

HISTÓRIAS PARALELAS: O V POSTULADO DE EUCLIDES E O AXIOMA DA ESCOLHA

Irineu Bicudo
Unesp – Rio Claro - Brasil

(aceito para publicação em dezembro de 2004)

Resumo

Inspirado nas “Vidas (Paralelas)” de Plutarco, mostramos como o V Postulado de Euclides e o Axioma da Escolha têm histórias absolutamente paralelas.

Palavras-chave: Definição, Demonstração, Termos Primitivos, Termos Derivados, Postulado (Axioma), V Postulado, Axioma da Escolha.

Abstract

Taking the lead from Plutarch’s “(Parallel) Lives”, we show that the V Postulate and the Axiom of Choice have absolutely parallel histories.

Keywords: Definition, Proof, Postulate (Axiom), The V Postulate, The Axiom of Choice.

1. Inspiração

Plutarco, um escritor grego do primeiro século de nossa era, misto de historiador, cronista e filósofo, escreveu várias obras notáveis, mas a que lhe fez, definitivamente, o nome foi a intitulada “VIDAS PARALELAS”, em que coteja, aos pares, um personagem grego com um romano de feito semelhante. Por exemplo, Demóstenes, o maior orador grego, tem a vida tratada paralelamente à de Cícero, o maior orador romano. Espelhando-me nesse modelo, parece-me possível tratar, paralelamente, certos pares de tópicos matemáticos. Elegemos, como primeiro par, para essa tarefa, o V Postulado de Euclides e o Axioma da Escolha.

2. Introdução

Separando tudo o que não seja essencial, um matemático, quando faz matemática, está preocupado com duas operações do espírito, que nos dará a conhecer nas exposições de seu trabalho. São elas, respectivamente, DEFINIR e DEMONSTRAR. Ele define os objetos matemáticos de sua teoria e demonstra as propriedades desses objetos. O que vêm a ser tais operações? Definir um conceito significa explicá-lo em termos de outros conceitos já anteriormente definidos. Assim, definimos o conceito de “grupo”, explicando-o em termos dos conceitos de operação binária, de associatividade, de elemento unidade e de inverso de um elemento. De modo análogo, demonstrar uma proposição significa argumentar a favor de sua veracidade, verificando que essa proposição decorre, por procedimentos logicamente válidos, de outras proposições, cuja veracidade fora, anteriormente, provada.

Como, pelas limitações humanas, não é possível definir tudo nem provar tudo, a cadeia ascendente de explicações e de argumentações, que acabamos de descrever, interrompe-se em algum ponto. O que fazer, então?

Fixemos o caso da definição. Há duas possibilidades de ruptura do impasse. A primeira é a (falsa) solução oferecida pelos dicionários, a da circularidade: define-se um conceito em termos de um outro e, este outro, em termos do primeiro. Desse modo, poder-se-ia “definir” conjunto como coleção, agrupamento; coleção, como conjunto, agrupamento; e agrupamento, como conjunto, coleção. Como o matemático quer a precisão máxima, tentando evitar ambigüidades, oferece uma solução diferente: aceitar, sem definição, alguns conceitos, e definir, a partir deles, todos as demais noções de sua teoria. Análogo procedimento é proposto no caso da demonstração: tomar, sem demonstração, algumas proposições (referentes às noções não definidas - diz-se, às vezes, que essas proposições seriam as definições implícitas daquelas noções), e demonstrar, a partir dessas, todas as outras proposições, que possam ocorrer, de interesse para seus propósitos.

Os conceitos que assume sem definição são chamados CONCEITOS PRIMITIVOS, e todos os demais, CONCEITOS DERIVADOS. As proposições acolhidas sem demonstração dizem-se AXIOMAS; as outras, TEOREMAS.

Mais uma vez, deixando de lado o acidental, a arquitetura de uma teoria matemática compõe-se desses elementos: conceitos primitivos e conceitos derivados, axiomas e teoremas.

Com uma ligeira pitada de sal, podemos afirmar que essa visão da matemática constitui um legado da antiga Grécia às posteriores civilizações.

3. Os Elementos de Euclides

O exemplo mais bem acabado, provindo da Grécia, da matemática como uma ciência dedutiva é-nos fornecido pelos *Elementos* de Euclides.

Atendendo ao preceito que comanda: “Primeiro as primeiras coisa”, comecemos pelo título da obra, *Elementos*.

Nosso conhecimento da história inicial da geometria grega depende de notícias espalhadas em escritores antigos, muitas das quais provieram de um trabalho que, infelizmente, tragado pelo apetite voraz do tempo, não chegou até nós - a *História da Geometria*, escrita por Eudemo de Rhodes, um dos principais discípulos de Aristóteles. Boa

parte do hoje sabemos foi-nos preservada por Proclus, um filósofo neoplatônico do século V A.D.

No início de nossa era, até o final da Idade Média, o modo tradicional de filosofar e de ensinar era o dos comentários às obras dos mestres precedentes. Proclus escreveu comentários a vários diálogos de Platão e, o que agora nos interessa, um Comentário ao Livro I do *Elementos* de Euclides. O Prólogo desse Comentário, dividido em duas partes, fornece nossa ciência da história mencionada. É na segunda parte dele que encontramos uma explicação para o título da obra de Euclides. Traduzo a passagem em que isso se dá: “Por um lado, o escopo < deste livro, isto é, dos *Elementos* > é este, instruir sobre os elementos, em relação à ciência toda, os estudantes e dar regras para construção e determinação das figuras cósmicas < isto é, os poliedros regulares >. Por outro lado, mesmo isso, o nome do ensino e o do elemento, do que deriva também o ensino, teriam que definição? Então, procuremos alguma coisa também acerca do título. Bem, dos teoremas, é hábito chamar uns elementos, outros elementares, outros são determinados fora da qualidade desses. Elementos, com efeito, são aqueles dos quais a teoria chega ao conhecimento dos outros, e a partir dos quais nos chega a solução das dificuldades deles. Pois, como são os primeiro princípios e os mais simples e indivisíveis da linguagem escrita, aos quais aplicamos o nome de elementos, e toda palavra é formada desses e todo discurso, assim, então, são alguns teoremas, vindos à frente de toda a geometria e tendo razão de princípio em relação aos seguintes, tanto se manifestando através de todos quanto fornecendo demonstração de muitas propriedades, os quais, então, denominamos elementos.”

Vemos, pois, que o termo que serve de título à mais importante obra de Euclides tem um sentido técnico: são certos teoremas principais, dos quais decorrem muitos outros.

Proclus, ainda, em outro ponto do mesmo Prólogo esclarece que Euclides não foi o primeiro a coletar *Elementos*. No passo, conhecido como o Sumário de Eudemo ou o Catálogo dos Geômetras, lemos: “Depois desses, Hipócrates de Chios, que encontrou a quadratura da lúnula, e Teodoro de Cyrene tornaram-se famosos em geometria. Daqueles cujos nomes chegaram até nós, Hipócrates é o primeiro escritor de *Elementos*.” Ainda, “Neocleides sucedeu a Leodamas, e seu discípulo foi Leon, que adicionou muito ao que tinha sido feito antes. Leon também compôs *Elementos*, que, tanto quanto ao número como quanto ao valor das proposições demonstradas, são reunidos muito cuidadosamente.”

Pouco mais adiante, “Theudius de Magnésia parece ter-se distinguido em matemática, bem como em outros ramos da filosofia, porque fez um excelente arranjo dos *Elementos*, e generalizou muitas proposições particulares.”

O Catálogo conclui-se com Euclides, assim mencionado: “coletou os *Elementos*, arranjou muito do que Eudoxo descobrira, e completou muito do que tinha sido começado por Teeteto; além disso, substituiu demonstrações ambíguas de seus predecessores por provas irrefutáveis.”

Os ELEMENTOS de Euclides são um tratado em treze capítulos ou Livros, como eram chamados, e que reúne boa parte da matemática elementar grega, então conhecida. Os Livros I-VI dão conta da geometria plana e os Livros XI-XIII, da geometria no espaço ou estereometria. Os Livros VII-IX, ditos os livros aritméticos, expõem a teoria dos números –

encontramos aí, por exemplo, a demonstração, até hoje usada, de que há uma infinidade de números primos (IX,20). Finalmente, o Livro X propõe-se classificar tipos de irracionais, isto é, de magnitudes incomensuráveis com dadas magnitudes. Segundo Morris Kline (*Mathematical Thought from Ancient to modern Times*), Augustus De Morgan descreve o conteúdo geral desse livro, dizendo: “ Euclides investiga toda variedade possível de linha que pode ser representada [na álgebra moderna] por

$$\left(\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \right)$$

a e b representando duas linhas comensuráveis.”

Há 115 proposições no Livro X, embora, em algumas edições, apareçam as Proposições 116 e 117, sendo que esta última demonstra a irracionalidade da $\sqrt{2}$ (Proposição X 117= Apêndice 27: “ Seja-nos proposto mostrar que nas figuras quadradas o diâmetro é incomensurável, em comprimento, com o lado.”)

Dada essa perspectiva dos ELEMENTOS, fixemo-nos no Livro I.

A composição global desse Livro pode ser descrita como segue (cf. Benno Artmann, *Euclid-The Creation of Mathematics*).

- (1) Definições (1-23) : Conceitos básicos são descritos ou definidos.
- (2) Postulados (1-5).
- (3) Noções Comuns (1-6).
- (4) Proposições
 - 1-26 A: Fundamentos da geometria plana sem o uso de paralelas
 - 27-32 B: A teoria das linhas paralelas, ângulos em um triângulo
 - 33-45 C: A teoria dos paralelogramos e suas áreas
 - 46-48 D: O teorema de Pitágoras.

Euclides define retas paralelas do seguinte modo.

Definição 23 Retas paralelas são aquelas que, estando no mesmo plano, e prolongadas ilimitadamente em cada direção não se encontram, uma a outra, em nenhuma das duas (direções).

Quanto aos postulados, diz o texto:

“1.Fique postulado a partir de todo ponto até todo ponto traçar uma linha reta.

2.E prolongar uma reta limitada continuamente em uma reta.

3.E descrever um círculo com todo centro e raio .

4.E todos os ângulos retos serem iguais entre si.

5.E, caso uma reta, encontrando duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, prolongadas as duas retas ilimitadamente, encontrarem-se, naquele lado em que estão os menores do que dois retos.”

4. A Teoria dos Conjuntos de Cantor

Está, pois, apresentado o primeiro ator de nossa história: o Quinto Postulado de Euclides.

Pulemos do século III a.C. ao final de nosso século XIX, para puxar o segundo fio da urdidura dessa história. Como Euclides foi, no que vimos, o nome consagrado, Georg Cantor será, agora, o invocado, pois mais do que aquele está para a geometria euclidiana, está este para a teoria dos conjuntos.

Em uma seqüência de artigos, a partir de 1870, a respeito da representação de uma função f na forma de uma série trigonométrica, Cantor forjou, passo a passo, uma das mais notáveis criações do espírito humano, uma teoria matemática do infinito, a teoria dos conjuntos, como uma disciplina matemática. Essa teoria engendrada por Cantor é, em essência, a teoria dos números ordinais e cardinais infinitos, a que estende, de algum modo, a teoria dos números naturais, que são, ao mesmo tempo, os ordinais e os cardinais finitos.

Penso ser interessante, neste ponto, compararmos três “definições” de conceitos fundamentais, para a geometria e para a teoria dos conjuntos, respectivamente, dadas por Euclides e por Cantor.

Euclides: “Ponto é (aquilo) de que nada é parte.”

Cantor: “Por um conjunto entendemos qualquer coleção em um todo M de objetos determinados e separados, m , de nossa intuição ou nosso pensamento. Esses objetos são chamados os elementos de M .”

Euclides: “Linha é comprimento sem largura.”

Cantor: “Chamamos pelo nome “potência” ou “número cardinal” de M o conceito geral que, por meio da nossa faculdade ativa de pensamento, surge do conjunto M , quando fazemos abstração da natureza de seus vários elementos m e da ordem em que eles são dados.

Denotamos o resultado desse duplo ato de abstração, o número cardinal ou potência de M , por M .”

Euclides: “Superfície é (aquilo) que tem somente comprimento e largura.”

Cantor: Todo conjunto ordenado M tem um tipo de ordem, ou, mais abreviadamente, um tipo determinado, que denotaremos por M . Por isso, entendemos o conceito geral que resulta de M , se somente abstrairmos a natureza dos elementos m , e retivermos a ordem de precedência entre eles.”

Como vemos, há um paralelismo perfeito entre essas tentativas: procuram explicar os conceitos, apelando a termos não esclarecidos (parte, comprimento, largura) anteriormente, ou mesmo a conceitos não matemáticos (intuição, pensamento, faculdade ativa do pensamento, natureza dos elementos). Nenhuma seria, hoje em dia, aceita, do modo enunciado, como uma definição.

De qualquer maneira, o conceito de número ordinal é de importância máxima na teoria estabelecida por Cantor. E um número ordinal é o tipo de ordem associado a um conjunto bem ordenado. Assim, a noção de conjunto bem ordenado é elevada também à máxima importância. Eis como Cantor define os conceitos relacionados à ordem.

(1) “Chamamos um conjunto M simplesmente ordenado se uma ordem de precedência determinada governar seus elementos m , de modo que, de quaisquer dois elementos m_1 e m_2 , um tem o menor e o outro o maior posto, e de modo que, se, de três elementos, m_1 , m_2 , e m_3 , m_1 , digamos, for de posto menor do que m_2 , e m_2 , de posto menor do que m_3 , então m_1 será de posto menor do que m_3 .”

(2) “Chamamos um conjunto simplesmente ordenado F bem ordenado, se seus elementos f ascenderem em uma sucessão determinada, a partir de um menor f_1 , de tal modo que:

(i) Existe em F um elemento f_1 que é o menor em posto.

(ii) Se F' for uma parte qualquer de F e se F tiver um ou mais elementos de postos maiores do que todos os elementos de F' , então existirá um elemento f' de F que segue imediatamente depois da totalidade F' , de modo que nenhum elemento, em posto, entre f' e F ocorrerá em F' .”

Um dos maiores feitos de Cantor foi dar-se conta da variedade de ordens que poderiam ser impostas a um conjunto infinito, e, como uma de suas preocupações era fornecer uma fundamentação para a aritmética, que estendesse aquela dos números naturais, o tipo de ordem, tanto de números finitos quanto de transfinitos, deveria ser especificado. Era o tipo que ele cunhou de boa ordem. Mas, como a aritmética era uma teoria geral, todo conjunto deveria ser bem ordenado, mesmo que, da maneira usual, aparecesse, inicialmente, com alguma outra ordem (por exemplo, os números racionais, com sua ordem habitual).

Desse modo, o conceito de conjunto bem ordenado, como diz o próprio Cantor, é fundamental para a teoria dos conjuntos. Então, em 1883, Cantor propôs, como uma lei válida do pensamento, que “todo conjunto pode ser bem ordenado.” No entanto, isso que denominaremos Princípio da Boa Ordem, não foi aceito pelos matemáticos da época, e, uma década mais tarde, Cantor ainda procurava demonstrá-lo. Foi para obter a demonstração desse Princípio que, em 1904, Ernst Zermelo, seguindo uma sugestão de Erhart Schmidt, formulou, pela primeira vez, o Axioma da Escolha. Assim, esse Axioma passou do uso inconsciente feito, às vezes, até então, ao uso consciente.

Formulemos, com a linguagem atual da matemática, o Axioma da Escolha.

Primeira Versão: Se F for uma coleção de conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos, existirá um conjunto C (subconjunto da união de F), cuja intersecção com cada membro de F seja um conjunto unitário. Um tal conjunto C é denominado um conjunto de seleção ou de escolha para F .

Segunda Versão: Se F for uma coleção de conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos, existirá uma função f , com domínio F , tal que, para cada $S \in F$, $f(S) \in S$. Uma tal função f é chamada uma função de escolha para F .

O que, intuitivamente falando, o Axioma preconiza é a possibilidade de, dados conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, em qualquer quantidade, escolhermos um membro em cada um desses conjuntos, isto é, fazermos, de uma vez, uma infinidade de

escolhas. É claro que, se possuímos um critério, uma regra para as escolhas, não teremos necessidade de apelar para o Axioma. Este é usado na ausência daquela.

Bertrand Russell imaginou duas situações engenhosas, não técnicas, uma em que podemos ter um critério de escolha, a outra em que não possuímos um tal critério (a menos que admitamos algum absolutamente artificial).

Primeira Situação: Suponhamos uma coleção infinita de pares de botas, isto é, os membros de F são conjuntos (não vazios, dois a dois disjuntos) S_i , formados pelos pés direito e esquerdo de um par de botas.

Um critério de escolha poderia ser tomar o pé direito de cada par. Disso, obteríamos um conjunto seleção C para F -o conjunto dos pés direitos dos pares de botas. É claro que, se tomássemos os pés esquerdos dos pares, teríamos um outro conjunto seleção para F .

(Convém notar que o Axioma da Escolha postula a existência de pelo menos um conjunto seleção e não a de um único).

Segunda Situação: Seja F , agora, uma coleção infinita de pares (iguais) de meias. Aqui, os critérios usados na situação anterior não mais funcionam. De fato, não há, para este caso, um critério “natural” de escolha.

Presumivelmente, conforme frisam Fraenkel e Bar-Hillel (p.57), a primeira alusão, embora negativa, ao Axioma esteja em um artigo, de 1890, de G. Peano (*Démonstration de l'intégralité des équations différentielles ordinaires*, Math. Annalen, 37, 182-228), concernente a uma demonstração de existência para um sistema de equações diferenciais ordinárias, em que escreve (p.210): “Entretanto, como não se pode aplicar infinitas vezes uma lei arbitrária, pela qual se faça corresponder, a uma classe, um indivíduo dessa mesma classe, estabelecemos aqui uma lei determinada, pela qual, sob hipóteses convenientes, associa-se, a toda classe de um certo sistema, um indivíduo dessa classe.”

Em 1902, Beppo Levi (*Intorno alla teoria degli aggregati*, R. Istituto Lombardo di Sc. e Lettere, Rendic. (2) 35,863-868), lidando com a afirmação que a união de uma coleção F de conjuntos não vazios, dois a dois disjuntos, tem cardinalidade maior ou igual à cardinalidade de F , observou que sua demonstração dependia da possibilidade de selecionar um único elemento em cada membro de F .

É verdade que Cantor (e outros) aplicaram o princípio em questão antes de que tivessem surgido a menção de Peano e a observação de Levi. Mas, fizeram-no inadvertidamente, sem consciência de usar um procedimento que não tinha, previamente, servido à matemática clássica ou à lógica.

Então, como noticiamos acima, em 1904, Zermelo formulou explicitamente o Princípio da Escolha e usou-o como a base de sua primeira demonstração do Teorema da Boa Ordem (*Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Annalen 59, 514-516), e também, em 1908, para sua segunda demonstração daquele teorema (*Neuer Beweis für die Wohlordnung*, Math. Annalen 65, 107-128).

Convém observarmos que Zermelo enuncia o Axioma de um modo diferente daquele dado acima. Supõe ele que, dada uma classe α , exista, pelo menos, uma relação

(um-muitos) R , cujo codomínio consista nas subclasses existentes de α e que seja tal que, se x estiver na relação R com β , então x será um membro de β . Uma relação desse tipo seleciona um representante de cada classe; é claro que acontecerá, freqüentemente, duas subclasses terem o mesmo representante.

Em 1906, Bertrand Russell (On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, Proc. of London Math. Soc. (2) 4, 29-53) formulou o axioma em sua forma “multiplicativa” própria, restrita a uma coleção F de membros disjuntos. Em 1908, Zermelo (Neuer Beweis für die Wohlordnung, p. 110) mostrou como a formulação geral pode ser obtida da forma multiplicativa por meio dos outros axiomas (cf. também Zermelo, E., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Annalen, 65, 261-281.)

Conhecido, assim, o segundo ator de nossa história, o Axioma da Escolha, resta-nos traçar-lhes as vidas paralelas.

5. Vidas Paralelas: o V Postulado e o Axioma da Escolha

Aristóteles, o grande filósofo, sábio de curiosidade insaciável, que freqüentou todos os ramos do conhecimento, o sistematizador incansável, estabelece em sua obra lógica, o Organon, entre outras coisas, os fundamentos de uma ciência dedutiva. Conquanto dê uma clara idéia do que entende por um postulado, não fornece qualquer exemplo extraído da geometria, e, muito menos, menciona aqueles que, mais tarde, Euclides enunciaria nos ELEMENTOS. Por isso, Sir Thomas Heath tem por natural inferir que os cinco postulados tenham sido formulados pelo próprio Euclides. Por conta desse historiador da matemática e erudito helenista, há, ainda, uma indicação mais positiva da originalidade de Euclides na concepção do V Postulado. É que Aristóteles, em uma passagem do livro Analytica Priora (II, 16, 65^a 4), um dos tratados constituintes do Organon, acima mencionado, alude a alguma petitio principii envolvida na teoria das paralelas corrente em seu tempo (“...porque resulta que aqueles que raciocinam assim estão provando A por meio dele mesmo. Isso é o que aquelas pessoas fazem, as que supõem estar construindo linhas paralelas: pois falham no ver que estão admitindo fatos impossíveis de demonstrar, a menos que existam paralelas. Desse modo, resulta que aqueles que raciocinam assim, meramente dizem que uma particular coisa é, se ela é ...”). Essa mácula foi eliminada com o estabelecimento desse célebre Postulado. Honra e glória a Euclides, pois, quando consideramos as inúmeras tentativas frustradas de provar o Postulado, muitas feitas por matemáticos de altíssimo calibre, não há como deixar de admirar aquele que vislumbrou que uma tal hipótese, necessária à validade do seu sistema de geometria como um todo, era, de fato, indemonstrável naquele contexto.

Desde seu aparecimento, sabemos-lo, o V Postulado foi atacado como tal. Por que essa proposição, que nos parece tão óbvia, foi tão controversa? Consideremos, como foi hábito fazê-lo até o século XIX, que a geometria, costumeiramente chamada euclidiana, descreva, de fato, o espaço físico que nos circunda e suas propriedades. Desse ponto de vista, os postulados, sobre que se baseia essa geometria, deveriam ser abstraídos da experiência, e, aí, está o ponto nevrálgico da diferença entre os quatro primeiros e o V Postulado. Não exige qualquer esforço a aceitação dos dois primeiros como abstração de nossa experiência no traçado de retas, fazendo uso de régua. Do mesmo modo, o terceiro

representa nossa experiência com a utilização de um compasso. Talvez o quarto postulado seja o menos imediato, como uma abstração, mas, por certo, é derivado da nossa experiência com medidas de ângulo e com a constatação de que, se dois ângulos retos quaisquer forem adjacentes, os lados não comuns estarão sobre uma reta. O V Postulado é diferente, pois não podemos, pela experiência, saber se as retas se encontrarão ou não, uma vez que a experiência só nos permite traçar segmentos. Podemos estender os segmentos mais e mais, porém não eternamente. Além do que, sabemos que duas linhas podem se aproximar ilimitadamente sem nunca se encontrarem, como é o caso de uma curva e de sua assíntota - por exemplo, uma hipérbole e sua assíntota (aliás, em grego, “linhas assíntotas” quer dizer “linhas que não se encontram”) O V Postulado afirma que isso não acontece com duas linhas retas, o que, para todos os efeitos da experiência, não era intuitivamente claro.

Situação análoga enfrentou o Axioma da Escolha. A crítica a ser feita aqui, para descartar o Axioma, é seu efeito apenas existencial e não construtivo. O Axioma garante a existência de um conjunto seleção (ou, equivalentemente, de uma função de escolha), porém não fornece o meio de construí-lo

O V Postulado proporciona, como vimos, o embasamento para a teoria das paralelas, a qual tem papel importantíssimo na geometria, a parte ímpar, por excelência, da matemática grega.

O Axioma da Escolha é, possivelmente, o mais fundamental para a matemática atual. Sem ele, uma porcentagem elevadíssima dos teoremas dessa matemática não poderiam ser demonstrados.

Euclides parece que, compreendendo o caráter pouco intuitivo de seu Postulado, retarda-lhe a aplicação, só o fazendo na impossibilidade de evitá-lo, isto é, a partir da Proposição 29 do Livro I dos ELEMENTOS, cujo enunciado é o seguinte: “Uma linha reta, caindo sobre retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si, o ângulo exterior igual ao ângulo interior e oposto, e os ângulos interiores do mesmo lado iguais a dois retos.”

Também o Axioma da Escolha só é empregado quando estritamente necessário, soando como uma conquista quando se pode exibir uma demonstração que não o use, mesmo no caso de a demonstração alternativa, que o supusesse, ser bem menos complicada. Alguns textos matemáticos assinalam, de algum modo, o enunciado daqueles teoremas cuja demonstração seja levada a cabo com o auxílio do Axioma.

Proclus, como já dissemos, um filósofo do quinto século de nossa era, e um dos últimos chefes da Escola Neoplatônica, entre muitas outras obras, escreveu um “Comentário do Livro I dos ELEMENTOS de Euclides”. Além de observações, passo a passo, sobre tudo o que é tratado naquele Livro dos ELEMENTOS, o trabalho de Proclus contém, ainda, um longo Prólogo, em duas partes, graças ao qual conhecemos quase tudo o que sabemos a respeito da história da matemática grega.

Depois de enunciar o V Postulado, Proclus anota: “É necessário apagar isso completamente dos postulados; pois é um teorema, comportando muitas dificuldades, as quais também Ptolomeu, em um livro, propôs-se resolver, sendo necessários para a demonstração tanto muitas definições quanto muitos teoremas. E, ao menos, a recíproca, também Euclides mostrou como um teorema” (191.21-26).

Desse modo, como Proclus é o porta-voz de um passado de séculos, vemos que, desde o começo, o Postulado foi atacado como tal, e foram feitas tentativas de prová-lo a

partir dos outros postulados e, como afirma Proclus, de “muitos teoremas”- é claro que derivados dos outros postulados- ou de eliminá-lo pela adoção de alguma outra definição de paralelas.

O Axioma da Escolha, igualmente, desde o início teve contestado seu papel como um dos princípios fundamentais da matemática. David Hilbert escreveu uma vez (“Über das Unendliche”, Math. Annalen, 95 (1926), 161-190) que o Axioma da Escolha de Zermelo era o axioma “mais atacado, até o presente, na literatura matemática...” (p.178). Ao que, mais tarde, Abraham Fraenkel acrescentou (Fraenkel, A. & Y. Bar-Hillel, Foundations of Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1958): “o axioma da escolha é, provavelmente, o mais interessante e, apesar de seu aparecimento tardio, o mais discutido axioma da matemática, secundado apenas pelo axioma das paralelas de Euclides, que foi introduzido há mais de dois mil anos” (pp. 55-56). Conforme assevera Gregory H. Moore (“Zermelo’s Axiom of Choice- Its Origins, Development, and History”, Springer-Verlag, N.Y., 1982), em seu Prólogo: “ Raramente os praticantes da matemática, uma disciplina conhecida pela certeza de suas conclusões, diferiram tão veementemente sobre uma das premissas centrais, como o fizeram sobre o Axioma da Escolha. No entanto, sem o Axioma, a matemática hoje seria muito diferente. A própria natureza da matemática moderna seria alterada e, se prevalecessem as mais severas críticas construtivistas ao Axioma, a matemática estaria reduzida a uma coleção de algoritmos. De fato, o Axioma resume as mudanças fundamentais – matemáticas, filosóficas e psicológicas – ocorridas, quando os matemáticos começaram, seriamente, a estudar coleções infinitas de conjuntos.”

Ainda Moore observa (pp.64-65), de modo contundente: “É uma ironia histórica que muitos matemáticos, que posteriormente se opuseram ao Axioma da Escolha, tenham-no usado implicitamente em suas próprias pesquisas. Isso ocorreu, principalmente, com aqueles que estavam seguindo a teoria dos conjuntos de Cantor ou procurando aplicá-la à análise real. Na virada do século XX, tais analistas incluíam René Baire, Émile Borel e Henri Lebesgue, na França, (...). (...) quando infinitas escolhas arbitrárias ocorriam no trabalho de matemáticos como Borel, revelavam uma certa ambivalência concernente aos métodos permitidos em matemática. Essa ambivalência metodológica – defrontando a teoria dos conjuntos de Cantor, a noção de uma função real arbitrária e hipóteses não construtivas – tipificou as pesquisas de Baire, Borel e Lebesgue. (Mas) a demonstração de Zermelo, em 1904, do Teorema da Boa Ordem levou-os a desenvolver sua filosofia construtivista da matemática e a tornarem-se, crescentemente, intolerantes para com métodos não construtivos, como o Axioma (da Escolha).”

As tentativas de demonstração do V Postulado fizeram conhecidas, desde tempos remotos, muitas proposições equivalentes a ele, assim como os esforços para livrar a matemática do Axioma da Escolha mostraram-se apenas férteis em desvendar, à comunidade científica, um grande número de resultados, nos vários ramos da matemática, todos equivalentes ao Axioma. Existe mesmo um livro – (Rubin, Hermann & Jean Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice, North-Holland, Amsterdam, 1963¹, 1985²), em que se acham assinaladas mais de duzentas proposições equivalentes ao Axioma da Escolha.

Para ilustração, tomaremos como exemplos algumas dessas proposições, para um caso e para o outro.

(1) V Postulado

Seguiremos, aqui, de perto, os passos de Luis Santaló (Geometrias no Euclidianas, EUDEBA-Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1961¹, 1963², p.10 e ssq.).

Como mencionamos anteriormente, a definição de retas paralelas dada por Euclides, já o apontava Proclus, deixa aberta a possibilidade de existência de retas assintóticas. Se tal caso for explicitamente eliminado, o V Postulado pode tomar a seguinte forma:

(E1) Duas retas paralelas são equidistantes.

Análogo é a forma dada ao Postulado por C. Clavius (1537-1612):

(E2) Se três pontos estiverem de um mesmo lado de uma reta e equidistantes dela, os três pontos pertencerão a uma mesma reta.

Essa afirmação equivale a dizer que o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta (de um mesmo lado dela) é outra reta.

A partir de um resultado, que Proclus considerava evidente e atribui a Aristóteles, a saber, que a distância entre dois pontos de duas retas que se cortam pode tornar-se tão grande quanto se queira, quando se prolongam suficientemente as duas retas, o Postulado equivale a:

(E3) Se uma reta encontrar uma de duas paralelas, encontrará, necessariamente, a outra.

Ainda,

(E3´) Por um ponto exterior a uma reta pode-se traçar uma e uma só paralela à dita reta.

Ou,

(E3´´) Duas retas (distintas) paralelas a uma terceira são sempre paralelas entre si.

A forma (E3´) é uma das mais comumente usadas e é, em geral, atribuída ao matemático inglês John Playfair (1748-1818).

Do mesmo tipo, mais bem posterior, é a forma dada por A. M. Legendre (1752-1833):

(E4) Por um ponto qualquer, tomado no interior de um ângulo, pode-se traçar sempre uma reta que encontre os dois lados do ângulo.

Diferentemente, porém de grande importância, é a forma dada por J. Wallis (1616-1703):

(E5) Dado um triângulo qualquer, existirá sempre um semelhante de magnitude arbitrária. Ou seja, a existência de triângulos semelhantes é característica da geometria de Euclides. (Nas geometrias não-euclidianas, se dois triângulos tiverem seus ângulos iguais serão congruentes, pois o tamanho de um triângulo fica determinado por seus ângulos).

Wallis afirma que sua forma para o V Postulado é a mais próxima do pensamento de Euclides, pois o III Postulado estabelece a existência de circunferências semelhantes, e parece natural na seqüência postular a existência de semelhança também para outras figuras geométricas.

Equivalência obtida pelo jesuíta G. Saccheri (1667-1733) e seguida depois por J.H.Lambert (1728-1777) e por A.M.Legendre:

(E6) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos.

E a interessante forma conseguida por Gauss:

(E7) Existem triângulos de área tão grande quanto se queira.

(2) Axioma da Escolha

(E1) Todo conjunto pode ser bem ordenado.

(E2) O produto cartesiano de um conjunto de conjuntos não vazios é não vazio.

(E3) Se P for um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia em P tenha limite superior, então P terá um elemento maximal. (Lema de Zorn)

(E4) se A for um sistema algébrico, B , uma subálgebra de A e $a \in A-B$, existirá uma subálgebra \subseteq -maximal de A , contendo B e não contendo a .

(E5) Uma função será sobrejetora se e somente se for invertível à direita.

(E6) O produto de espaços compactos é compacto na topologia produto.

(E7) A esfera unitária no dual de um espaço vetorial normado sobre os reais tem um ponto extremo.

(E8) Uma fórmula, tendo um modelo em um conjunto de cardinalidade \aleph_0 , terá também um modelo em um conjunto de cardinalidade k , para todo $k \geq \aleph_0$.

6. Epílogo

A prova, cuja rota fora apontada já por Gauss (1777-1855), Schweikart (1780-1859), e Taurinus (1794-1874), e definitivamente trilhada por Lobatschewsky (1793-1856) e Bolyai (1802-1860), de que as negações do V Postulado conviviam harmoniosamente, isto é, sem contradições, com os outros postulados de Euclides, garantia que o V Postulado, de fato, era independente dos outros, não era uma consequência dos outros, não poderia mesmo ser um teorema, demonstrável a partir desses outros. Então, a aceitação ou não do V Postulado, como um dos princípios para a geometria, passou a ser uma questão de escolha de que tipo de geometria interessava-nos: com o V Postulado, a Geometria Euclidiana; com uma de suas negações, uma Geometria Não-Euclidiana.

Em 1938-1940, Gödel (1906-1974) mostrou que o Axioma da Escolha era consistente com os outros axiomas da teoria dos conjuntos (o sistema Bernays-Gödel), isto é, caso não seja possível deduzir uma contradição a partir dos outros axiomas, quando juntarmos a eles o Axioma da Escolha, não se poderá deduzir, ainda, uma contradição. Por fim, o matemático americano Paul Cohen provou, em 1963, que o Axioma da Escolha é independente dos outros axiomas da teoria dos conjuntos, estabelecendo, assim, pelo menos em princípio, as existências paralelas de uma teoria dos conjuntos zermeliana, com o Axioma da Escolha, e de uma teoria não-zermeliana, com a negação do Axioma.

Desse modo, podemos quase que dizer que, como dois heróis legendários, depois de múltiplas peripécias, dificuldades, obstáculos, com o passado redimido, o V Postulado e o Axioma da Escolha regressam à pátria matemática e vivem felizes para sempre.

Bibliografia

- Artmann, B. 1999. *Euclid-The Creation of Mathematics*. N.Y.: Springer.
- Bicudo, I. 2001. *O Primeiro Livro dos ELEMENTOS de Euclides*. Natal: Editora da SBHMat.
- Bonola, R. 1955. *Non-Euclidean Geometry*. N.Y.: Dover.
- Euclidis ELEMENTA*. 1969-1977. I.L.Heiberg (ed.). Leipzig: Teubner.
- Fraenkel, A. A. & Bar-Hillel, Y & Levy, A. 1973². *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland.
- Greenberg, M. J. 1999. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries - Development and History*. N. Y.: Freeman.
- Hartshorne, R. 2000. *Geometry: Euclid and Beyond*. N. Y.: Springer.
- Heath, T.L. 1956². *Euclid-The Thirteen Books of The Elements*. N. Y.: Dover.
- Kline, Morris. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. N. Y.: Oxford Univ. Press.
- Heijenoort, J. van (ed.). 1967. *From Frege to Gödel*. Cambridge: Harvard Univ. Press.
- Moore. G. H. 1982. *Zermelo's Axiom of Choice-Its Origins, Development, and Influence*. N. Y.: Springer.
- Proclus. 1873. *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*. G. Friedlein (ed.). Leipzig: Teubner.
- Rubin, H. & Rubin, J. E. 1985. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. Amsterdam: North-Holland.
- Russell, B. 1995. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Routledge.
- Santaló, L. 1963². *Geometrías no Euclidianas*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires-EUDEBA.

Irineu Bicudo

Professor Titular do Departamento de Matemática
Instituto de Geociências e Ciências Exatas-
Unesp-Rio Claro

E-mail: ibicudo@rc.unesp.br