., e ROBERTSON, E.F. Leonhard Euler. 1998. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html>>. Acesso em 20/04/2017.

WEIL, André. Euler. In: William DUNHAM (Ed.). *The Genius of Euler: Reflections on his Life and Work*. 2007. Washington, DC: MAA, p. 43-49.

_____. *Number Theory: An approach through history from Hammurapi to Legendre*. 2001. Boston: Birkhäuser.

WILSON, Robin. Euler. 2002. Disponível em: <<http://www.gresham.ac.uk/event.asp?PageId=4&EventId=67>>. Acesso em 20/04/2017.

<p>John A. Fossa Departamento de Matemática – UFRN – Campus universitário de Natal - Brasil</p>
--

DE MIRABILIBVS PROPRIETATIBVS NVMERORVM PENTAGONALIVM.

Auctore
L. EVLERO

§. 1.

Ad classẽm numerorum pentagonalium non solum eos refero, qui vulgo proprie ita nominari
tolent & in formula $\frac{3nn - n}{2}$ continentur, sed etiam eos, quos ista formula: $\frac{3nn + n}{2}$
suppeditat; ita vt formula generalis omnium horum numerorum sit $\frac{3nn \pm n}{2}$, ex qua igitur
nascitur sequens geminata numerorum series, si loco n successiue scribantur ordine numeri 0,
1, 2, 3, 4, etc.

n	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
Numeri	0,	1,	5,	12,	22,	35,	51
pentagon.	0,	2,	7,	15,	26,	40,	57

Quilibet scilicet numerus pro n assumtus duos producit numeros, quos hic sibi inuicem
subscripti, ita vt series superior contineat numeros pentagonales proprie ita dictos, inferior
vero eos, quos hic quoque ad eandẽ classẽm refero, et qui oriuntur si superior series retro
continuetur. Hic autem binos coniunctim exhibeo, qui ex eodem numero n in formula
 $\frac{3nn \pm n}{2}$
oriuntur, quoniam in sequentibus eos horum numerorum distinguemus, qui vel ex
numeris paribus vel imparibus pro n assumtis nascuntur.

SOBRE AS NOTÁVEIS PROPRIEDADES DOS NÚMEROS PENTAGONAIS

Autor
L. EULER

Tradução de: John A Fossa
e Andreia Caroline da Sila Cota

§. 1.

À classe dos números pentagonais remeto não somente os que são geralmente e, de fato, propriamente assim chamados e que são contidos na fórmula $\frac{3nn - n}{2}$, mas também os fornecidos pela fórmula $\frac{3nn + n}{2}$. Desta forma, obtemos a fórmula geral para todos esses números, $\frac{3nn \pm n}{2}$, da qual surge, portanto, quando n é dado os valores sucessivos dos números 0, 1, 2, 3, 4, etc., a seguinte sequência de números, em duas séries paralelas:

n	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
Números	0,	1,	5,	12,	22,	35,	51
pentagonais	0,	2,	7,	15,	26,	40,	57

Claramente, qualquer número tomado para n produz dois números, que registrei aqui alternadamente, de tal modo que a série superior compreende os números pentagonais propriamente ditos, enquanto a inferior contém os que remeto à mesma classe e que surgem como se formassem uma série após a superior. Aqui, contudo, exibo conjuntos os dois números que surgem do mesmo número n na fórmula $\frac{3nn \pm n}{2}$, para que podemos distinguir quais dos números nas sequências nascem quando tomamos n par e quais nascem quando tomamos n ímpar.

§. 2. Quod si hos numeros ordine magnitudinis in vnam feriem coniciamus, orietur ista progressio:

0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, etc.

cuius ordo manifestus est interruptus, quoniam progressio differentiarum hinc sit

1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, etc.

quae mixta est ex serie numerorum naturalium et imparium. At vero ista series ad continuitatem perducere potest, si post tertium quemque terminum certa fractio interpoletur.

Scilicet inter terminos 2 et 5 constituatur $\frac{10}{3}$, tum vero $\frac{28}{3}$ inter 7 et 12, porro $\frac{55}{3}$ inter 15 et 22, ita ut series completa sit

1, 2, $\frac{10}{3}$, 5, 7, $\frac{28}{3}$, 12, 15, $\frac{55}{3}$, 22, 26, etc.

sic enim series differentiarum lege continua procedet, dum erit

1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{11}{3}$, 4, etc.

Manifestum autem est, illam feriem oriri, si omnes numeri trigonales per 3 diuidantur. Hinc igitur iam pulchra se offert proprietas nostrorum numerorum pentagonalium, quod singuli ter sumti euadant numeri trigonales.

§. 3. Tales autem proprietates, quas immediate ex formulis generalibus deriuare licet, etiam in aliis numeris polygonalibus locum habere possunt, ad quas igitur non respicio; cum mihi potius propositum sit quasdam proprietates admirabiles commemorare, quibus numeri pentagonales prae omnibus reliquis polygonalibus sunt praediti. Atque hic occurrit illa insignis horum numerorum proprietas, qua iam olim ostendi, istam numerorum pentagonalium feriem tam arcte cum progressione, quam summae diuisorum numerorum naturalium constituunt, esse

§. 2. Mas se juntamos esses números em uma única série, na ordem da sua magnitude, teremos a seguinte progressão:

0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, etc.

cuja ordem é claramente irregular, pois a progressão das diferenças é

1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, etc.

que é feita por misturar a série dos números naturais e a dos ímpares. Mas, de fato, a série pode tornar-se regular, se uma certa fração é interpolada em cada terceira posição. Isto é,

entre os termos 2 e 5 coloca-se $\frac{10}{3}$, enquanto $\frac{28}{3}$ é colocado entre 7 e 12 e, por sua vez, $\frac{55}{3}$ entre 15 e 22. Desta forma, a série completa é

1, 2, $\frac{10}{3}$, 5, 7, $\frac{28}{3}$, 12, 15, $\frac{55}{3}$, 22, 26, etc.

A série das diferenças agora procede por uma lei regular, pois será

1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{11}{3}$, 4, etc.

É também claro que aquela série será obtida pela divisão dos números triangulares por 3. Em consequência, uma bela propriedade dos nossos números pentagonais aparece, a saber, cada um, tomado três vezes, é um número triangular.

§. 3. Visto que as propriedades que podem ser derivadas, de forma imediata, das fórmulas gerais também podem acontecer entre outros números figurados, não as considere aqui; pois, para mim, o propósito preferível será relatar certas propriedades admiráveis, com as quais os números pentagonais são dotados muito mais do que todos os outros números poligonais. Aqui, apresenta-se uma propriedade distintiva desses números, que eu já havia mostrado: a série de números pentagonais é tão estreitamente ligada com a progressão constituída pelas somas dos divisores dos números naturais que, com seu

connexam, vt eius ope adeo lex istius ferie maxime irregularis assignari possit, id quod breuiter repetere operae pretium erit.

§. 4. Quod si quilibet numerus N cum suis diuisoribus in vnam summam colligatur, quam summam hoc caractere: $\int N$ indicemus, ex numeris naturalibus sequens nascetur series primo intuitu maxime irregularis:

N	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
$\int N$	1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12

vbi termini tam inordinate progrediuntur, dum modo crescunt modo decrescunt, vt vix quisquam eorum legem detegat, quandoquidem ista series ordinem numerorum primorum manifesto in se innoluit.

§. 5. Interim tamen demonstrari, istam progressionem, quantumuis irregularem, ad classem ferierum recurrentium esse referendam, et singulos eius terminos secundum certam legem ex praecedentibus determinari posse. Quod si enim $\int N$ denotet summam omnium diuisorum huius numeri N, ipso non excepto, inueni semper fore

$$\int N = \int(N-1) + \int(N-2) - \int(N-5) - \int(N-7) + \int(N-12) \\ + \int(N-15) - \int(N-22) - \int(N-26) + \text{etc.}$$

vbi numeri, qui successiue ab N subtrahuntur, constituunt manifesto nostram feriem numerorum pentagonalium

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc.

auxílio, pode-se determinar uma lei para essa série muito irregular. Assim, vale a pena repeti-la brevemente aqui.

§. 4. Seja N, então, qualquer número e sejam seus divisores reunidos em uma única soma, que indicaremos pelo símbolo $\int N$. Da sequência dos números naturais, nasce uma série que, à primeira vista, parece completamente irregular:

N	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
$\int N$	1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12

Os termos dessa série avançam tão desordenadamente, ora crescendo, ora decrescendo, que neles dificilmente se descobrirá uma lei, especialmente dado o fato de que a série dos números primos é claramente neles contida.

§. 5. Apesar de tudo, entretanto, demonstrei que essa progressão, por mais irregular que pareça, deve ser incluída na classe das séries recorrentes, pois cada um dos seus termos pode ser determinado a partir dos termos anteriores através de uma certa lei. Seja, então, $\int N$ a soma de todos os divisores de N, incluindo o próprio N; sempre teremos

$$\int N = \int(N-1) + \int(N-2) - \int(N-5) - \int(N-7) + \int(N-12) \\ + \int(N-15) - \int(N-22) - \int(N-26) + \text{etc.}$$

onde os números, que são sucessivamente subtraídos de N, claramente constituem a nossa série dos números pentagonais

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc.

ita vt termini, ex numeris imparibus pro n assumtis oriundi habeant signum +, qui vero ex paribus nascuntur signum - . Tum vero, quouis casu has formulas eo vsque continuari oportet, quoad numeri post signum \int scripti non euadant negatiui; at si occurrat formula $\int(N-N)$, eius loco scribi debet ipse numerus N . Ita si sumamus $N = 12$, erit

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$$

ideoque erit

$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

At vero si sumamus $N = 13$, erit

$$\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1$$

siue erit

$$\int 13 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14.$$

§. 6. Quoniam igitur ordo, quo summae diuisorum progrediuntur, merito maxime irregularis videtur, nemini certe in mentem venire potuit, eum per numeros pentagonales explorari potuisse, ex quo ista speculatio vtique maxime est admiranda. Afferam autem adhuc aliam eiusmodi proprietatem, quae quidem cum expofita arctissime est connexa, attamen ad plures non minus admirandas proprietates perducit, quae omnes pariter in natura numerorum nostrorum pentagonalium sunt fundatae.

§. 7. Fundamentum autem omnium harum mirabilium proprietatum in euolutione huius producti infiniti:

$$S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$

(etc.);

de tal forma que os termos que são gerados, quando números ímpares são tomados para n , recebem o sinal +, enquanto os que surgem dos pares recebem o sinal -. É necessário continuar a fazer a série de somas enquanto o número escrito depois do símbolo \int não se torna negativo; e se a fórmula $\int(N-N)$ ocorrer, o próprio número N deve ser colocado no seu lugar. Se tomarmos $N = 12$, obteremos

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$$

ou seja

$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

Mas se tomarmos $N = 13$, obteremos

$$\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1$$

que será

$$\int 13 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14.$$

§. 6. Assim, embora a ordem pelo qual as somas dos divisores é disposta parece, de fato, altamente irregular e ninguém tem julgado acertadamente sobre ela, a mesma foi esclarecida pelos números pentagonais, o que é, portanto, merecidamente admirável. Agora estabelecerei, contudo, uma outra propriedade desse tipo, que é, com efeito, estreitamente ligada com a que acabei de mostrar. Ainda mais, a referida propriedade nos conduzirá a outras, não menos admiráveis, todas das quais são igualmente fundamentadas sobre a natureza dos nossos números pentagonais.

§. 7. Ainda mais, a base de todas essas notáveis propriedades é contida no desenvolvimento do seguinte produto infinito:

$$S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$

(etc.);

continetur: demonſtraui enim, ſi ſinguli hi factores actu in ſe inuicem multiplicentur, tum denique reſultare iſtam ſeriem:

$$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{ etc.}$$

vbi exponentes ipſius x conſtituunt noſtram ſeriem numerorum pentagonalium, ratione ſignorum autem $+$ et $-$ ambo alternatim geminantur, ita vt qui exponentes ex numeris paribus pro n affumtis oriuntur, eae poteſtates habeant ſignum $+$, reliqui vero ex imparibus ortis ſignum $-$. Haec igitur non minus admirationem noſtram meretur quam proprietas ante commemorata, cum nulla certe appareat ratio, vnde vllus nexus intelligi poſſit inter euolutionem illius producti et noſtros numeros pentagonales.

§. 8. Cum igitur ſeries iſta poteſtatum ipſius x aequalis ſit producto illi infinito, ſi eam nihilo aequalem ſtatuamus, vt habeamus hanc aequationem:

$$0 = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{ etc.}$$

ea omnes eaſdem inuoluet radices, quas productum illud nihilo aequatum includit. Ex primo ſcilicet factore $1-x$ erit $x = 1$; ex ſecundo factore $1-xx$ erit vel $x = +1$ vel $x = -1$; ex tertio factore $1-x^3$ naſcuntur hae tres radices:

$$1^a) x = 1, \quad 2^a) x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad 3^a) x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2};$$

ex quanto autem factore $1-x^4 = 0$ oriuntur hae quatuor radices:

$$1^o) x = +1, \quad 2^o) x = -1, \quad 3^o) x = +\sqrt{-1}, \\ \text{et } 4^o) x = -\sqrt{-1};$$

pois, demonstrei que, se cada um desses fatores é multiplicado pelos outros, o resultado final será o seguinte:

$$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{ etc.}$$

onde os expoentes de x constituem a nossa série de números pentagonais e com a ordem dos sinais $+$ e $-$ alternando em pares, de tal modo que os termos cujos expoentes surgem quando n é um número par têm o sinal $+$, enquanto os outros, cujos expoentes são gerados por ímpares, têm o sinal $-$. Essa propriedade, então, não merece menor admiração nossa que as outras consideradas acima, pois, de fato, não há razão aparente que pudesse levar-nos a pensar que haja qualquer ligação entre o desenvolvimento desse produto e nossos números pentagonais.

§. 8. Igualando a série dessas potências de x a zero, obtemos a seguinte equação:

$$0 = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{ etc.}$$

Mas, visto que a referida série é igual àquele produto infinito, ela terá todas as mesmas raízes que são incluídas naquele produto, igualado a zero. Isto é, do primeiro fator, $1-x$, teremos $x = 1$; do segundo fator, $1-xx$, teremos ou $x = 1$ ou $x = -1$; do terceiro fator, $1-x^3$, surgem as seguintes três raízes:

$$1^a) x = 1, \quad 2^a) x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad 3^a) x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2};$$

Ainda mais, do quarto fator, $1-x^4 = 0$, surgem essas quatro raízes:

$$1^a) x = +1, \quad 2^a) x = -1, \quad 3^a) x = +\sqrt{-1},$$

e $4^a) x = -\sqrt{-1};$

quintus autem factor $1-x^5 = 0$ suppeditat has quique radices:

$$1^\circ) x = 1, \quad 2^\circ) x = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$3^\circ) x = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$4^\circ) x = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$5^\circ) x = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4};$$

ſextus autem factor praebet has ſex radices:

$$1^\circ) x = 1, \quad 2^\circ) x = -1, \quad 3^\circ) x = \frac{+1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$4^\circ) x = \frac{+1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad 5^\circ) x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$6^\circ) x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad \text{etc., etc.}$$

§. 9. Hinc igitur patet, omnes radices cuiuscunque poteſtatis ex vnitate ſimul eſſe radices noſtrae aequationis. Ac ſi rem in genere conſideremus, ponendo $1-x^n = 0$, primo patet, vnam radicem ſemper eſſe $x = 1$, ac ſi n fuerit numerus par, aliam radicem fore $x = -1$. Pro reliquis autem radicibus conſiderari debent factores trinomiales formulae $1-x^n$, qui, vti alibi fatiſ eſt expoſitum, in hac forma generali continentur:

$$1 - 2x \cos \frac{2i\pi}{n} + x^2,$$

ſumendo pro i ſucceſſiue omnes numeros integros ipſo $\frac{1}{2}n$ non maiores.

Hoc autem factore nihilo aequato eruuntur iſtae duae radices:

de novo, o quinto fator, $1-x^5 = 0$, fornece essas cinco raízes:

$$1^a) x = 1, \quad 2^a) x = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$3^a) x = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$4^a) x = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$5^a) x = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4};$$

mais ainda, o sexto fator fornece as seguintes seis raízes:

$$1^a) x = 1, \quad 2^a) x = -1, \quad 3^a) x = \frac{+1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$4^a) x = \frac{+1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad 5^a) x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$6^a) x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad \text{etc., etc.}$$

§. 9. Disto, é claro que todas as raízes de qualquer potência da unidade são ao mesmo tempo raízes da nossa equação. E, de fato, se considerarmos um fator arbitrário, pondo $1-x^n = 0$, será claro, em primeiro lugar, que uma raiz sempre será $x = 1$ e, ainda, se n for um número par, uma outra raiz será $x = -1$. Para as raízes restantes, os fatores trinômiais da fórmula $1-x^n$ devem ser considerados; esses, como foi explicado de modo satisfatório noutra lugar, são compreendidos pela forma geral:

$$1 - 2x \cos \frac{2i\pi}{n} + x^2,$$

tomando por i , sucessivamente, todos os números inteiros não maiores que $\frac{1}{2}n$.

E, quando esse fator é igualado a zero, as seguintes duas raízes são extraídas:

$$x = \text{cof. } \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ fen. } \frac{2i\pi}{n} \quad \text{et}$$

$$x = \text{cof. } \frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1} \text{ fen. } \frac{2i\pi}{n} .$$

Hinc enim viciffim fit

$$x^n = \text{cof. } 2i\pi \pm \sqrt{-1} \text{ fen. } 2i\pi.$$

Eft autem cof. $2i\pi = 1$ e fen. $2i\pi = 0$, ideoque $x^n = 1$, vnde, fi pro n et i fucceffive omnes numeri integri accipiantur, haec forma:

$$x = \text{cof. } \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \text{ fen. } \frac{2i\pi}{n}$$

praebebit omnes radices noftrae aequationis

$$0 = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{ etc.}$$

ita vt iftius aequationis omnes plane radices affignare valeamus.

§. 10. Quod fi ergo omnes radices iftius aequationis litteris α , β , γ , δ , ϵ , etc.

indicemus, eius factores erunt $\frac{1-x}{\alpha}$, $\frac{1-x}{\beta}$, $\frac{1-x}{\gamma}$, $\frac{1-x}{\delta}$, etc. vnde ex natura aequationum

colligimus fore fummam omnium harum fractionum: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{ etc.} = 1$, fummam vero productorum ex binis $= -1$, tum vero fummam productorum ex ternis $= 0$, fummam productorum ex quaternis $= 0$, fummam productorum ex quinis $= -1$, fummam productorum ex fenis $= 0$, fummam productorum ex feptenis $= -1$, etc.

$$x = \cos \frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2i\pi}{n} \quad \text{e}$$

$$x = \cos \frac{2i\pi}{n} - \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2i\pi}{n} .$$

Disto, obtemos

$$x^n = \cos 2i\pi \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2i\pi.$$

Mas, $\cos 2i\pi = 1$ e $\operatorname{sen} 2i\pi = 0$ e, portanto, $x^n = 1$, do qual temos que, pondo sucessivamente todos os números inteiros para n e i , a forma

$$x = \cos \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2i\pi}{n}$$

fornece todas as raízes da nossa equação

$$0 = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}$$

Desta maneira, podemos claramente determinar todas as raízes da referida equação.

§. 10. Agora, se indicarmos todas as raízes dessa equação pelas letras α , β , γ , δ , ϵ ,

etc., seus fatores serão $\frac{1-x}{\alpha}$, $\frac{1-x}{\beta}$, $\frac{1-x}{\gamma}$, $\frac{1-x}{\delta}$, $\frac{1-x}{\epsilon}$, etc., do qual, pela natureza de equações, concluímos o que será a soma de todas as seguintes frações, isto é, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\epsilon} + \dots = 1$; de fato, a soma dos produtos tomados de dois em dois = -1 , enquanto a soma dos produtos de três em três = 0 , a soma dos produtos de quatro em quatro = 0 , a soma dos produtos de cinco em cinco = -1 , a soma dos produtos de seis em seis = 0 , a soma dos produtos de sete em sete = -1 , etc.

Hinc autem porro concludimus fore summam quadratorum illarum fractionum, scilicet

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \text{etc.} = 3,$$

summam cuborum

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\delta^3} + \text{etc.} = 4,$$

summam biquadratorum

$$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\gamma^4} + \frac{1}{\delta^4} + \text{etc.} = 7,$$

et ita porro; vbi quidem nullus ordo perficitur.

§. 11. Quod autem hic de fractionibus $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma},$ etc. diximus, etiam de ipsius radicibus $\alpha, \beta, \gamma,$ etc. valet. Si enim α fuerit radix nostrae aequationis, per ea quae ostendimus haec radix continetur in hac formula:

$$\text{cof. } \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \text{ fin. } \frac{2i\pi}{n} .$$

Hinc autem fit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\text{cof. } \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \text{ fin. } \frac{2i\pi}{n}}$$

$$= \text{cof. } \frac{2i\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \text{ fin. } \frac{2i\pi}{n} ,$$

Disto podemos concluir, por sua vez, o que é a soma dos quadrados dessas frações, a saber,

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \text{etc.} = 3,$$

a soma dos cubos

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\delta^3} + \text{etc.} = 4,$$

a soma dos biquadrados

$$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\gamma^4} + \frac{1}{\delta^4} + \text{etc.} = 7,$$

e assim por diante; nisto, com certeza, nenhuma ordem é aparente.

§. 11. O que havíamos dito sobre as frações $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, etc., também vale para as próprias raízes α, β, γ , etc. Pois, se α for uma raiz da nossa equação, essa raiz, através do que havíamos mostrado acima, será contida na seguinte fórmula:

$$\cos \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2i\pi}{n}.$$

Disto, faz-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\cos \frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2i\pi}{n}} \\ &= \cos \frac{2i\pi}{n} \mp \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2i\pi}{n}, \end{aligned}$$

quae itidem est radix nostrae aequationis; unde patet, si $\frac{1}{\alpha}$ fuerit radix nostrae aequationis; etiam α fore radicem.

§. 12. Denotet igitur α radicem quamcunque aequationis $1-x^n = 0$, quandoquidem tum etiam erit radix nostrae aequationis

$$1-x-x^5+x^7-x^{12}-x^{15} + \text{etc.} = 0$$

tum igitur erit $\alpha^n = 1$. Praeterea vero etiam omnes potestates ipsius α radices simul erunt aequationis $1-x^n = 0$. Si enim loco x scribamus $\alpha\alpha$ fiet $1-x^n = 1-\alpha^{2n}$. Cum autem sit $\alpha^n = 1$, patet etiam fore $\alpha^{2n} = 1$, ideoque $1-x^{2n} = 0$, quod idem manifestum est de cubo α^3 et omnibus potestatibus altioribus. Hinc igitur sequitur fore

$$\alpha^{n+1} = \alpha \quad \text{e} \quad \alpha^{n+2} = \alpha\alpha \quad \text{e} \quad \alpha^{n+3} = \alpha^3.$$

Sicque in genere erit $\alpha^{in+\lambda} = \alpha^\lambda$.

§. 13. Si igitur α denotet radicem quamcunque nostrae aequationis, ita ut sit $\alpha^n = 1$, si in ea loco x scribamus α , certe euadet haec series:

$$1-\alpha^1-\alpha^2+\alpha^5+\alpha^7-\alpha^{12}-\alpha^{15}+\alpha^{22} + \text{etc.} = 0.$$

Praeterea vero etiam ponendo $x = \alpha\alpha$ erit

$$1-\alpha^2-\alpha^4+\alpha^{10}+\alpha^{14}-\alpha^{24}-\alpha^{30}+\alpha^{44} + \text{etc.} = 0,$$

et in genere si loco x scribamus α^i , denotante i numerum quemcunque integrum, etiam fiet

$$1-\alpha^i-\alpha^{2i}+\alpha^{5i}+\alpha^{7i}-\alpha^{12i}-\alpha^{15i}+\alpha^{22i} + \text{etc.} = 0.$$

que é também uma raiz da nossa equação. Disto, é claro que, se $\frac{1}{\alpha}$ for uma raiz da nossa equação, α também será uma raiz.

§. 12. Seja, portanto, α uma raiz qualquer da equação $1-x^n = 0$. Em consequência, α será também uma raiz da nossa equação

$$1-x-x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+ \text{etc.} = 0$$

e teremos $\alpha^n = 1$. Mais ainda, todas as potências desta α também serão raízes da equação $1-x^n = 0$. Assim, se escrevermos $\alpha\alpha$ no lugar de x , teremos $1-x^n = 1-\alpha^{2n}$. Mas, visto que $\alpha^n = 1$, é evidente que $\alpha^{2n} = 1$ e, portanto, $1-x^{2n} = 0$. É claro que o mesmo acontece com α^3 e todas as potências maiores. Disto, então, resulta que

$$\alpha^{n+1} = \alpha \quad \text{e} \quad \alpha^{n+2} = \alpha\alpha \quad \text{e} \quad \alpha^{n+3} = \alpha^3.$$

Assim, em geral, temos $\alpha^{in+\lambda} = \alpha^\lambda$.

§. 13. Se, portanto, α denotar qualquer raiz da nossa equação, de tal forma que $\alpha^n = 1$, e se escrevermos α no lugar de x , o resultado certamente será a seguinte série:

$$1-\alpha^1-\alpha^2+\alpha^5+\alpha^7-\alpha^{12}-\alpha^{15}+\alpha^{22}+ \text{etc.} = 0.$$

Ainda mais, pondo $x = \alpha\alpha$, teremos

$$1-\alpha^2-\alpha^4+\alpha^{10}+\alpha^{14}-\alpha^{24}-\alpha^{30}+\alpha^{44}+ \text{etc.} = 0,$$

e, em geral, se escrevermos α^i no lugar de x , sendo i qualquer inteiro, obteremos

$$1-\alpha^i-\alpha^{2i}+\alpha^{5i}+\alpha^{7i}-\alpha^{12i}-\alpha^{15i}+\alpha^{22i}+ \text{etc.} = 0.$$

Atque hoc etiam valebit, si pro i numeri negativi accipiantur, si quidem ostendimus, radices

$$\text{quoque esse } \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\alpha^4}, \frac{1}{\alpha^5}, \text{ etc.}$$

§. 14. Quoniam hic assumimus α esse radicem aequationis $1-x^n = 0$, percurramus ordine casus, quibus est n vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, etc. Ac primo quidem, si $n = 1$, necessario est $\alpha = 1$, quo valore substituto nostra aequatio generalis induet hanc formam:

$$1-1-1+1+1-1-1+1+ \text{ etc.}$$

quae series manifesto ex infinitis periodis conflatur, quarum singulae continent hos terminos: $1-1-1+1$, unde cuiusque periodi valor est $= 0$, ideoque etiam infinitae periodi simul summi summam habebunt $= 0$. Quoniam autem continuata concipi debet, si percursis iam infinitis periodis insuper vnus terminus accedat, summa erit $= 0$; si tres accedant, summa erit -1 et si quatuor accedant $= 0$, quo casu tota periodus est adiecta; quare, cum numerus infinitus nusquam terminetur, summa seriei infinitae medium tenebit inter 4 summas modo memoratas $1, 0, -1, 0$, quod medium reperitur, si aggregatum harum quatuor summarum per numerum, hoc est per quaternarium diuidatur; tum autem manifesto prodit 0 , quae ergo vera censenda est summa nostrae seriei.

§. 15. Simile scilicet ratiocinium hic adhiberi potest, quo vulgo ostendi solet

summam seriei *Leibnizianae* $1-1+1-1+1-1+1-1+ \text{ etc.}$ esse $= \frac{1}{2}$; hoc autem concessio veritas praesentis

E isto também valerá se aceitarmos números negativos para i , em qual caso, como

havíamos, na verdade, mostrado, as raízes serão $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\alpha^4}$, $\frac{1}{\alpha^5}$, etc.

§. 14. Visto que assumimos que α é raiz da equação $1-x^n = 0$, percorremos, em ordem, os casos em que n ou é 1 ou 2, ou 3, ou 4, etc. E, de fato, no primeiro, quando $n = 1$, é necessário que $\alpha = 1$. Esse valor, substituído em nossa equação geral, produz a seguinte forma:

$1-1-1+1+1-1-1+1+$ etc.

Essa série é claramente composta de um número infinito de períodos, cada um dos quais contém os seguintes termos: $1-1-1+1$, onde o valor de cada período = 0 e, portanto, os infinitos períodos também terão a soma = 0. Isto deve ser entendido pela formação de séries. Pois, se os infinitos períodos depois de um termo são percorridos, a soma será = 0; se depois de três, a soma será -1 e, se depois de quatro, = 0. No último caso, o período todo é somado. Por isso, visto que um número infinito é nunca completado, a soma da série infinita será a média entre as quatro somas que acabamos de considerar, ou seja, 1, 0, -1, 0. A referida soma é achada, somando esses quatro números e dividindo por quatro. Isto claramente resulta em 0, o que, portanto, é julgado a soma correta da nossa série.

§. 15. Aparentemente pode-se aplicar um raciocínio semelhante para mostrar que a

soma da chamada série *leibniziana*, $1-1+1-1+1-1+1-1+$ etc., é = $\frac{1}{2}$. Mas, admitindo isto, a

afferti sponte elucet. Cum enim fit

$$1-1+1-1+1-1+ \text{ etc.} = \frac{1}{2}, \text{ erit}$$

$$-1+1-1+1-1+1- \text{ etc.} = -\frac{1}{2}.$$

ergo combinandis his duabus feriebus erit

$$1-1-1+1+1-1-1+1+1-1- \text{ etc.} = 0.$$

§. 16. Consideremus nunc casum quo $n = 2$ et $\alpha\alpha = 1$, vbi quidem est α vel $+1$ vel -1 . Retineamus autem litteram α pro vtrauis earum designanda, et cum fit

$$\alpha^3 = \alpha, \quad \alpha^4 = 1, \quad \alpha^5 = \alpha, \quad \alpha^6 = 1, \text{ etc.}$$

facta substitutione nostra aequatio generalis hanc induet formam:

$$1-\alpha-1+\alpha+\alpha-1-\alpha+1 \mid +1-\alpha-1+\alpha+\alpha-1-\alpha+1 \text{ etc.}$$

quae series pariter per certas periodos progreditur, quae continuo replicantur, atque vnaquaeque earum constat ex his octo terminis:

$$1-\alpha-1+\alpha+\alpha-1-\alpha+1,$$

quorum summa est 0, sicque numerus quantumvis magnus talium integrarum periodorum certe euanescit. At si vero insuper vnus, vel duo, vel 3, vel ad eo 8 termini accedant, summae sequenti modo se habebunt:

verdade da presente afirmação é facilmente vista. Pois, como temos

$$1-1+1-1+1-1+ \text{ etc.} = \frac{1}{2}, \text{ teremos}$$

$$-1+1-1+1-1+1- \text{ etc.} = -\frac{1}{2}.$$

E, portanto, combinando essas duas séries, obteremos

$$1-1-1+1+1-1-1+1+1-1- \text{ etc.} = 0.$$

§. 16. Consideremos agora o caso em que $n = 2$ e $\alpha\alpha = 1$, de tal modo que α é ou $+1$ ou -1 . Usaremos a letra α para designar qualquer um desses valores arbitrariamente e, como teremos

$$\alpha^3 = \alpha, \quad \alpha^4 = 1, \quad \alpha^5 = \alpha, \quad \alpha^6 = 1, \text{ etc.,}$$

feitas as substituições, nossa equação geral assume a seguinte forma:

$$1-\alpha-1+\alpha+\alpha-1-\alpha+1 \mid +1-\alpha-1+\alpha+\alpha-1-\alpha+1 \text{ etc.}$$

Essa série progride regularmente em certos períodos, que são repetidos continuamente, sendo que cada um deles consiste dos oito termos seguintes:

$$1-\alpha-1+\alpha+\alpha-1-\alpha+1,$$

cuja soma é 0, de tal modo que, tão grande que seja o número de tais períodos completos, a soma certamente desaparecerá. E se, de fato, a soma for feita depois de um, ou dois, ou 3, ou até os 8 termos, teremos exatamente as seguintes somas:

fi infuper accedat fumma erit		
vnus terminus -	1	
duo - - -		1- α
tres - - -		- α
quatuor - -		0
quinque - -		α
fex - - -		$\alpha-1$
septem - - -	-1	
octo - - -		0

quarum octo fummarum aggregatum est 0, vnde tuto concludimus totius huius seriei, quam inuenimus, in infinitum continuatae fummam esse = 0.

§. 17. Hinc patet, fummam huius seriei periodicae perinde nihilo aequari, quemcunque valorem habuerit littera α ; verus enim valor ipfius α , quo est $\alpha\alpha = 1$, iam in confiderationem est ductus, dum ipfae periodi ex eo funt natae; quamobrem haec series in duas partes difpesci potest, quarum altera contineat folas vnitates, altera vero folas litteras α ; ac necesse est, vt vtriusque fumma feorfim nihilo fiat aequalis, ita vt fit

$$1-1-1+1, 1-1-1+1, 1-1-1+1, \text{etc.} = 0$$

$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \text{etc.} = 0.$$

vtriusque autem veritas ex pofitis principiis fit manifesta.

§. 18. Simili modo res fe habebit in radicibus cubicis ipfius 1, ponendo $\alpha^3 = 1$, et quoniam periodi ad plures terminos excurrent, feriem generalem per binos terminos fibi fubfcriptos referamus, vt fit in genere

$$\left. \begin{array}{l} 1-\alpha+\alpha^5-\alpha^{12}+\alpha^{22}-\alpha^{35} \text{etc.} \\ -\alpha^2+\alpha^7-\alpha^{15}+\alpha^{26}-\alpha^{40} \text{etc} \end{array} \right\} = 0$$

se depois de	a soma será
um termo -	1
dois - - -	1- α
três - - -	- α
quatro - -	0
cinco - - -	α
seis - - -	$\alpha-1$
sete - - -	-1
oito - - -	0

A soma desses oito é 0, de que concluímos seguramente que, como havíamos achado acima, a soma da série inteira, continuada ao infinito, é = 0.

§. 17. Disto, é claro que a soma dessa série periódica sempre será zero, qualquer que seja os dois valores que a letra α assumir; pois o verdadeiro valor desse α foi revelado, para $\alpha = 1$, uma vez que esses períodos surgiram da referida condição. Desta forma, a série pode ser dividida em duas partes, uma das quais só contém unidades e a outra, só letras α . E, de fato, é necessário que cada uma das seguintes somas seja igual a zero:

$$1-1-1+1, 1-1-1+1, 1-1-1+1, \text{ etc.} = 0$$

$$-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \text{ etc.} = 0.$$

É claro que isto é verdadeiro para ambas as séries dos princípios já estabelecidos.

§. 18. Acontece de forma semelhante com as raízes cúbicas de 1. Pomos $\alpha^3 = 1$ e, visto que os períodos consistirão de muitos termos, reproduzimos a série geral através de dois termos por vez, sendo um escrito por baixo do outro, de tal forma que temos, em geral,

$$\left. \begin{array}{l} 1-\alpha+\alpha^5-\alpha^{12}+\alpha^{22}-\alpha^{35} \text{ etc.} \\ -\alpha^2+\alpha^7-\alpha^{15}+\alpha^{26}-\alpha^{40} \text{ etc.} \end{array} \right\} = 0$$

John A. Fossa.

Quod si iam fumatur $\alpha^3 = 1$, vt fit

$\alpha^4 = \alpha$, $\alpha^5 = \alpha^2$, $\alpha^6 = 1$, $\alpha^7 = \alpha$, etc.

prodibit fequens progreffio periódica:

$$\begin{array}{l} 1-\alpha+\alpha^2-1+\alpha-\alpha^2+1 \quad | \quad -\alpha+\alpha^2-1+\alpha-\alpha^2+1 \quad | \quad \text{etc.} \\ -\alpha^2+\alpha-1+\alpha^2-\alpha \quad | \quad +1-\alpha^2+\alpha-1+\alpha^2-\alpha \quad | \quad +1 \end{array}$$

nihilo aequalis, vbi quaelibet periodus constat duodecim terminis triplicis generis, fcilicet 1, α , α^2 . Ac facile apparet, terminos cuiusque generis feorfim fumtos feriem exhibere nihilo aequalem, vnitates enim conftituunt hanc feriem:

$$1-1-1+1, 1-1-1+1, 1-1-1+1, \text{ etc.} = 0$$

litterae vero α et $\alpha\alpha$ conftituunt fequentes series:

$$\begin{array}{l} -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \text{ etc.} = 0 \\ -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \\ \text{etc.} = 0. \end{array}$$

Harum autem fingularum fummas nihilo aequales effe manifeflum eft.

§. 19. Conſideremus porro etiam radices biquadratas vnitatis, fitque $\alpha^4 = 1$, ac prodibit fequens feries periodica:

$$\begin{array}{l} 1-\alpha+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^3-\alpha^2+1 \quad | \quad -\alpha+\alpha-1+ \text{ etc.} \\ -\alpha^2+\alpha^3-\alpha^3+\alpha^2-1+\alpha-\alpha \quad | \quad +1-\alpha^2+\alpha^3-\alpha^3+ \text{ etc.} \end{array}$$

vbi fingulae periodi conftant ex fedecim terminis, qui ad quatuor genera relati praebent fequentes quatuor series, fingulas nihilo aequales:

Mas, visto que $\alpha^3 = 1$, temos

$$\alpha^4 = \alpha, \alpha^5 = \alpha^2, \alpha^6 = 1, \alpha^7 = \alpha, \text{ etc.}$$

Isto produzirá a seguinte progressão periódica:

$$\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha^2 - 1 + \alpha - \alpha^2 + 1 \quad | \quad -\alpha + \alpha^2 - 1 + \alpha - \alpha^2 + 1 \quad | \quad \text{etc.} \\ -\alpha^2 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha \quad | \quad +1 - \alpha^2 + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha \quad | \quad +1 \end{array}$$

a qual é igual zero. Cada período da referida progressão consiste em doze termos de três tipos gerais, a saber, 1, α , α^2 . Assim, será fácil exibir os termos de cada tipo, tomados separadamente, como uma série igual a zero. As unidades, de fato, formam a série

$$1 - 1 - 1 + 1, 1 - 1 - 1 + 1, 1 - 1 - 1 + 1, \text{ etc.} = 0$$

enquanto as letras α e $\alpha\alpha$ constituem as seguintes séries:

$$\begin{array}{l} -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, -\alpha + \alpha + \alpha - \alpha, \text{ etc.} = 0 \\ -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2, -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2, -\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha^2, \\ \text{etc.} = 0. \end{array}$$

É claro que a soma de cada uma dessas séries é igual a zero.

§. 19. Agora consideremos as raízes biquadráticas da unidade, isto é, $\alpha^4 = 1$, o que produzirá a seguinte série periódica:

$$\begin{array}{l} 1 - \alpha + \alpha - 1 + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^3 - \alpha^2 + 1 \quad | \quad -\alpha + \alpha - 1 + \text{ etc.} \\ -\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha^2 - 1 + \alpha - \alpha \quad | \quad +1 - \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^3 + \text{ etc.} \end{array}$$

em que cada período consiste de dezesseis termos, composto de quatro tipos, que produzem as seguintes quatro séries, sendo cada uma igual a zero:

$$\begin{aligned}
 &1-1-1+1, \quad 1-1-1+1, \quad 1-1-1+1, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \quad -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \quad -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \\
 &\text{etc.} = 0. \\
 &+\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3, \quad +\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3, \quad +\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3, \\
 &\text{etc.} = 0.
 \end{aligned}$$

§. 20. Quamquam hinc nostra conclusio pro radicibus altioribus iam satis est confirmata, tamen necesse est insuper casum, quo $\alpha^5 = 1$, euoluere, quandoquidem hic non omnes potestates quinta inferiores occurrent. Sit igitur $\alpha^5 = 1$ et haec series periodica prodibit:

$$\begin{array}{l}
 1-\alpha+1-\alpha^2+\alpha^2-1+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^2+1 \quad | \quad -\alpha+1 \\
 -\alpha^2+\alpha^2-1+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^2+1-\alpha \quad | \quad +1-\alpha^2+\alpha^2 \quad \text{etc.}
 \end{array}$$

vbi potestates α^3 et α^4 penitus excluduntur. Quare cum quaelibet periodus 20 constet terminis, reliquae potestates saepius occurrant necesse est; singulis autem serofim sumtis tres sequentes series periodicae occurrunt:

$$\begin{aligned}
 &1+1-1-1-1-1+1+1, \quad 1+1-1-1-1-1+1+1, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \quad -\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2 \\
 &\text{etc.} = 0.
 \end{aligned}$$

Hinc iam veritas seriei ipsarum α ex praecedentibus est manifesta; binae reliquae autem, quarum periodi octo terminis constant, si secundum principia hactenus stabilita examinentur, etiam nihilo aequales deprehendentur, quoniam non solum termini solius periodi se mutuo destruunt, sed etiam termini seriei summatricis inde formatae. Ita ex serie vnitatum oritur haec series summatricis:

$$\begin{aligned}
 &1-1-1+1, \quad 1-1-1+1, \quad 1-1-1+1, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \quad -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \quad -\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \\
 &\text{etc.} = 0. \\
 &+\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3, \quad +\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3, \quad +\alpha^3-\alpha^3-\alpha^3+\alpha^3, \\
 &\text{etc.} = 0.
 \end{aligned}$$

§. 20. Embora a nossa conclusão já pareça estar suficientemente confirmada para raízes maiores, mesmo assim é necessário desenvolver mais um caso, o em que $\alpha^5 = 1$, visto que nesse caso nem todos as potências menores que a quinta ocorrem. Seja, portanto, $\alpha^5 = 1$ e a seguinte série periódica será produzida:

$$\begin{aligned}
 &1-\alpha+1-\alpha^2+\alpha^2-1+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^2+1 \Big| -\alpha+1 \\
 &-\alpha^2+\alpha^2-1+\alpha-1+\alpha^2-\alpha^2+1-\alpha \Big| +1-\alpha^2+\alpha^2 \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

de que as potências α^3 e α^4 são completamente excluídas. Como um período qualquer consiste de 20 termos, as outras potências têm de aparecer mais frequentemente; assim, tomando cada uma delas separadamente, obtemos as seguintes três séries periódicas:

$$\begin{aligned}
 &1+1-1-1-1-1+1+1, \quad 1+1-1-1-1-1+1+1, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad -\alpha+\alpha+\alpha-\alpha, \quad \text{etc.} = 0 \\
 &-\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2, \quad -\alpha^2+\alpha^2-\alpha^2+\alpha^2 \\
 &\text{etc.} = 0.
 \end{aligned}$$

A verdade sobre a série contendo α é evidente do que já temos visto. As duas séries restantes, cujos períodos contêm oito termos, se examinadas de acordo com os princípios estabilizados acima, serão reconhecidas como sendo iguais a zero. Pois, não é o caso somente que os termos de cada série se cancelam, mas também que os termos da série de submatrizes do que é formada. Assim, da série das unidades surge a seguinte série submatriz:

1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0:

cuius summa itidem euaneſcit, quod idem vſu venit in ferie quadratorum.

§. 21. Ex his iam abunde patet, eandem proprietatem etiam in radicibus altioribus locum eſſe habituram, ex quotcunque etiam terminis ſingulae periodi fuerint compoſitae; quod certe eo magis eſt mirandum, cum iſta proprietas in nullas alias ferieſ poteſtatum competere poſſit, atque penitus propria ſit ferieſ numerorum pentagonalium.

§. 22. Vt autem rem in genere ob oculos ponamus, ſit $\alpha^n = 1$, vnde naſcuntur periodi ex $4n$ terminis conſtantes, qui erunt vel 1, vel α , vel α^2 , vel α^3 , etc. Plerumque autem non omnes poteſtates inferiores quam α^n occurrent, vnde periodi ſingularum poteſtatum ipliuſ α plerumque pluribus quam 4 terminis conſtabunt. Semper autem non ſolum ipſi termini cuiuſque periodi ſe mutuo deſtruent, ſed etiam termini ferieſ ſummatriciſ. Ita ſi conſideremus poteſtates α^r , exiſtente r numero minore quam n , ex ferie noſtra numerorum pentagonalium omnes excerptantur termini, qui per n diuiſi hoc idem reſiduum r relinquunt. Ac ſi cuique horum terminorum ſuum debitum ſignum praefigatur, talis prodibit ferieſ:

$$\pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \alpha^r \pm \text{etc.}$$

quae ſemper ex certis periodis ratione ſignorum + et - conſtabit, idque ita, vt cuiuſque periodi omnes termini ſimul ſumti ſe mutuo deſtruant atque idem etiam in ferie ſummatrice eueniat.

§. 23. Verum hae proprietates hactenus commemoratae inſuper innumerabiles alias non minus admirandas poſt ſe trahunt. Si enim α fuerit radix cuiuſque poteſtatiſ n ex $\frac{x}{1-\alpha}$ vnitatiſ, ita vt $1-\alpha$ ſit factor formulae $1-x^n$, euidens eſt, eum etiam fore factorem formularum $1-x^{2n}$, $1-x^{3n}$, $1-x^{4n}$, etc. in infinitum. Quare, cum hae formulae omnes ſint factoreſ noſtrae progreſſioniſ

1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0,

cuja soma se anula; o mesmo acontece na série de quadrados.

§. 21. De tudo isto, está bastante claro que a mesma propriedade valerá também para as potências mais altas, independentemente do número de termos dos quais os períodos são compostos. Isto merece grande admiração, pois a referida propriedade não inere em qualquer outra série, sendo assim uma propriedade profunda da série dos números pentagonais.

§. 22. Para esclarecer o caso geral, seja $\alpha^n = 1$, de que surge períodos contendo $4n$ termos, os quais serão ou 1, ou α , ou α^2 , ou α^3 , etc. Geralmente, porém, nem todas as potências menores que α^n ocorrerão, onde os períodos de cada potência desse α conterão mais que 4 termos. Sempre acontece, no entanto, que os termos, não somente de cada período, mas também os termos da série submatriz, se cancelam. Assim, se consideramos as potências α^r , sendo r um número menor que n , separamos, da nossa série de números pentagonais, todos os termos que, quando dividido por n , deixam r como resto. E, se prefixarmos a cada um desses termos seu devido sinal, a seguinte série será produzida:

$\pm\alpha^r \pm\alpha^r \pm\alpha^r \pm\alpha^r \pm\alpha^r \pm\alpha^r \pm\alpha^r \pm\alpha^r \pm$ etc.

A série sempre consistirá de certos períodos com uma regra para os sinais + e - de tal modo que todos os termos de cada período, tomados conjuntamente, se cancelam e, ainda mais, os termos na série submatriz também se cancelam.

§. 23. Não obstante a beleza das propriedades consideradas acima, há ainda muitas outras, não menos notáveis, que podem ser deduzidas. Se, por exemplo, α for uma n -ésima raiz da unidade, de tal modo que $1 - \frac{x}{\alpha}$ seja um fator de $1 - x^n$, é claro que ele também será um fator das fórmulas $1 - x^{2n}$, $1 - x^{3n}$, $1 - x^{4n}$, etc., até infinidade. Desta forma, como todas essas fórmulas são fatores da nossa progressão

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - \text{etc.}$$

eadem radix α in hac aequatione non tantum semel sed adeo infinities occurrit, ita vt ista aequatio infinitas habeat radices ipsi α aequales.

§. 24. Nouimus autem ex natura aequationum, si aequatio quaecunque

$$1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$

habeat duas radices aequales α , tum etiam α fore radicem aequationis per differentiationem natae, scilicet:

$$A + 2Bx + 3Cxx + 4Dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

ac si habeat tres radices aequales α , tum insuper α quoque erit radix istius aequationis per differentiationem natae, postquam scilicet illam aequationem differentialem per x multiplicauerimus

$$1^2 \cdot A + 2^2 \cdot Bx + 3^2 \cdot Cxx + 4^2 \cdot Dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde si haec aequatio habuerit λ radices aequales, quae singulae sint $= \alpha$, semper erit

$$1^\lambda \cdot A + 2^\lambda \cdot B\alpha + 3^\lambda \cdot C\alpha\alpha + 4^\lambda \cdot D\alpha^3 + \text{etc.} = 0,$$

vnde si vniformitatis gratia hanc aequationem per α multiplicemus, erit quoque

$$1^\lambda \cdot A\alpha + 2^\lambda \cdot B\alpha^2 + 3^\lambda \cdot C\alpha^3 + 4^\lambda \cdot D\alpha^4 + \text{etc.} = 0.$$

$$1-x-xx+x^5+x^7-x^{12}-\text{etc.},$$

a referida raiz α ocorre nessa equação, não somente uma única vez, mas um número infinito de vezes, de tal modo que a equação tem um número infinito de raízes iguais a α .

§. 24. Mas, já sabemos da teoria de equações, que, se uma equação qualquer,

$$1+Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+\text{etc.} = 0,$$

tiver duas raízes iguais a α , então α também será uma raiz da derivada da equação, a saber,

$$A+2Bx+3Cxx+4Dx^3+\text{etc.} = 0,$$

e, se tiver três raízes iguais a α , então, se multiplicarmos essa equação derivada por x , α também será uma raiz da derivada desta, ou seja,

$$1^2A+2^2Bx+3^2Cxx+4^2Dx^3+\text{etc.} = 0.$$

Assim, se a equação tiver λ raízes iguais, sendo cada um = α , sempre teremos

$$1^\lambda A+2^\lambda B\alpha+3^\lambda C\alpha\alpha+4^\lambda D\alpha^3+\text{etc.} = 0$$

e, se multiplicarmos essa equação por α , teremos também

$$1^\lambda A\alpha+2^\lambda B\alpha^2+3^\lambda C\alpha^3+4^\lambda D\alpha^4+\text{etc.} = 0.$$

§. 25. Cum igitur profito $\alpha^n = 1$ nostra aequatio ex numeris pentagonalibus formata

$$1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0,$$

habeat infinitas radices ipsi α aequalis, erit quoque α radix omnium aequationum in hac forma generali contentarum:

$$-1^\lambda x - 2^\lambda x^2 + 5^\lambda x^5 + 7^\lambda x^7 - 12^\lambda x^{12} - \text{etc.} = 0$$

quicumque numerus integer pro λ accipiatur. Semper igitur erit

$$-1^\lambda \alpha - 2^\lambda \alpha^2 + 5^\lambda \alpha^5 + 7^\lambda \alpha^7 - 12^\lambda \alpha^{12} - \text{etc.} = 0.$$

§. 26. Ad hoc clarius ostendendum fumamus $\alpha = 1$, eritque semper

$$-1^\lambda - 2^\lambda + 5^\lambda + 7^\lambda - 12^\lambda - 15^\lambda + \text{etc.} = 0,$$

ac pro casu $\lambda = 0$ veritatem istius aequationis iam probauimus. Sit igitur $\lambda = 1$ et monstrandum erit, huius seriei diuergentis infinitae:

$$-1 - 2 + 5 + 7 - 12 - 15 + 22 + 26 - \text{etc.}$$

summam esse = 0. Quoniam autem haec series est interrupta, seu potius ex duabus seriebus mixta, vtramque seorsim contemplemur, ponendo

$$s = -1 + 5 - 12 + 22 - 35 + \text{etc.} \quad \text{et}$$

$$t = -2 + 7 - 15 + 26 - 40 + \text{etc.}$$

atque ostendi oportet fore $s + t = 0$.

§. 25. Dado que $\alpha^n = 1$ e nossa equação, formada dos números pentagonais,

$$1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.} = 0,$$

tem infinitas raízes iguais a α , esse α também será raiz de toda equação contida na forma geral

$$-1^\lambda x - 2^\lambda x^2 + 5^\lambda x^5 + 7^\lambda x^7 - 12^\lambda x^{12} - \text{etc.} = 0,$$

qualquer que seja o número inteiro posto no lugar de λ . Sempre teremos, portanto,

$$-1^\lambda \alpha - 2^\lambda \alpha^2 + 5^\lambda \alpha^5 + 7^\lambda \alpha^7 - 12^\lambda \alpha^{12} - \text{etc.} = 0.$$

§. 26. Para mostrar isto mais claramente, tomamos $\alpha = 1$ e, assim, teremos

$$-1^\lambda - 2^\lambda + 5^\lambda + 7^\lambda - 12^\lambda - 15^\lambda + \text{etc.} = 0.$$

Já demonstramos a verdade dessa equação no caso em que $\lambda = 0$. Seja, portanto, $\lambda = 1$ de tal modo que precisa-se mostrar dessa série que diverge para a infinidade:

$$-1 - 2 + 5 + 7 - 12 - 15 + 22 + 26 - \text{etc.}$$

que sua soma é $= 0$. Visto, porém, que essa série é irregular, ou melhor, que é composta de duas séries, consideremos cada uma delas separadamente, pondo

$$s = -1 + 5 - 12 + 22 - 35 + \text{etc.} \quad e$$

$$t = -2 + 7 - 15 + 26 - 40 + \text{etc.},$$

de tal modo que precisa-se mostrar que $s + t = 0$.

§. 27. Ex doctrina autem ferierum, quae signis alternantibus procedunt, veluti A–B+C–D+ etc. confat, huius feriei in infinitum progredientis summam esse

$$= \frac{1}{2} A - \frac{1}{4} (B-A) + \frac{1}{8} (C-2B+A) - \frac{1}{16} (D-3C+3B-A) \text{ etc.}$$

quae regula ita commodius per differentias exponitur, scilicet ratione finorum seposita. Ex ferie numerorum A, B, C, D, E, etc. formetur series differentiarum, dum quilibet terminus illius feriei a sequente subtrahitur, quae sit *a, b, c, d*, etc. Eadem porro lege ex hac serie differentiarum formetur series secundarum differentiarum, quae sit *a', b', c', d'*, etc. ex hac porro series tertiarum differentiarum, quae sit *a'', b'', c'', d'', e''*, etc. atque hoc modo ulterius donec ad differentias constantes perveniatur. Tum autem ex terminis primis omnium harum ferierum summa feriei propositae ita determinatur, ut ea sit

$$\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} a + \frac{1}{8} a' - \frac{1}{16} a'' + \frac{1}{32} a''' - \frac{1}{64} a'''' + \text{etc.}$$

§. 28. Hac regula stabilita, cum signis mutatis fit

$$-s = 1-5+12-22+35-51+70- \text{ etc. et}$$

$$-t = 2-7+15-26+40-57+77- \text{ etc.,}$$

hi termini sequenti modo disponantur ac differentiae subscribantur:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 etc.		2, 7, 15, 26, 40, 57, 77,
etc.		
4, 7, 10, 13, 16, 19		5, 8, 11, 14, 17, 20,
3, 3, 3, 3, 3		3, 3, 3, 3, 3
0, 0, 0, 0		0, 0, 0, 0

§. 27. Da doutrina das séries, sabemos somar as que têm sinais alternantes. A soma, por exemplo, da série $A-B+C-D+$ etc., é

$$= \frac{1}{2} A - \frac{1}{4} (B-A) + \frac{1}{8} (C-2B+A) - \frac{1}{16} (D-3C+3B-A) \text{ etc.}$$

É mais fácil expor essa regra a partir das diferenças, isto é, por uma regra que desconsidera os sinais. Da série dos números A, B, C, D, E , etc., forma-se a série das diferenças, de modo que cada termo dessa série é subtraído do próximo; seja ela a, b, c, d , etc. Em seguida, forma-se, dessa série de diferenças, uma série de segundas diferenças pela mesma lei; seja ela a', b', c', d' , etc. Continuando, forma-se, dessas, uma série de terceiras diferenças, a saber, a'', b'', c'', d'', e'' , etc.; e prossegue-se desta maneira até chegar a diferenças constantes. Então, a soma da série proposta é determinada dos primeiros termos de todas essas séries na seguinte maneira:

$$\frac{1}{2} A - \frac{1}{4} a + \frac{1}{8} a' - \frac{1}{16} a'' + \frac{1}{32} a''' - \frac{1}{64} a'''' + \text{etc.}$$

§. 28. Agora que essa regra foi estabelecida e mudando os sinais de s e t ,

$$-s = 1-5+12-22+35-51+70- \text{ etc. } e$$

$$-t = 2-7+15-26+40-57+77- \text{ etc.,}$$

os termos dessas sequências são dispostos do seguinte modo, com as diferenças escritas abaixo deles:

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, etc.		2, 7, 15, 26, 40, 57, 77,
etc.		
4, 7, 10, 13, 16, 19,		5, 8, 11, 14, 17, 20,
3, 3, 3, 3, 3		3, 3, 3, 3, 3,
0, 0, 0, 0,		0, 0, 0, 0,

Hinc igitur colligitur fore

$$-s = \frac{1}{2} - \frac{4}{4} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}, \text{ five, } s = \frac{1}{8}, \text{ porro}$$

$$-t = \frac{2}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}, \text{ five, } t = -\frac{1}{8}$$

vnde manifesto conficitur esse $s+t = 0$.

§. 29. Quoniam ipsae rationes, quibus hae proprietates inniuntur, nullum plane dubium relinquunt: tamen haud inutile erit, istam veritatem etiam pro casu $\lambda = 2$ ostendisse, siue reuera esse

$$-1^2-2^2+5^2+7^2-12^2-15^2+22^2+ \text{etc.} = 0.$$

Difcerpatur enim haec series itidem in duas, quae sint mutatis signis:

$$s = 1^2-5^2+12^2-22^2+35^2-51^2+ \text{etc.}$$

$$t = 2^2-7^2+15^2-26^2+40^2-57^2+ \text{etc.}$$

ac pro prioris summa inuenienda instituaturs sequens operatio:

Series 1, 25, 144, 484, 1225, 2601, 4900

Diff. I. 24, 119, 340, 741, 1376, 2299

Diff. II. 95, 221, 401, 635, 923

Diff. III. 126, 189, 234, 288

Diff. IV. 54, 54, 54

Diff. V. 0, 0

Disto, obtemos a soma

$$-s = \frac{1}{2} - \frac{4}{4} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}, \text{ ou seja, } s = \frac{1}{8} \text{ e, em seguida,}$$

$$-t = \frac{2}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}, \text{ ou seja, } t = -\frac{1}{8},$$

de que é claro que a soma é $s+t = 0$.

§. 29. Embora os próprios cálculos, pelos quais essas propriedades foram expostas, claramente não deixam dúvida alguma, não será inútil mostrar a proposição também no caso em que $\lambda = 2$, isto é, quando temos

$$-1^2 - 2^2 + 5^2 + 7^2 - 12^2 - 15^2 + 22^2 + \text{etc.} = 0.$$

Como foi feito antes, separa-se essa série em duas e muda-se os sinais:

$$s = 1^2 - 5^2 + 12^2 - 22^2 + 35^2 - 51^2 + \text{etc.}$$

$$t = 2^2 - 7^2 + 15^2 - 26^2 + 40^2 - 57^2 + \text{etc.}$$

Para achar a soma da primeira, faz-se o seguinte procedimento:

Série 1, 25, 144, 484, 1225, 2601, 4900

Dif. I. 24, 119, 340, 741, 1376, 2299

Dif. II. 95, 221, 401, 635, 923

Dif. III. 126, 189, 234, 288

Dif. IV. 54, 54, 54

Dif. V. 0, 0

John A. Fossa.

Hic igitur erit

$$s = \frac{1}{2} - \frac{24}{4} + \frac{95}{8} - \frac{126}{16} + \frac{54}{32} = +\frac{3}{16}.$$

Simili modo pro altera ferie

Series 4, 49, 225, 676, 1600, 3249, 5929

Diff. I. 45, 176, 451, 924, 1649, 2680

Diff. II. 131, 275, 473, 725, 1031

Diff. III. 144, 198, 252, 306

Diff. IV. 54, 54, 54

Diff. V. 0, 0

Hinc concluditur

$$t = \frac{4}{2} - \frac{45}{4} + \frac{131}{8} - \frac{144}{16} + \frac{54}{32} = -\frac{3}{16}.$$

Quamobrem euictum est totam summam fore $s+t=0$.

§. 30. Consideremus nunc etiam radices quadratas, siue sit $\alpha^2 = 1$, hincque orietur ista series:

$$\begin{aligned} & -1^\lambda \cdot \alpha - 2^\lambda + 5^\lambda \cdot \alpha + 7^\lambda \cdot \alpha - 12^\lambda - 15^\lambda \cdot \alpha + 22^\lambda + 26^\lambda - \text{etc.} \\ & = 0, \end{aligned}$$

Disto, portanto, obtemos

$$s = \frac{1}{2} - \frac{24}{4} + \frac{95}{8} - \frac{126}{16} + \frac{54}{32} = +\frac{3}{16}.$$

De forma análoga, temos, para a outra série,

Série 4, 49, 225, 676, 1600, 3249, 5929

Dif. I. 45, 176, 451, 924, 1649, 2680

Dif. II. 131, 275, 473, 725, 1031

Dif. III. 144, 198, 252, 306

Dif. IV. 54, 54, 54

Dif. V. 0, 0

Disto, deduzimos que

$$t = \frac{4}{2} - \frac{45}{4} + \frac{131}{8} - \frac{144}{16} + \frac{54}{32} = -\frac{3}{16}.$$

Por isto, é absolutamente claro que $s+t = 0$.

§. 30. Consideremos agora raízes quadráticas, isto é, quando temos $\alpha^2 = 1$, de modo que surge a seguinte série:

$$\begin{aligned} & -1^\lambda \alpha - 2^\lambda + 5^\lambda \alpha + 7^\lambda \alpha - 12^\lambda - 15^\lambda \alpha + 22^\lambda + 26^\lambda - \text{etc.} \\ & = 0, \end{aligned}$$

John A. Fossa.

vnde si terminos unitatem et α continentes a se inuicem separemus, binas obtinebimus series nihilo aequales, scilicet:

$$-2^\lambda - 12^\lambda + 22^\lambda + 26^\lambda - 40^\lambda - 70^\lambda + 92^\lambda + \text{etc.} = 0$$

et

$$-1^\lambda \alpha + 5^\lambda \alpha + 7^\lambda \alpha - 15^\lambda \alpha - 35^\lambda \alpha + 51^\lambda \alpha + 57^\lambda \alpha - \text{etc.} \\ = 0.$$

Quod si vero harum serierum veritatem eodem modo, quo ante sumus vñi, ostendere vellemus, vnamquamque in quatuor alias series discerpi oporteret, vt scilicet tandem ad differentias constantes perueniremus. At vero si quis hanc operam suscipere voluerit, certas esse poterit, aggregatum omnium summarum partialium fore = 0.

§. 31. Nunc generalissime totum negotium complectamur, sitque $\alpha^n = 1$, et quaeramus seriem, quae contineat tantum potestates α^r . Hunc in finem ex omnibus nostris numeris pentagonalibus excerpamus eos, qui per n diuisi relinquunt idem residuum r . Sint igitur isti numeri pentagonales A, B, C, D, E, etc. omnes scilicet formae $\gamma n + r$, et cuiusque signum \pm , quod ipsi conuenit, follicite notetur. Tum autem semper erit

$$\pm A^\lambda \pm B^\lambda \pm C^\lambda \pm D^\lambda \pm \text{etc.} = 0,$$

quincunque valor integer exponenti λ tribuatur. Atque in hac forma generalissima omnes series, quas hactenus eruiimus, et quarum summas nihilo aequari ostendimus, continentur.

da qual, se separarmos os termos contendo as unidades dos termos contendo α , obteremos duas séries iguais a zero, a saber:

$$-2^\lambda - 12^\lambda + 22^\lambda + 26^\lambda - 40^\lambda - 70^\lambda + 92^\lambda + \text{etc.} = 0$$

e

$$-1^\lambda \alpha + 5^\lambda \alpha + 7^\lambda \alpha - 15^\lambda \alpha - 35^\lambda \alpha + 51^\lambda \alpha + 57^\lambda \alpha - \text{etc.} \\ = 0.$$

Ora, se quisermos mostrar os fatos sobre essa série pelo mesmo procedimento que havíamos usado antes, será necessário separar cada uma em quatro outras séries, para enfim chegar às diferenças constantes. E, na verdade, se alguém quisesse fazer essa tarefa, certamente acharia que a soma de todas as somas parciais é $= 0$.

§. 31. Agora consideremos o caso mais geral, o em que $\alpha^n = 1$, e procuramos a série que contém somente as potências α^r . Para tanto, separamos de todos nossos números pentagonais os que, divididos por n , deixam r como resto. Sejam, portanto, A, B, C, D, E, etc. esses números pentagonais, todos, é claro, da forma $\gamma n + r$, e seja o sinal \pm , que acompanha cada um, diligentemente registrado. Então, sempre teremos

$$\pm A^\lambda \pm B^\lambda \pm C^\lambda \pm D^\lambda \pm \text{etc.} = 0,$$

qualquer valor inteiro seja atribuído ao expoente λ . E, de fato, todas as séries, que consideramos até agora e cujas somas mostramos serem iguais a zero, são contidas nessa forma generalíssima.