Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 5 nº 10 (outubro/2005 -março/2006) - pág.27-42
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE:
CONTINUIDADE FORMAL – RUPTURA CONCEITUAL

Maria Inês Nobre Ota
UEL - Brasil

(aceito para publicação em julho de 2005)

Resumo

Neste ano de 2005, comemoram-se os 100 anos dos trabalhos de Einstein que revolucionam o pensamento científico e, particularmente, a Física. Neste artigo é discutida uma das revoluções provocadas: a reestruturação da teoria eletromagnética clássica.

Palavras-chave: eletromagnetismo e relatividade, trabalho de Einstein

Abstract

In this year of 2005, we commemorate the centenary of the works of Einstein that revolutionize the scientific thought and, particularly, the Physics. In this article one of the provoked revolutions is argued: the reorganization of the classic electromagnetic theory.

Keywords: electromagnetism and relativity, Einstein' s work

Introdução

Em seu artigo "*Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*", Einstein começa apresentando assimetrias na Eletrodinâmica de Maxwell quando aplicada em corpos em movimento e, fundamentando-se na Teoria Eletromagnética, propõe os princípios da Teoria da Relatividade que alteram estruturalmente as concepções de espaço e tempo. E com essa ruptura do paradigma euclidiano é que a Teoria da Relatividade foi amplamente divulgada, estimulada inclusive pelo próprio artigo que em sua parte I, relativa à cinemática, apresenta as conseqüências dos princípios da relatividade nas medidas do espaço e do tempo e mostra que essas medidas são relativas e em sua parte II, relativa à eletrodinâmica, demonstra que se forem aplicadas as equações de transformação das coordenadas espaciais e temporal, desenvolvidas na parte I, é possível escrever as equações de Maxwell[1] de modo que elas relacionem os campos com suas fontes da mesma maneira em todos os referenciais inerciais.

Realmente, as equações de Maxwell não se alteram por mudança de referencial inercial quando as coordenadas se transformam conforme as transformações de Lorentz, entretanto, se não há ruptura formal, há ruptura conceitual. As equações 4-dimensionais da eletrodinâmica representam outra visão de mundo do eletromagnetismo em relação àquela que apreendemos a partir das quatro equações de Maxwell.

A Teoria do Eletromagnetismo

A teoria do eletromagnetismo descreve as interações elétricas e magnéticas entre partículas, intermediadas por grandezas denominadas campos. O objetivo desta teoria é interpretar como os campos são criados, como se comportam no espaço e no tempo, quais são seus efeitos. Parte da importância do eletromagnetismo deriva do fato de que com esta teoria é possível compreender, ao menos em princípio, um número muito grande de fenômenos que ocorrem no universo. Em particular, a teoria eletromagnética tem papel fundamental na explicação de fenômenos cuja escala é a do corpo humano, uma vez que as interações eletromagnéticas são responsáveis pela maioria de nossas sensações e experiências diárias, como por exemplo, a parte física de nossos sentidos tais como o tato, a visão, a audição, o olfato e o paladar, bem como a transmissão de informações ao cérebro.

As leis do eletromagnetismo são expressas matematicamente pelas quatro equações de Maxwell. A versão mais conhecida dessas equações envolve relações entre os campos elétrico ($\vec{E}$) e magnético ($\vec{B}$) e as cargas elétricas (q) e correntes elétricas (i). Nessa versão, as equações de Maxwell relacionam os campos com suas fontes, ou seja, com aquilo que os origina. O conteúdo qualitativo das quatro equações é o seguinte[2]:

1. Lei de Gauss elétrica: q cria $\vec{E}$.
2. Lei de Faraday: $\partial_t \vec{B}$ cria $\vec{E}$.
3. Lei de Ampère-Maxwell: i e $\partial_t \vec{E}$ criam $\vec{B}$.
4. Lei de Gauss magnética: não existe monopolo magnético.

As equações de Maxwell pretendem abranger todos os tipos de fonte de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Assim, de acordo com elas, qualquer campo elétrico que exista na natureza só pode ter sido produzido por cargas elétricas ou variação temporal do campo magnético. Analogamente, apenas correntes elétricas e campos elétricos variáveis com o tempo são capazes de gerar campos magnéticos.

As quatro equações de Maxwell podem ser escritas de duas maneiras diferentes: na forma integral e na forma diferencial. Essas duas formas correspondem a modos diferentes de expressar matematicamente a mesma concepção da natureza. A versão integral das

---

[1] No artigo, Einstein utiliza para demonstrar a covariância apenas duas das equações de Maxwell: as relativas às leis Faraday e de Ampère-Maxwell.

[2] Nessas expressões $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ indica derivação em relação ao tempo.

equações de Maxwell também pode ser dita global pois campos em diferentes pontos são simultaneamente relacionados a causas distribuídas por outras regiões do espaço. A forma diferencial relaciona campos em um ponto do espaço-tempo a outras grandezas neste mesmo ponto. Ela é a forma mais conveniente para a transformação das equações de Maxwell por mudança de referencial inercial, que será realizada na seção seguinte.

A Covariância das Equações de Maxwell[3]

O princípio da relatividade estabelece que os referenciais inerciais são equivalentes no que diz respeito às leis físicas. As equações do eletromagnetismo, mesmo tendo sido formuladas antes da relatividade de Einstein, obedecem a esse princípio. É possível escrever essas equações de modo que elas relacionem os campos com suas fontes da mesma maneira em todos os referenciais, ou seja, é possível uma formulação covariante das equações de Maxwell.

A covariância de uma lei da natureza significa que, por mudança de sistema de referência, a relação entre as diferentes quantidades físicas não varia. Se uma lei da natureza é expressa em um referencial inercial, relacionando certas quantidades por meio de uma equação, em outro sistema de referência inercial, estas mesmas quantidades, medidas através dos mesmos métodos, geralmente têm outros valores. Entretanto, a lei física expressa em um dos referenciais deve ter a mesma forma que nos outros sistemas de referência inerciais, garantindo que a interpretação física seja uma só e independe do referencial. Portanto, de acordo com o princípio da relatividade qualquer relação entre quantidades físicas deve ser expressa por meio de equações covariantes.

O objetivo desta seção é verificar como as grandezas eletromagnéticas transformam-se por mudança de referencial e qual é a forma explicitamente covariante das equações de Maxwell.

As equações de Maxwell na versão diferencial têm as seguintes formas:

1. Lei de Gauss elétrica: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (1)

2. Lei de Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ (2)

3. Lei de Ampère-Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \dfrac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$ (3)

4. Lei de Gauss magnética: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (4)

Em um referencial S', que se movimenta em relação a um sistema de referência S com velocidade constante $\vec{v}$ na direção x, as coordenadas se transformam como

[3] O desenvolvimento desta seção está baseado na dissertação de mestrado “Um Texto de Eletromagnetismo e Relatividade baseado no conhecimento estrutural” defendida pela autora em 1985 junto ao Instituto de Física da USP.

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \tag{5}$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{e} \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

Utilizando a seguinte métrica para representar as coordenadas do espaço-tempo

$$x^0 = ct \qquad x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z \tag{6}$$

as equações (5) são escritas como

$$x'^{\mu} = \left[L^x(\beta)\right]^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{7}$$

onde os coeficientes $\left[L^x(\beta)\right]^{\mu}{}_{\nu}$ são componentes da matriz $L^x(\beta)$ que representa a transformação de Lorentz de S para S'

$$L^x(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Para escrever as equações de Maxwell no sistema S', vamos transformar as coordenadas espaço-temporais das equações deixando os campos e suas fontes livres para combinarem-se. Aplicando as seguintes transformações das derivadas parciais em relação às coordenadas

$$\partial_t = \gamma(\partial'_t - v\partial'_1) \qquad \partial_1 = \gamma\left(\partial'_1 - \frac{\beta}{c}\partial'_t\right) \qquad \partial_2 = \partial'_2 \qquad \partial_3 = \partial'_3\ , \tag{9}$$

as coordenadas espaço-temporais das equações de Maxwell se transformam como:

1. Lei de Gauss elétrica

$$\gamma\partial'_1 E_1 - \gamma\frac{\beta}{c}\partial'_t E_1 + \partial'_2 E_2 + \partial'_3 E_3 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

2. Lei de Faraday

$$\begin{aligned}\partial'_2 E_3 - \partial'_3 E_2 &= \gamma\partial'_t B_1 + \gamma v \partial'_1 B_1 \\ \partial'_3 E_1 - \partial'_1 \gamma\left(E_3 + vB_2\right) &= -\partial'_t \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3\right) \\ \partial'_1 \gamma\left(E_2 - vB_3\right) - \partial'_2 E_1 &= -\partial'_t \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2\right)\end{aligned} \tag{11}$$

3. Lei de Ampère-Maxwell

$$\begin{aligned}\partial'_2 B_3 - \partial'_3 B_2 &= \mu_0 J_1 + \frac{1}{c^2}\gamma\partial'_t E_1 - \frac{1}{c^2}\gamma v \partial'_1 E_1 \\ \partial'_3 B_1 - \partial'_1 \gamma\left(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2\right) &= \mu_0 J_2 + \frac{1}{c^2}\partial'_t \gamma\left(E_2 - vB_3\right) \\ \partial'_1 \gamma\left(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3\right) - \partial'_2 B_1 &= \mu_0 J_3 + \frac{1}{c^2}\partial'_t \gamma\left(E_3 + vB_2\right)\end{aligned} \tag{12}$$

4. Lei de Gauss magnética

$$\gamma\partial'_1 B_1 - \gamma\frac{\beta}{c}\partial'_t B_1 + \partial'_2 B_2 + \partial'_3 B_3 = 0 \tag{13}$$

A equação (10) não tem a mesma estrutura de derivadas que a equação (1) pois tem um termo excedente envolvendo $\partial'_t E_1$. Isto mostra que a Lei de Gauss elétrica não pode ser covariante isoladamente. O mesmo ocorre com a Lei de Gauss magnética e também com as componentes x das leis de Faraday e de Ampère-Maxwell pois têm termos excedentes relativamente às equações escritas no sistema S.

O mesmo não ocorre com as componentes y e z das equações (11) e (12) pois elas têm a mesma estrutura de derivadas das componentes equivalentes no referencial S. A partir dessas equações é possível escrever parte das transformações dos campos e das fontes:

$$\begin{aligned}B'_1 &= B_1 \\ B'_2 &= \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3\right) \\ B'_3 &= \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2\right)\end{aligned} \tag{14}$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3)$$
$$E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2) \tag{15}$$

$$J'_2 = J_2$$
$$J'_3 = J_3 \tag{16}$$

Multiplicando a equação (10) por $\left(-\gamma \dfrac{\beta}{c}\right)$ e somando com a componente x da equação (12) multiplicada por γ obtém-se

$$\partial'_2 \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2\right) - \partial'_3 \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3\right) = \mu_0 \gamma(J_1 - \rho v) + \frac{1}{c^2}\partial'_t E_1 \tag{17}$$

Considerando agora a soma da equação (10) multiplicada por γ com a componente x da equação (12) multiplicada por $(-\gamma v)$ obtém-se

$$\partial'_1 E_1 + \partial'_2 \gamma(E_2 - vB_3) + \partial'_3 \gamma(E_3 + vB_2) = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\left(\rho - \frac{\beta}{c}J_1\right) \tag{18}$$

As equações (17) e (18) têm, respectivamente, a mesma estrutura de derivadas da componente x da equação (3) e da equação (1). A partir dessas equações é possível completar as transformações do campo elétrico e das fontes dos campos:

$$E'_1 = E_1 \tag{19}$$

$$J'_1 = \gamma(J_1 - \rho v) \tag{20}$$

$$\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{\beta}{c}J_1\right) \tag{21}$$

É importante notar que não é necessário multiplicar as equações por γ para se obter a mesma estrutura de derivadas, mas este termo foi introduzido para se obter um único conjunto de transformações dos campos.

Examinando as equações (16), (20) e (21), verifica-se que a componente do vetor densidade de corrente J_1 combina-se com a densidade de carga ρ do mesmo modo que a componente x_1 combina-se com t. Isto significa que $\vec{J}$ se transforma como a componente espacial de um quadrivetor e ρ como sua componente temporal. Este quadrivetor é a quadricorrente, definida por

$$J^{\mu} = (c\rho\ ,\ \vec{J}\ ) \tag{22}$$

Portanto, por uma transformação de Lorentz, temos

$$J'^{\nu} = \left[L^{x}(\beta)\right]^{\nu}_{\mu} J^{\mu} \tag{23}$$

Verifica-se, também através das equações (14), (15) e (19), que na transformação do campo elétrico as suas componentes combinam-se com as do campo magnético e vice-versa. Este fato sugere que deve haver uma entidade matemática que unifique as três componentes de $\vec{E}$ e as três componentes de $\vec{B}$. Isso não pode ser feito através de um quadrivetor pois este só pode acomodar quatro componentes. O tensor de ordem mais baixa que tem seis componentes é um tensor de segunda ordem anti-simétrico. Particularmente, aquele cujas componentes transformam-se como os campos elétrico e magnético é o tensor campo eletromagnético dado por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_1}{c} & -\frac{E_2}{c} & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ \frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ \frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

A transformação de Lorentz de um tensor de segunda ordem é, por definição

$$F'^{\sigma\rho} = \left[L^{x}(\beta)\right]^{\sigma}_{\mu}\left[L^{x}(\beta)\right]^{\rho}_{\nu} F^{\mu\nu} \tag{25}$$

Aplicando a transformação (25) no tensor campo eletromagnético (24) obtém-se

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \left(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2\right)F^{01} = F^{01} \\ F'^{02} &= \gamma F^{02} - \gamma\beta F^{12} \\ F'^{03} &= \gamma F^{03} - \gamma\beta F^{13} \\ F'^{12} &= -\gamma\beta F^{02} + \gamma F^{12} \\ F'^{13} &= -\gamma\beta F^{03} + \gamma F^{13} \\ F'^{23} &= F^{23} \end{aligned} \tag{26}$$

Como o tensor campo eletromagnético é anti-simétrico $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, as transformações das componentes de $F^{\mu\nu}$ dadas por (26) são equivalentes às transformações dos campos elétrico e magnético obtidas em (14), (15) e (19). Isto indica que as componentes das intensidades do campo elétrico e do campo magnético são, realmente, as componentes de um quadritensor, ou seja, o tensor do campo eletromagnético.

Forma Explicitamente Covariante das Equações de Maxwell

As densidades de carga e corrente formam um 4-vetor e os campos elétrico e magnético são componentes de um tensor quadridimensional. Portanto as leis do eletromagnetismo, expressas pelas equações de Maxwell, devem poder ser escritas de forma explicitamente covariante, em função dessas grandezas.

O par não-homogêneo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{27}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} = \mu_o \vec{J}$$

pode ser escrito em termos de $F^{\mu\nu}$ e J^{ν}, na forma explicitamente covariante, como

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_o J^{\nu}. \tag{28}$$

E o par homogêneo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{29}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

pode ser escrito como

$$\partial^{\lambda} F^{\mu\nu} + \partial^{\mu} F^{\nu\lambda} + \partial^{\nu} F^{\lambda\mu} = 0 \tag{30}$$

onde μ, ν, λ são quaisquer três dos inteiros 0, 1, 2, 3.

Para mostrar a equivalência entre (27) e (28), basta escrever o tensor $F^{\mu\nu}$ em termos de E^i e B^i como

$$\begin{aligned} F^{00} &= 0 \\ F^{i0} &= -F^{0i} = \frac{E^i}{c} \\ F^{ij} &= -\varepsilon^{ijk} B^k \end{aligned} \tag{31}$$

onde $\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ para permutação par dos índices;} \\ -1 \text{ para permutação ímpar dos índices;} \\ 0 \text{ para índices repetidos.} \end{cases}$

No caso em que $\nu = i$, temos

$$\partial_{\mu} F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \mu_0 J^i, \tag{32}$$

correspondendo a

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t E^i - \varepsilon^{ijk}\partial_j B^k = \mu_0 J^i \ , \tag{33}$$

que é a lei de Ampère-Maxwell – equação (3).

Quando $\nu = 0$,

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_j F^{j0} = \mu_0 J^0 \ , \tag{34}$$

correspondendo a

$$\partial_j E^j = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ , \tag{35}$$

que é a lei de Gauss elétrica – equação (1).

Para verificar que as equações (30) são as mesmas que (29) o procedimento é análogo.

Para $\lambda = 0$

$$\partial^0 F^{ij} + \partial^i F^{j0} + \partial^j F^{0i} = 0 \tag{36}$$

$$-\varepsilon^{ijk}\partial^0 B^k + \partial^i \frac{E^j}{c} - \partial^j \frac{E^i}{c} = 0 \tag{37}$$

$$\partial^j E^i - \partial^i E^j = -\varepsilon^{ijk}\partial^t B^k \tag{38}$$

A relação $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$ nos diz que

$$\begin{cases} \partial^i = -\partial_i \\ \partial^t = \partial_t \end{cases} ; \tag{39}$$

temos, então

$$\partial_i E^j - \partial_j E^i = -\varepsilon^{ijk}\partial_t B^k \tag{40}$$

que é a lei de Faraday – equação (2).

Para μ, ν e λ iguais a i, j e k

$$-\varepsilon^{ijk}\partial^k B^k - \varepsilon^{jki}\partial^i B^i - \varepsilon^{kij}\partial^j B^j = 0 \tag{41}$$

entretanto, a relação $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{jki} = \varepsilon^{kij} = 1$ faz com que a equação (41) reduza-se a

$$\partial^i B^i = 0 \, ; \tag{42}$$

usando (39),

$$\partial_i B^i = 0 \, , \tag{43}$$

que é a lei de Gauss magnética – equação (4).

As equações de Maxwell na forma usual, apresentadas no início desta seção, conhecidas como Lei de Gauss elétrica, Lei de Faraday, Lei de Ampère-Maxwell e Lei de Gauss magnética não são covariantes isoladamente por transformações de Lorentz. Assim, com o princípio da relatividade, que estabelece que as leis físicas têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais, elas perderam o *status* de lei. Por exemplo, as leis de Gauss elétrica e de Ampère-Maxwell só são covariantes se forem consideradas em conjunto; por isso, cada uma delas é parte de uma lei maior, que relaciona o campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$ com sua fonte J^{ν}. As outras duas leis também fazem parte de uma equação que expressa o fato de que o rotacional do campo eletromagnético é zero no espaço quadridimensional.

Outro motivo pelo qual as equações de Maxwell, na forma mencionada acima, não representam quatro leis distintas é que elas envolvem o campo elétrico e o campo magnético separadamente. Na relatividade, esta divisão perde seu significado absoluto. Estes campos, no contexto da relatividade, são projeções do campo eletromagnético.

Continuidade Formal, Ruptura Conceitual

A seção anterior foi desenvolvida com o objetivo transformar as leis do eletromagnetismo de equações tridimensionais para equações quadridimensionais. Para isso foi utilizado o mesmo procedimento adotado por Einstein em seu artigo de 1905, ou seja, foram transformadas as coordenadas espaço-temporais das equações de Maxwell deixando os campos livres para se transformarem, com o objetivo de manter estas equações com a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Como resultados, obtivemos que as densidades de carga e corrente são componentes de um quadrivetor; que os campos elétrico e magnético não são grandezas independentes, mas compõem o tensor campo eletromagnético e as equações do eletromagnetismo se reduzem a duas, sendo que uma delas relaciona o campo eletromagnético à sua fonte e a outra dá informações sobre propriedades geométricas do campo eletromagnético no espaço quadridimensional.

As equações de Maxwell são compostas por duas equações escalares – que são as equações que envolvem os divergentes do campo elétrico e do campo magnético – e duas equações vetoriais tridimensionais – que envolvem os rotacionais dos dois campos. Essas equações formam um conjunto de oito equações que, divididas em dois conjuntos de quatro, compõem as equações quadridimensionais do eletromagnetismo.

Escritas em função de suas componentes, as equações tridimensionais são idênticas às quadridimensionais. Matematicamente, não há qualquer diferença entre elas. Todos os termos e as relações matemáticas entre eles são iguais antes e depois da relatividade. Por isso que em vários textos que tratam da teoria da relatividade restrita, o eletromagnetismo é apresentado como a teoria que não mudou com o advento das novas concepções relativas ao espaço-tempo.

Mas uma teoria não se reduz apenas a um conjunto de equações. Muito pelo contrário, uma teoria é muito mais que um conjunto de equações. Na Grécia antiga teoria era *embaixada sagrada que um Estado enviava para o representar nos grandes jogos* *esportivos, consultar um oráculo, levar oferendas etc.*[4] ou seja pessoas que têm opiniões e idéias. Neste sentido, teoria é um conjunto de regras sistematizadas que aplicadas a uma área específica, reflete uma concepção de natureza bem determinada que denominamos por visão de mundo. E é a visão de mundo do eletromagnetismo que se modifica quando esta teoria é analisada sob a óptica da relatividade.

As equações de Maxwell são usualmente escritas na forma apresentada pelas equações (1) a (4) pois é assim que elas dão significado às leis. Essas equações relacionam os campos com suas fontes: os campos estão à esquerda e as fontes, à direita. No eletromagnetismo clássico, variação temporal de um dos campos é fonte do outro campo. Quando os campos não variam no tempo, as equações do eletromagnetismo são desacopladas e se reduzem à eletrostática e à magnetostática, com a carga elétrica sendo a fonte do campo eletrostático e a carga elétrica em movimento sendo a fonte do campo magnético. Na concepção clássica do eletromagnetismo, campo elétrico e campo magnético são grandezas independentes e como é em toda a física clássica, o espaço é independente do tempo.

Há, também, dois "tipos" de campo elétrico: aquele criado pela carga elétrica, que é irrotacional e, portanto, conservativo; e o não-conservativo criado pela variação temporal do campo magnético. Outra diferença entre os campos elétrico e magnético é relativa à existência desses campos nos diversos referenciais inerciais: se em um referencial há campo elétrico, em qualquer outro sistema de referência este campo existe; entretanto, o mesmo não acontece com o campo magnético que por uma mudança de um referencial em que a carga está em movimento, para outro em que a carga está em repouso, o campo magnético deixa de existir.

As assimetrias existentes entre os campos são reflexos das próprias equações de Maxwell pois a não-existência do monopolo magnético faz com que essas equações não sejam simétricas. Se o monopolo magnético existisse, o divergente de $\vec{B}$ seria diferente de zero e poderia existir uma "corrente magnética" que, incluída na lei de Faraday, seria mais uma fonte do campo elétrico. Ao comentar sobre a possível existência do monopolo magnético, Purcell[5] escreve:

> A dificuldade consiste em que as coisas não são dessa forma. A Natureza, por alguma razão, não usou essa oportunidade. O mundo em volta de nós aparece totalmente assimétrico no sentido de que não encontramos 'carga magnética alguma'.

Analisando o eletromagnetismo sob a óptica da física não-relativística, esse comentário poderia ser razoável se não fosse positivista ao insinuar que quem perdeu a oportunidade foi a natureza e não a construção da teoria eletromagnética clássica.

O eletromagnetismo clássico reflete a época em que foi construído. Nas décadas de 1820 e 1830, Faraday e Ampère, *na maior unificação dos tempos modernos*[6], mostram que a eletricidade e o magnetismo, que até 1820 eram considerados forças distintas, são dois

[4] Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.
[5] [Purcell, 1973], p. 334.
[6] [Salam, 1993], p. 15.

aspectos de uma única força: o eletro-magnetismo. Cinqüenta anos mais tarde, Maxwell mostra mais uma unificação: da óptica com o eletromagnetismo ao propor o termo $\partial_t \vec{E}$ da lei de Ampère-Maxwell. A visão de mundo da época em que as leis do eletromagnetismo foram estruturadas através das equações de Maxwell concebia espaço vazio como um meio – o "éter" – e por isso Maxwell denominou o termo $\partial_t \vec{E}$ por "corrente de deslocamento" pois imaginava que essa "corrente" estaria se deslocando em alguma coisa. A concepção do "éter" estava refletida, inclusive, nos diversos experimentos em que se procurava medir a velocidade da luz em relação a ele.

Em suas notas autobiográficas, Einstein apresenta um paradoxo que se defrontou quando tinha dezesseis anos, dez anos antes de seu artigo:

> Se um raio luminoso for perseguido a uma velocidade c (velocidade da luz no vácuo), observamos esse raio de luz como um campo eletromagnético em repouso, embora com oscilação espacial. Entretanto, aparentemente não existe tal coisa, quer com base na experiência, quer de acordo com as equações de Maxwell. Desde o início, tive a intuição clara de que, segundo o ponto de vista desse observador, tudo devia acontecer de acordo com as mesmas leis aplicáveis a um observador que estivesse em repouso em relação à terra. Pois, como poderia o primeiro observador saber ou determinar que está em estado de movimento rápido uniforme?
>
> Vemos nesse paradoxo o germe da teoria da relatividade restrita. Hoje todos sabem que as tentativas de esclarecer satisfatoriamente esse paradoxo estariam condenadas ao fracasso enquanto o axioma do caráter absoluto do tempo, ou da simultaneidade, estivesse enraizado no inconsciente.[7]

Com o caráter absoluto do tempo enraizado no inconsciente é que as leis do eletromagnetismo clássico são interpretadas e as equações de Maxwell são expressas usualmente. Se elas forem escritas como em (27) e (29), todas as assimetrias apresentadas deixam de existir. Uma simples mudança na posição da coordenada temporal altera significativamente o conteúdo qualitativo das leis, representadas pelas equações. Das equações (28) e (30), o conteúdo qualitativo das leis do eletromagnetismo no contexto da relatividade é o seguinte:

1. Carga elétrica cria o campo eletromagnético.
2. O campo eletromagnético é irrotacional.

Analisadas no contexto da relatividade, as leis do eletromagnetismo são outras leis, não são aquelas representadas pelas equações de Maxwell, embora matematicamente sejam idênticas. Essas leis referem-se às propriedades do campo eletromagnético, que é uma grandeza quadridimensional composta pelas componentes das intensidades dos campos elétrico e magnético tridimensionais. Na relatividade, o campo eletromagnético tem uma única fonte: a carga elétrica e por ser irrotacional, o campo eletromagnético é um campo de forças conservativas no espaço quadridimensional.

---

[7] [Einstein, 1982], p. 55.

Imagem de Natureza do Campo Eletromagnético

Da equação (28) temos que o divergente do campo eletromagnético é diferente de zero onde há carga elétrica, isto significa que o campo eletromagnético é descontínuo. Da equação (30) temos que o campo eletromagnético é irrotacional. Essas propriedades são análogas ao do campo tridimensional eletrostático.

Na eletrostática, as equações de Maxwell se reduzem a

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \,. \tag{44}$$

Se o divergente é diferente de zero e o rotacional é igual a zero, o campo eletrostático é um campo central, isto é, $\vec{E}$ é radial e para um dado r, sua intensidade é constante.

Integrando a equação do divergente em um volume qualquer, temos

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \;\; dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \;\; dV \tag{45}$$

e aplicando o teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \;\; dV \,, \tag{46}$$

temos a lei de Gauss na forma integral.

A partir de (46) obtemos que o campo eletrostático de uma carga puntiforme é dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \,. \tag{47}$$

A intensidade do campo eletrostático decai com o quadrado da distância à carga, sendo zero apenas no infinito. Em $r = 0$, o campo diverge.

Portanto, o campo eletrostático é um campo vetorial, radial, que se estende até o infinito e tem um ponto de descontinuidade que é a carga elétrica. Esta é a imagem de natureza do campo eletrostático.

Extrapolando para o espaço quadridimensional, podemos inferir que o campo eletromagnético é radial, se estende até o infinito e tem um ponto de descontinuidade: a carga elétrica. A afirmação de que o campo eletromagnético é descontínuo em um ponto do espaço-tempo decorre da *quantização da carga elétrica*, ou seja, toda carga elétrica é elementar[8]. As partículas eletrizadas com carga maior que a carga elementar são portadoras de várias cargas elementares.

Se o campo eletromagnético é irrotacional, esse campo é conservativo no espaço quadridimensional, ou seja, o trabalho realizado pela força eletromagnética entre dois pontos do espaço-tempo só depende dos pontos inicial e final. Em três dimensões

[8] Para as partículas da família do elétron, o valor da carga elementar é o da carga do elétron e para as partículas da família dos quarks, a carga elementar tem valor de 1/3 ou 2/3 da carga do elétron.

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0$ para qualquer ϕ. Extrapolando para quatro dimensões, se o rotacional de $F^{\mu\nu}$ é igual a zero, é possível introduzir uma função potencial relacionada ao campo eletromagnético. Esta função é o campo A^{μ}, um quadrivetor cujas componentes são

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \tag{48}$$

onde ϕ é o potencial escalar tridimensional e $\vec{A}$ é o potencial vetor. E o campo eletromagnético é escrito em função do campo potencial como

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}. \tag{49}$$

Atualmente, o campo eletromagnético representado pelo campo A^{μ} tem papel central nas pesquisas em partículas elementares e teoria quântica de campos.

A Realidade do Campo

Para finalizar este artigo sobre as rupturas conceituais provocadas pela teoria da relatividade no eletromagnetismo queremos ressaltar que, na relatividade, a velocidade finita de propagação da informação torna o campo uma realidade física. Embora tenha sido Maxwell que mostrou que, se uma carga elétrica fosse acelerada, emitiria energia na forma de radiação eletromagnética, a compreensão da natureza da radiação é conseqüência dos postulados da relatividade e da realidade do conceito de campo, atualmente de importância fundamental para a Física. O campo na relatividade tem significado profundo. A respeito da evolução do conceito de campo, Einstein e Infeld escreveram o seguinte:

> [Nos primórdios do século XIX] o conceito de campo nada mais era que um meio para facilitar a compreensão de fenômenos do ponto de vista mecânico. Na nova linguagem de campo, é a descrição do campo entre duas cargas, e não as cargas em si, o que é essencial para uma compreensão de sua ação. O reconhecimento dos novos conceitos cresceu consistentemente, até que a substância foi ocupada pelo campo. Percebeu-se que algo de grande importância havia aparecido em Física. Uma nova realidade foi criada, um novo conceito para o qual não havia lugar na descrição mecânica. Lentamente e com luta, o conceito de campo firmou para si um lugar de predominância em Física e permaneceu um dos conceitos físicos básicos. O campo eletromagnético é, para a Física moderna, tão real quanto a cadeira que sentamos.[9]

Conclusões

As discussões realizadas nas várias partes deste artigo tiveram o propósito analisar o eletromagnetismo sob a óptica da relatividade retomando o indício fornecido na introdução de que entre o eletromagnetismo e a teoria da relatividade há uma perfeita harmonia formal mas se transcendermos o formalismo, verificamos que há uma ruptura conceitual entre a teoria eletromagnética clássica e a relativística.

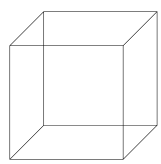
---

[9] [Einstein, 1966], p. 125.

A mudança dos conceitos de espaço e tempo afeta toda a teoria eletromagnética clássica. Os campos elétrico e magnético, que são considerados vetores separados no eletromagnetismo clássico, são componentes do tensor campo eletromagnético na relatividade. Da mesma forma, as densidades clássicas de carga e corrente compõem o quadrivetor corrente, no espaço quadridimensional.

A mudança de significado dos elementos da teoria eletromagnética está associada à reestruturação das equações básicas. No eletromagnetismo clássico há quatro leis que relacionam os campos com aquilo que os originam: o campo elétrico é criado por carga ou variação temporal do campo magnético; e corrente elétrica ou campo elétrico variável no tempo dão origem ao campo magnético. Como na física clássica, o tempo tem significado absoluto, isolado do espaço e os campos elétrico e magnético também são considerados separadamente, e a variação temporal de um desses campos é considerada fonte que dá origem ao outro. Quando as leis básicas do eletromagnetismo são interpretadas no contexto da teoria da relatividade, elas adquirem significados diferentes. Como o espaço e o tempo são conceitos interligados, a variação temporal de uma das componentes do campo eletromagnético não é considerada fonte mas apenas uma das variações do espaço-tempo. A única fonte do campo eletromagnético na relatividade é a carga elétrica.

A reestruturação da teoria eletromagnética ocorre apenas a nível conceitual, uma vez que o formalismo presente nas equações básicas do eletromagnetismo relativístico é exatamente idêntico àquele das equações de Maxwell tridimensionais. Esta reestruturação só é percebida quando transcendemos o formalismo e procuramos dar significado aos conceitos e relações. Assim, através da comparação entre os significados pré e pós-relativístico, verificamos que as diferentes visões de mundo da teoria eletromagnética são antagônicas. Como disse Kuhn, *aquilo que antes da revolução aparece como pato no mundo do cientista transforma-se posteriormente em coelho. Aquele que antes via o exterior da caixa desde cima passa a ver seu interior desde baixo*[10], basta olhar a figura.



Referências Bibliográficas

Einstein, A. *Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento*, reproduzido de Ann. d. Phys. 17 (1905); in Lorentz, H. A.; Einstein, A.; Minkowski, H. *Textos Fundamentais da Física Moderna, I volume O Princípio da Relatividade,* tradução do original alemão por B.G.Teubner, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1971.

Einstein, A. *Notas Autobiográficas,* Ed. Comemorativa / traduzida e anotada por Paul Arthur; tradução de Aulyde Soares Rodrigues, Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1982.

[10] [Kuhn, 1987], p.146.

Einstein, A.; Infeld, L. *A Evolução da Física*, 2ª edição, tradução Giasone Rebuá, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1966.

Kuhn, T.S. *A Estrutura das Revoluções Científicas* / tradução Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira, São Paulo: Editora Perspectiva, 1987.

Ota, M.I.N.; Robilotta, M.R. *Eletromagnetismo e Relatividade*, São Paulo: IFUSP, 1985.

Purcell, E. M. *Curso de Física de Berkeley, vol.2, Eletricidade e Magnetismo*, tradução Wiktor Wajntal, São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1973.

Salam, A.; Heisenberg, W.; Dirac, P.A.M. *A unificação das forças fundamentais: o grande desafio da física contemporânea* / tradução Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica, Ildeu de Castro Moreira, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editores, 1993.

Maria Inês Nobre Ota
Departamento de Física – Universidade Estadual de Londrina
CEP: 86051-990 – Londrina – PR
inesota@uel.br