Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 5 (abril/2003 - setembro/2003) - pág. 75 -106
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

NÚMEROS TRANSCENDENTES

Nelo da Silva Allan

UNEMAT - Brasil

INTRODUÇÃO

Seja Z o conjunto dos números racionais inteiros e Q o conjunto dos racionais. Seja R o conjunto dos reais e C o dos complexos. Todo número que não é racional chama-se irracional. Seja Q^{alg} o conjunto de todos os números algébricos, i.e., números que são raízes de polinômios p(x) a coeficientes inteiros. A será o conjunto de todos os números algébricos que não são racionais. Um número real ou complexo que não é algébrico chama-se transcendente.

SÉTIMO PROBLEMA DE HILBERT, OU PROBLEMA DE HILBERT – EULER

O sétimo problema de Hilbert é o seguinte: Mostrar que a^b é transcendente se a e b forem algébricos com $a\neq 0$, 1, e b não racional.

O problema foi resolvido em 1935 independentemente por Aleksandr Osipovich Gelfond (1906-1968) e Theodore Schneider (1911-1988).

Nosso objetivo é dar uma visão muito grosseira do que foi a teoria de números transcendentes antes e depois de Hilbert. Esperamos que alunos de graduação entendam a parte histórica do conteúdo e que os alunos de pós possam ter uma idéia melhor deste conteúdo, bem como colegas de áreas correlatas ou não. Esperamos ter feito um resumo olhando com os óculos de um míope com grau bem grande estes 4000 anos de matemática.

Pretendemos fazer um curto apanhado histórico do desenvolvimento desse problema antes e depois de 1900, até o trabalho de Alan Baker (1939-...) no final da década dos anos 70. Discutiremos, também, um pouco das técnicas envolvidas, dando uma idéia grosseira da demonstração de Th. Schneider - Serge Lang (1927-...). Tratamos dos fatos que se desenrolaram paralelamente, como a teoria de Siegel e a de Mahler. Em princípio, apresentamos muitas famílias de funções cujos valores em pontos algébricos são transcendentes. Nos limitamos à teoria de uma variável, não comentando os importantes trabalhos de W Schmidt e de M. Waldschmidt. Mencionaremos alguns resultados posteriores para o leitor ter uma idéia muito leve de como é a teoria hoje, e o mais importante o que consultar se estiver interessado. Nossa exposição está longe de ser completa, como também está longe de outras excelentes exposições como, por exemplo, [L3], [FS], [Bz], [FN], [M] e outros. Paramos em 1970, pois nos últimos 30 anos a teoria cresceu muito. Vamos tratar praticamente de transcendência em C. Mencionamos alguns fatos no caso p-ádico, como também transcendência sobre C(z), o corpo das frações algébricas sobre os complexos, e aqui a bibliografia está limitada a 1970. Também não iremos tratar de medida de transcendência, o que se encontra bem explicado em [FS], [T], [S], e [FN], pois esta teoria, até o momento, tem muitos resultados aproximados, porém está ainda engatinhando. Mencionaremos casos simples de se enunciar, observando que atualmente quando se obtém um resultado de transcendência, ele vem acompanhado de uma estimativa da medida de transcendência, que está intimamente ligada ao método de Gelfond - Baker, muito bem descrito em [T] e [L3]. Outro aspecto que não trataremos são os pontos transcendentes de grupos lineares, grupos algébricos comutativos e variedades algébricas; sugerimos que o leitor veja [L3]. Não comentamos característica diferente de zero.

IRRACIONALIDADES ALGÉBRICAS

O estudo das irracionalidades tem dois aspectos. O primeiro é mais prático e consiste num cálculo aproximado destes números; ele tem suas origem na Babilônia (2000 AC), [Bz, p.12]. O segundo é que nos fornece uma base matemática, uma demonstração que certos números não são racionais (este aspecto é grego).

A teoria de números transcendentes nasce com a demonstração de que $\sqrt{2}$ não é racional. Este fato é atribuído à Escola Pitagórica e, posteriormente, a Aristóteles (384-324AC). Ele usa o conhecido argumento elementar do par - ímpar. Sua generalização depende da decomposição única em fatores primos. O reconhecimento da existência de outros números, mais especificamente a demonstração de que as raízes de 3, 5, 7, 11, e 13, são irracionais, é atribuída a Teodoro (465-328 AC), (ver discussão de Hardy-Wright, [HW, § 4.5]}. Ao estilo grego estas demonstrações eram geométricas. Mesmo com a decomposição em fatores primos o estudo dos números algébricos depende da teoria de equações. A decomposição em fatores primos certamente era familiar a Euclides, Diofanto e muitos outros matemáticos, porem sua demonstração impressa só veio aparecer pela primeira vez no *Disquisiciones* de Gauss. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), por volta de 1800, mostra o teorema fundamental da álgebra, como também mostra que se uma equação a coeficientes inteiros, $a_0x^n+...+a_n=0$ admite uma raiz racional a/b, sendo a e b relativamente primos, então b divide a_0 e a divide a_n. Logo, são irracionais todos os números que satisfazem a uma equação irredutível de grau maior que um. Em resumo, temos um critério para que um número seja irracional algébrico.

<u>Teorema (Gauss):</u> Seja p(x) um polinômio irredutível a coeficientes em Q, então todas as suas raízes são números irracionais.

EMBRIÃO DA TRANSCENDÊNCIA (SÉCULO XVIII): Leonard Euler (1707-1783) e Johan Heinrich Lambert (1728-1777).

A primeira menção de um número que possivelmente é não algébrico é devida a Goettfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) e este número é 2^b com $b=1/\sqrt{2}$; ele o chamou de intercendental, [FN, p.146]. Euler, em seu livro *Introductio in analysis infinitorum*, 1748, menciona que os logaritmos, bem como outras funções elementares de números inteiros, não devem ser algébricos, como também o número $\gamma=\lim_{k\to\infty}(\ln k-(1+1/2+...+1/k))$, hoje chamado de constante de Euler. Seguindo Gelfond, [G, p.2]: “tais números não podem ser irracionalidades (números algébricos) e devem ser contados como transcendentes”. Ele se refere em específico aos valores do logaritmo. Provavelmente ele estaria tentando caracterizar funções que não são algébricas; as funções transcendentes talvez pudessem ser definidas como funções que assumem valores não algébricos nos números inteiros ou em algébricos, com algumas exceções obvias. Esta seria uma tentativa de classificação das funções. Em 1761, Lambert usando desenvolvimento de tg(x) em fração continuada consegue mostrar que tanto o número *e* como o π são irracionais. Ele mostra também que os logaritmos naturais dos números racionais $r \neq 1, 0$, são irracionais e o mesmo vale para valores não triviais de funções trigonométricas. Lambert termina este trabalho com a seguinte conjectura:

"Nenhuma quantidade transcendental circular ou logarítmica onde não aparece nenhuma outra quantidade transcendental, pode ser expressa por quantidade que é um radical irracional" (Ver Brezinski, [Bz, p.110/111], ou Feldman-Nesterenko [FN, p.27]).

APROXIMAÇÕES DE RADICAIS QUADRÁTICOS POR RACIONAIS

Um dos primeiros problemas de aproximações por frações é o de radicais quadráticos. Nos primeiros estágios, os babilônios resolveram o problema deste cálculo surgindo daí os primeiros vestígios do método das frações continuadas. No primeiro estágio ele coincide com a comparação da média geométrica com a aritmética: o uso da recorrência de radicais para $A=a^2+r$, onde a é o maior quadrado contido em A. Se $x=\sqrt{A}$, a recorrência é baseada na equação $x=a+r/(x+a)$. Esta recorrência só ficou clara com Heron (70AC?) que usa o conhecido processo de Isaac Newton (1642-1727): $a_{n+1}=(a_n+A/a_n)/2$, partindo de $a_1=a$. A técnica das frações continuadas começa com o algoritmo de Euclides (306-283AC), [E, Livro X, prop2] (antifarese) e prop3 (algoritmo estendido de Euclides), a antifarese é um critério de irracionalidade no qual apresenta a inconveniência de termos que saber todas as (infinitas) etapas do processo. A primeira demonstração baseada nela só foi feita em 1658 por G. Borelli (1608-1679), [Bz, p.15]. A técnica das frações continuadas foi usada por dezenas de matemáticos, e depois de um milênio e meio, por volta de 1570, veio a ser entendida na Itália, por Pietro Antonio Cataldi (1548-1626). Em 1657, Pierre de Fermat (1601-1665), propõe aos matemáticos ingleses o seguinte problema: mostrar que a equação $x^2-Dy^2=\pm 1$, sendo D livre de quadrados, tem um número infinito de soluções inteiras. William Brouncker (1620-1684) e John Wallis (1616-1703) apresentaram soluções que os levaram a noção de fração continuada. Por volta de 1650, Cristian Huygens (1629-1695) e Wallis, postularam o problema da melhor aproximação de um número real α por frações de denominador menor que um número prefixado. A solução deste problema é uma das convergentes (vide parágrafo seguinte) do desenvolvimento de α em fração continuada. Uns 50 anos mais tarde, começou um estudo sistemático destes objetos, primeiro com Euler e depois com Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Lagrange demonstra a propriedade de melhor aproximação, bem como o teorema que diz que frações periódicas são precisamente os desenvolvimentos de irracionalidades quadráticas. Estes resultados já eram conhecidos por Brahmagupta (598-665?) e por Baskara II (1115-?) os quais só chegaram ao Ocidente no fim do século XIX, vide [Bz, p.43].

O problema da transcendência é estabelecer critérios para reconhecer se um número é ou não transcendente. Ou como descobrir um teste que responda esta questão em um número finito de passos. A resposta é certo aspecto bem simples: Ela depende da maneira como aproximamos um número algébrico por frações. Esta maneira também nos fornece um critério de irracionalidade. Os números candidatos a transcendentes vão estar entre os que são definidos por um processo infinito ou por valores de funções definidas por séries, produtos infinitos ou frações continuadas envolvendo números ou funções algébricas. Mais tarde, os matemáticos descobriram que os números algébricos são, de certa maneira, os números que são pessimamente aproximáveis por racionais, [Lq].

FRAÇÕES CONTINUADAS

As frações continuadas foram até meados do século XIX, a grande ferramenta para tratar de problemas de aproximação por racionais e de irracionalidades. O trabalho de Lambert é feito em cima desta técnica, e por isso vamos descrevê-la. O livro clássico sobre este assunto é de Oskar Perron [P]. Este desenvolvimento está muito bem feito no livro de Ives Lequain [Lq].

Uma das técnicas de aproximação de raízes ou de frações com numeradores e denominadores muito grandes é o uso não formal do desenvolvimento generalizado do Algoritmo de Euclides. Este algoritmo é definido da seguinte maneira: Seja α um número real não racional, e designemos por $((\alpha))=\alpha-[\alpha]$, a parte decimal de α, onde $[\alpha]$ é designa o maior inteiro contido em α. Seja $a_0=((\alpha))$, e definimos por indução $a_n=((1/a_{n-1}))$. Já que α não é racional, pois $a_n\neq 0$. Introduziremos uma outra seqüência:

(1) $s_1=1/a_0,\ s_2=1/(a_0+1/a_1),\ s_3=1/(a_0+1/(a_1+1/a_2)),\ s_4=1/(a_0+1/(a_1+1/(a_2+1/a_3))),...$

Definamos $s_n:=[a_0,a_1,...,a_{n-1}]:=p_n/q_n$. O primeiro problema é determinar α a partir dos a_i. Mostra-se que s_n tende a α e daí escrevemos que $\alpha=[a_0,a_1,...,a_n,...]$ e chamamos a seqüência s_n de desenvolvimento de α em fração continuada, s_n chamam-se convergentes de α e $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ satisfazem as recorrência (2) com $b_n=1$:

Mas geralmente dados duas seqüências $\{a_n\}$e $\{b_n\}$ de números racionais, podemos definir a seqüência $s_n:=p_n/q_n$ com p_n e q_n definidos pelas recorrências. [P, p.5].

(2) $p_0=a_0,\ q_0=1,\ q_1=a_0a_1+b_1, q_1=b_1,\ p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2},\ q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}.$

O par de seqüências $\{\{b_n/a_n\}, \{s_n\}\}$, chama-se fração continuada e é indicada como

(3) $a_0+\underline{b_1}|a_1+\underline{b_2}|a_2+...$

A fração converge para α se s_n tende a α. Se α é racional, pelo algoritmo de Euclides, ele se escreve como uma s_n e neste caso escrevemos $\alpha=[a_0,a_1,...,a_n]$ e dizemos que a fração é finita. Se $b_n=1$, para todo n, e todos os a_n e s_n são inteiros (positivos) a fração chama-se regular (simples), e quando nos referimos às convergentes de α estamos nos referindo às convergentes de sua fração simples. A representação de um número irracional por uma fração continuada simples é única. O exemplo 2 nos mostra que as frações continuadas estão estritamente ligadas as recorrências duplas.

As frações continuadas simples têm a seguinte propriedade já mencionada anteriormente [Lq, p.44]:

Propriedade da aproximação (Huygens, Wallis):

Sejam dados α, real e N inteiros. A melhor aproximação de α por um racional cujo denominador é menor que N é uma convergente de α

Também se segue das recorrências (2) que:

$$|\alpha - p_n/q_n| < 1/(a_0(q_n)^2) < 1/(q_n^2) \tag{4}$$

Euler transitava livremente entre séries, frações continuadas, e produtos infinitos. Ele já tinha consciência de que uma fração continuada pode convergir mesmo que a série correspondente divirja [Bz, p.98/100]; aí está o germe da teoria de séries divergentes. Ele exibe exemplos de frações infinitas que representam números racionais. Para frações simples vale o seguinte critério de irracionalidade, aparentemente já conhecido por Euler: α é racional se e somente se na recorrência (2) $a_n = b_n = 0$ a partir de certa ordem. O critério abaixo é atribuído a Adrien Marie Legendre (1752-1833) em seu livro "*Eléments de Géométrie*" de 1784 [FN, p.114]. Ver demonstração em [Lq, p.67].

Critério de Legendre: A fração continuada $\{\{b_n/a_n\}, \{s_n\}\}$, representa um número irracional se e somente se $|b_n/a_n| < 1$ para todo n.

De uma maneira geral, é difícil mostrar o processo de desenvolvimento em fração continuada é infinito. É como a antifarese, no sentido de que temos que saber explicitamente todos os elementos da fração. A "demonstração" de que o número *e* é irracional foi obtida por Euler em 1737, quando obteve o seguinte desenvolvimento de e em fração continuada simples infinita:

$$e = [2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,...], \text{ onde } a_{3n} = 2n, a_{3n-1} = a_{3n-2} = 1, n > 0. \tag{5}$$

Usando o processo de transformar séries em frações continuadas, Euler obteve desenvolvimentos de ln(2), e^2, π, e outros números em fração continuada infinita.

Euler, Lagrange e Lambert trabalharam também com frações continuadas onde os a_n são frações algébricas; mais especificamente, ele obtém o seguinte desenvolvimento de tg(x) [Lq, §10], em fração continuada:

$$\operatorname{tg}(x) = \underline{1}|(1/x) - \underline{1}|(3/x) + \underline{1}|(5/x) - \underline{1}|(7/x) + ... \tag{6}$$

Aplicando-se o critério de Legendre segue-se que se $0 < x \leq 1$ for racional então tg(x) é irracional. Ou seja, por exemplo, $\pi/4$ não pode ser racional. Daí segue-se a irracionalidade de π e dos valores algébricos de funções circulares (ver Niven, [N, p.27]). O mérito de Lambert foi apresentar uma completa justificativa teórica não somente deste desenvolvimento como o de valores de e^x, com x racional, $x \neq 0$.

NÚMEROS TRANSCENDENTES: SÉCULO XIX

O desenvolvimento matemático do problema de Euler tomou três caminhos. O primeiro seria de construir exemplos de tais números. O segundo foi ter uma idéia da extensão do conjunto destes números. O terceiro era provar que são transcendentes os números mencionados por Euler - Lambert.

O número transcendente como objeto matemático só surge em 1844 com Liouville, que abordou nosso primeiro problema exibindo um critério para que um número irracional seja transcendente. Somente uns vinte anos mais tarde, George Ferdinand Ludwig Phillip Cantor (1845-1918), mostrou que o conjunto dos números reais é não enumerável. Por outro lado, o conjunto A dos números algébricos é enumerável, pois o conjunto de todas as equações a coeficientes inteiros é enumerável e, à fortiori, é também enumerável o conjunto de todas as suas soluções. Conseqüentemente o complemento de A que é o conjunto dos números transcendentes, não é enumerável e tem medida à Lebesgue igual a um. Diremos que quase todo número é transcendente. O terceiro problema é um dos problemas centrais da teoria de números transcendentes: mostrar que determinados números são transcendentes. Nesta direção, Charles Hermite(1822-1901), em 1873, mostra que o número *e* é transcendente, e pouco mais tarde, em 1882, Lindemann mostra que π é também transcendente. Este fato resolve completamente, de modo negativo, ao problema da quadratura do círculo. Aparentemente, Lambert foi o primeiro matemático a relacionar irracionalidades com a quadratura da circunferência. Legendre, Gauss e depois Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), por volta de 1820, e mais tarde Evariste Galois (1811-1832), tornaram mais precisos esta relação onde o problema da quadratura do círculo de uma construção com régua e compasso, é transformado no problema de verificar se um dado número satisfaz uma equação cujo grau é uma potência de 2. A transcendência de π agitou o meio matemático; vários matemáticos foram rever a demonstração de Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939) na tentativa de simplificá-la, dentre eles Karl Theodor Weiestrass(1815-1897), Julius Hurwicz (1859-1919) e David Hilbert (1862-1943). Foi um dos grandes feitos matemáticos do final de século XIX. Koksma, [K, p.60 (18)], contém uma lista grande de trabalhos contendo outras demonstrações aos quais essencialmente não diferem muito das iniciais. Nesta época foi postulado o Sétimo Problema de Hilbert, também chamado problema de Euler - Hilbert: a transcendência de valores de logaritmos e exponenciais e mais especificamente de a^b com $a \neq 0,1$ e b algébrico não racional. Hilbert achava que este problema não seria resolvido neste século, o que não aconteceria com outros problemas como a Hipótese de Riemann, sobre os zeros da função zeta. Aconteceu justamente o contrário, ele foi completamente resolvido por Gelfond e Schneider em 1935. Isto mostra que a dificuldade de um problema matemático só aparece depois que ele é resolvido.

De uma maneira bem grosseira, Liouville e Hermite criaram a área de números transcendentes introduzindo o que lhe é característico: idéias e ferramentas. Do ponto de vista histórico - matemático isso é o importante. A área desenvolveu-se primeiramente em torno desses ingredientes.

Números de Joseph LIOUVILLE (1809-1882)

O processo da transcendência começou com Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) em sua tentativa de aproximar irracionais por racionais. Ele mostra que dado um irracional α em [0,1], existe um número infinito de frações p/q tais que $|q.\alpha-p|<1/q$ em outras palavras, dado α, sempre podemos encontrar um inteiro q tal que $q.\alpha$ seja bem próximo a um inteiro. Esta desigualdade se escreve

(7) $$|\alpha-p/q|<1/q^2$$

e com ela começa um certo abandono do uso das frações continuadas as quais, a menos do seu uso por Hermite e Maillet, somente vieram a ser usadas por volta de 1970. Dirichlet usa o princípio das casinhas de pombos e nos diz que se n+1 pombos entram em n casas, haverá uma casa com dois pombos.

Aqui começa a despontar uma primeira diferença entre os números algébricos e os transcendentes. O que Liouville viu foi que se a seqüência $\{a_i\}$ cresce muito rapidamente, então o número é transcendente.

Dado um número α algébrico, existe um polinômio P(x) a coeficientes inteiros, de grau minimal, digamos n, tal que $P(\alpha)=0$. P é único a menos de uma constante. Neste caso, dizemos que α é algébrico de grau n. A idéia de Liouville é bem simples. Se,

(8) $$P(x)= a_0x^n+...+a_n\ ,\ |q^nP(p/q)|= |a_0p^n+...+a_nq^n|\geq 1$$

Usa-se o teorema da média para estimar $|P(p/q)-P(\alpha)|$:

(9) $$|P(p/q)-P(\alpha)|=|P'(c)|.|(p/q- \alpha)|,\ \text{ou seja}\ |\alpha-p/q|>M.q^{-n}$$

onde, 1/M é o máximo de $|P'(x)|$ num certo intervalo, digamos $[\alpha-1,\alpha+1]$. Esta desigualdade vale qualquer que sejam p e q. Daí sai uma condição necessária para que um número seja algébrico de ordem n: Existe uma constante M dependendo somente de α, tal que para todo inteiro positivo q temos $|\alpha-p/q|>M.q^{-n}$. Conseqüentemente, temos uma condição suficiente para que um número seja transcendente.

<u>Critério de transcendência de Liouville</u>: α é transcendente se existir um número C>0 dependente somente de α, tal que para cada N inteiro positivo a desigualdade

(10) $$|\alpha-p/q|<C.q^{-N}$$

tem um número infinito de soluções p/q.

A demonstração deste critério é imediata: suponhamos que α seja algébrico de grau n e que a condição acima seja satisfeita. Comparando as duas desigualdades, temos que para cada N, existe um inteiro q, tal que q^{N-n} é menor que C/M para um número infinito de valores de N, o que é absurdo.

Este critério admite a seguinte variante:

<u>Proposição</u>: α é transcendente se existir um número C>0 dependente somente de α, e uma seqüência de números reais r(i) tendendo para o infinito, tal que para cada i a desigualdade $|\alpha\text{-}p/q|<C.q^{-r(i)}$ tem um número infinito de soluções p/q.

De fato, toda solução q de $|\alpha\text{-}p/q|<C.q^{-r(i)}$ é também solução de $|\alpha\text{-}p/q|<C.q^{-[r(i)]+1}$. □

A conseqüência deste critério é que o número $\alpha=\Sigma r^{-n!}$, com r inteiro, r>1, é transcendente, e o mesmo acontece com a fração continuada β onde $a_i=r^{n!}$ [HW, p.162]. Aqui, salvo menção contrária, todos as somatórias vão do menor inteiro não negativo onde o termo geral faz sentido até infinito.

De fato, fixemos um inteiro positivo N, e se S_n for a soma parcial de ordem n da série $\alpha=\Sigma\, r^{-n!}$, podemos escrever que $S_n=p/r^{n!}=p/q$. Então,

(11) $$0<\alpha\text{-}p/q=\alpha\text{-}S_n=r^{-(n+1)!}+r^{-(n+2)!}+\ldots<2.r^{-(n+1)!}<2\,q^{-n}<q^N.$$

Logo, $|\alpha\text{-}p/q|>M.q^{-N}$ possui um número infinito de soluções S_n com n>N. . □

Uma análise imediata deste argumento mostra que é transcendente o número α definido por $\alpha=\Sigma c(n)q^{-g(n)}$ onde $c(n)\in Z$ é limitada por L, g(n) crescente, e $\lim(g(n+1)/g(n))=\infty$. De fato dado M podemos escolher n tal que g(n+1)>Mg(n), e daí $S_n=A(n)/q^{g(n)}$, e $|R_n|<2L/(q^{g(n)})^M$.

Seja $F\infty$ o conjunto de todas as funções g(n) de Z_+ em Z_+ que são estritamente crescentes e tais que $\lim(g(n+1)/g(n))=\infty$. Seja Γ a função gama de Euler, fatorial generalizada, definida por $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$. Ela satisfaz a equação $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, ou melhor, se n for inteiro positivo $\Gamma(n+1)=n!$ Assim, se $a(n)\in Z_+$, é estritamente crescente, então $[\Gamma(a(n))]$ está em $F\infty$. Uma pequena modificação do argumento acima mostra que: (ver [C])

<u>Lema 1</u>: Suponhamos que c_n seja uma seqüência limitada de números inteiros com um número infinito de valores diferentes de zero. Seja $g\in F\infty$. Então, a função f(z)= □$\Sigma c_n z^{-g(n)}$ toma valores transcendentes em z=p/q com 0<|z|<1.

Chamemos de funções lacunárias de Liouville às funções f(z)=□$\Sigma c_n z^{-g(n)}$. Elas também são chamadas por Mahler de fortemente lacunárias [M]. Chamemos de números de Liouville aos números reais que satisfazem nossa condição (10). Funções lacunárias enviam inteiras positivas, em transcendentes, porém, como mostra Mahler, mais tarde elas não necessariamente enviam algébricos em transcendentes. Olhando a estrutura de F_∞, vemos uma quantidade não enumerável destes números. Em 1898, Emile Borel (1871-1956), mostrou que o conjunto dos números de Liouville tem medida Lebesgue igual a zero.

TRANSCENDÊNCIA DE *e*

Liouville, em 1840, mostra que o número *e* não satisfaz a nenhuma equação do segundo grau a coeficientes inteiros. Sua demonstração é bem simples e baseia-se no fato de podermos aproximar simultaneamente *e* e e^{-1}.

Já em 1848, tanto Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) como Hermite, perguntavam-se sobre aproximação simultânea de uma família finita de números reais. Este seria o primeiro passo para a generalização da demonstração de Liouville.

A demonstração de Hermite de que π^2 é irracional é precursora da transcendência de *e,* e também usa as parciais de certa fração continuada.

Hermite apresenta uma série de trabalhos ao Compte-Rendus de 1873, que culminam com a demonstração da transcendência de *e*. Nestes trabalhos está a idéia de Hermite: estabeleço uma fórmula, dependendo de certo número de parâmetros, tal que diante das negações da hipótese o lado esquerdo é um inteiro positivo e o lado direito, mediante escolha conveniente dos parâmetros, é menor que um. A idéia de Hermite foi a fórmula funcional para aproximação simultânea!

Identidade de Hermite: Seja f(x) um polinômio e formemos o polinômio soma de todas derivadas de f. Então,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x) \quad , \tag{12}$$

$$e^x F(0) - F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt$$

A verificação desta identidade é feita por meio de sucessivas integrações por partes.

A demonstração de que *e* é transcendente segue as seguintes etapas:

Suponhamos que existe um polinômio a coeficientes inteiros p(x) tal que $p(e)=a_0+a_1.e+...+a_ne^n=0$. Então, usando a identidade termo a termo e adicionando-as, obtemos:

$$0 = p(e)F(0) = \sum_0^n a_k F(k) + e^k \int_0^k e^{-t} f(t)dt \tag{13}$$

Escolhemos a função f de modo que $\Sigma a_k F(k)$ seja inteiro maior que um para qualquer família $\{a_0,a_1,...,a_n\}$. É conveniente que a função seja dependente de um parâmetro p primo o qual faremos crescer indefinidamente forçando o segundo membro tender à zero.

A função escolhida é:

(14) $f(x)=(x^{p-1}/(p-1)!).((1-x)(2-x)...(n-x))^p$, $p>n+|a_0|$.

As derivadas desta função têm as seguintes propriedades:

$f^{(k)}(0)$ é 0 se $k<p-1$, $(n!)^p$ se $k=p-1$, e é divisível por p para todo $k>p-1$.

Assim, $F(0) = (n!)^p+$ termos divisíveis por p. Desta forma, F(0) é inteiro e maior que 1. $f^{(k)}(m) =0$ se $k=0,...,p-1$ e p divide $f^{(k)}(m)$ se $k>p-1$. Portanto, para $m>0$, F(m) é divisível por p. O valor absoluto do lado direito envolvendo as integrais pode ser majorado por $C.a^p /(p-1)!$, onde C e a são constantes independentes de p. Vide [G, p.44]. Logo, o lado direito tende a zero quando p tende para o infinito.

A identidade de Hermite, bem como outras semelhantes, podem ser usadas para demonstração direta da irracionalidade de exponenciais e funções trigonométricas. Em [N], capítulo II, as demonstrações são feitas com a escolha conveniente de f. (o autor condensa parte das propriedades de 3) no seu lema 2.3 usando $f(x)=(x^n/n!).g(x)$, onde g é polinômio a coeficientes inteiros. [D] contém uma demonstração em nível de graduação.

TRANSCENDÊNCIA DE π

Vamos agora tratar da transcendência de π, seguindo a demonstração de [HW]. Suponhamos que π seja algébrico; então, também o será $i\pi$□□. Seja $x^n+d_1x^{n-1}+...+d_n=0$ a equação satisfeita por $i\pi$□e sejam $w_1,...w_n$ suas raízes. Como $w=i\pi$ implica que $1+\exp(w)=0$, então $0=\Pi(1+\exp(w_j))$, onde $\exp(x)=e^x$. Daí segue-se que existe uma relação $c+\Sigma\exp(\alpha_j)=0$ com α_j sendo uma função simétrica de $\{w_i\}$ e $c\neq 0$. O problema é transformado então em mostrar que tal relação é impossível. Usando o argumento acima com $g(x)=\Pi(x-\alpha_j)^p$ e com $c+\Sigma\exp(\alpha_j)=0$ em vez de $p(e)=0$, obtemos uma demonstração de transcendência de π□□□ ,[HW, p.175/176], ou [A].

Hermite não percebeu a profundidade de seu método, porém só com este argumento Lindemann conseguiu dar um passo a frente no entendimento do problema. O teorema que se segue foi enunciado por Lindemann e demonstrado por Weiestrass.

<u>Teorema (Lindemann - Weiestrass)</u>: Sejam $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ números algébricos linearmente independentes sobre os racionais. Então, $\{\exp(\alpha_j)$ são linearmente independentes sobre conjunto Q^{alg} dos números algébricos.

Não é difícil mostrar que nossa afirmação é equivalente a dizer que $\{\exp(\alpha_j)\}$ é linearmente independente sobre os racionais. Somente mais tarde, com Siegel e com Morduhai-Boltovskoi, viu-se que isto também equivale a dizer que os $\{\exp(\alpha_j)\}$ são algebricamente independentes sobre os racionais. Para verificar a primeira afirmação, basta assumir que existe uma relação $\Sigma\beta_j\exp$□α_j□$=0$ e multiplicá-la pelas conjugadas relativas aos β, e mostrar que pelo menos um termo é diferente de zero.

Vamos agora apresentar um resumo da demonstração do teorema de Lindemann feita em 1883 por Andrei Andreievich Markov (1856-1922). Como já observamos, podemos supor que $\{\exp(\alpha_j)\}$ são linearmente independente sobre os racionais. Seja q(x) o polinômio minimal satisfeito por todos os $\{\alpha_j\}$. Multiplicando a expressão pelos conjugados $\Sigma a_i.\exp(\alpha_j^{(\sigma)})$, podemos supor que q é mônico, irredutível, que $a_i=1$, e que $\{\alpha_j\}$ é o conjunto de todas as raízes de q.

Aplicamos a identidade de Hermite com função

$$f_i(x)=(q(x)^{p-1}/(p-1)!).(q(x)/(x-\alpha_i))^p.$$

Somando $\Sigma\ F_i(\alpha_j)$ em j obtemos números $R(\alpha_i)$, que são inteiros algébricos. Seja $L=\Sigma\ R(\alpha_i)$. Então, por um lado L é inteiro e por outro $|L|< c/((p-1)!)^n$ onde c não depende de c e n é o grau de q(x). Tomando p suficientemente grande obtemos uma contradição.

Em 1893, Hilbert apresenta uma outra demonstração da transcendência de *e* de π□□ que segue a mesma linha de [HW]; ele multiplica cada termo da relação $p(e)=0$ pela integral $\int_0^{\infty} z^p \Pi(z-j)^{p+1} e^{-z}$□□□ separa as integrais e os coeficientes de e^j de 0 a j num termo S_1, e das integrais de j a infinito que juntas dão S_2. Daí, por cálculo direto e majorações, mostra que S_1 é inteiro maior que 1 e que S_2 tende a zero com p. Hilbert observa que uma variante de seu argumento aplica-se também a demonstração do teorema de Lindemann.

VALORES DE FUNÇÕES ANALÍTICAS EM PONTOS ALGÉBRICOS: fim do Século XIX

Todo trabalho anterior foi provar que determinados números são transcendentes, e todos os que foram tratados são valores especiais de funções analíticas definidas por séries cujos coeficientes são todos números algébricos. Isto sugere uma caracterização das funções que tem valores transcendentes em pontos algébricos. Aqui tratamos de funções analíticas numa vizinhança da origem. Uma função de variável complexa chama-se analítica num ponto z se admite um desenvolvimento em série numa vizinhança de z. Vamos trabalhar em z=0 e requerer que todos os coeficientes de seu desenvolvimento de Taylor sejam números algébricos. Uma função inteira ou transcendente é uma função analítica em todo plano. Assim, o problema básico da transcendência é o comportamento aritmético destas funções em pontos algébricos. Um dos primeiros problemas é determinar o conjunto de S[f] de pontos z algébricos do domínio de f tais que f(z) é também algébrico. S[f] é enumerável. A primeira pergunta é qual é a propriedade de S[f]?. Algumas das questões obvias foram logo descartadas. Weiestrass demonstra seu celebre teorema de zeros: dada uma família enumerável de números que não possui ponto de acumulação e uma família de multiplicidades, existe uma função inteira com estes prescritos zeros e multiplicidades. Hurwicz, Paul Gustav Stäckel (1862-1919), Georg Faber (1877-1966) e outros trabalharam neste problema. Em 1902, Stäckel mostra a existência de uma função inteira tal que ela e todas as suas derivadas tomam valores algébricos em pontos algébricos. Mais tarde, Faber (1904), que mostra a existência de uma função inteira tal que ela, a sua inversa e todas as suas derivadas tomam valores algébricos em pontos algébricos. Ver [M,Cap III].

O exemplo de Stäckel é bem simples: bem ordenamos o conjunto de todos os polinômios a coeficientes em Q que são irredutíveis e cujo termo constante seja igual a um. Obtemos uma família enumerável de polinômios $\wp^{\#}=\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)..\}$. Cada número algébrico é zero de exatamente um destes polinômios. Seja $B_n(x)$ o produto dos n primeiros termos de $\wp^{\#}$. Seja f uma função g(x) com $g\in F^{\infty}$ que cresce muito rapidamente□; o exemplo é $f(z)=\Sigma\, B_n(z)z^{g(n)}$.

Somente em 1964, Mahler conseguiu caracterizar os conjuntos que podem ser S[f] para algum f. (ver [M, cap III]). Para resultados mais recentes para funções de F_{∞} ver [C].

Nosso objetivo aqui é mostrar que já na virada do século, os matemáticos já tinham bastante informações sobre valores de funções inteiras ou quocientes de tais funções (meromorfas).

A CONFERÊNCIA DE HILBERT

Dos problemas de Hilbert apresentados em 1900, o sétimo problema esta sob o titulo: “Irracionalidade e transcendência de certos números”. Numa tradução livre feita em [NF, p.46], ele é apresentado da seguinte maneira:

“É surpreendente que certas funções especiais transcendentais tome valores algébricos em pontos algébricos, e isto sugere um estudo mais profundo. Esperamos que funções transcendentes tomem valores transcendentes quando o argumento é algébrico. Apesar de existir funções como $\exp(2i\pi x)$ que toma valores algébricos para todo argumento racional, <u>ela toma valores transcendentes para argumentos algébricos não racionais</u>. Apesar da simplicidade desta afirmação e de sua semelhança com os problemas resolvidos por Hermite e Lindemann, parece extraordinariamente difícil demonstra-lo para o caso de α^{β} se α é algébrico e β irracional e algébrico (caso da função z^{β}); por exemplo $\alpha=2$ e $\beta=\sqrt{2}$ ou $\alpha=e$ e $\beta=\pi=$□□□ι–2ι□□□. Possivelmente a solução deste e de outros problemas semelhantes requer o desenvolvimento de novos métodos e novos pontos de vista na natureza essencial de números irracionais ou transcendentes especiais.”

Em termos de dificuldade, Hilbert achava que este problema seria mais difícil que a Hipótese de Riemann. Acontece que a transcendência destes números específicos foi estabelecida em 1935 por Gelfond e Schneider. Se Hilbert tivesse mencionado $e+\pi$ ou π^e ele estaria correto. Um ponto em que Hilbert acertou foi o desenvolvimento de novos métodos e pontos de vista como a técnica de Gelfond-Baker as quais sedimentou a área da Teoria Analítica de Números e permitiram aplicações a outros ramos da matemática.

Nessa virada de século, tínhamos duas linhas de trabalho que foram, respectivamente, aprimorar a desigualdade de Liouville, e generalizar as idéias de Hermite. Esta última linha tornou-se muito difícil, pois necessitávamos de aproximações de Hermite e Padé para resolver o problema da aproximação simultânea. Estas aproximações nada mais são do que aproximações das somas parciais de uma série de potências por funções racionais não polinomiais.

Edmond Théodore MAILLET (1865-1938)

Em 1906, Maillet publicou seu livro “*Introduction a la théorie de nombres transcendants*”. Ele trabalhou com a seguinte caracterização das frações continuadas onde se pode aplicar a fórmula de Liouville. Temos o seguinte critério:

<u>Critério de Liouville para frações continuadas</u>: Seja $\alpha=[a_0,a_1,a_2,...]$, e seja A_n/B_n sua convergente de ordem n. Então α é transcendente se existir um número M tal que para um número infinito de n>M, tenhamos

(16) $$a_{n+1} > B_n^M$$

Maillet chama estes números de números de Liouville, e tenta classificá-los de acordo com a ordem de crescimento da seqüência $\{a_n\}$, [Bz, p.261/262]. No nosso caso, vale também o que é semelhante ao lema 1: Se $\alpha=[g(0),g(1),g(2),...]$ com $g\in F_{\infty}$, então α é transcendente. É difícil de se imaginar uma teoria de ordem de crescimento sem este resultado. Aparentemente, Maillet foi o primeiro a exibir uma fração continuada que representa um número transcendente, onde $\{a_n\}$ é limitada. Ele usa a seguinte fórmula que é a generalização da aproximação de um número algébrico por radicais quadráticos.[P, p.144/147]

Lema 2: Seja α um número algébrico de ordem n. Então existe um número c<1 tal que para toda irracionalidade quadrática $\zeta=(p+\sqrt{d})/q$, com p,q, e d inteiros, vale a desigualdade:

(17) $$| \alpha- (p+\sqrt{d})/q | > c.(|p|+|q|+\sqrt{d})^{2n} .$$

Um intervalo periódico finito é um conjunto do tipo:

$$A_v=\{a_{v1},a_{v2},...,a_{vk}, a_{v1},a_{v2},...,a_{vk}, ..., a_{v1},a_{v2},...,a_{vk} \}$$

onde o número de elemento a_v em A_v é n.k, onde $n=n_v$ é o número de blocos de $k=k_v$ elementos. Uma seqüência é quase periódica se não é periódica e se tem um número infinito de intervalos periódicos finitos onde a_v cresce indefinidamente. Seja λ_v a posição do primeiro $a_{v,1}$ em A_v. Então $\lambda_{v+1}-\lambda_v \geq n_v\, k_v$. Diremos que ela é pura se vale a igualdade, i.e. não existe outros intervalos entre os repetitivos. Observe-se que os blocos repetitivos não têm necessariamente que ser iguais. Seja $K_t\{x_1,...,x_t\} =(c_{ij})$ a matriz t por t onde c_{ij} é definida por $c_{i,i}=x_i$, (0<i<t+1), $c_{i,i+1}=-1$, $c_{i+1,i}=1$, (0<i<t) e $c_{ij}=0$ nos outros casos. Dada uma fração $\alpha=[a_0,a_1,...]$, vamos indicar por $A_{r,s}=K_r\{b_{s+1}+...+b_{s+r}\}$, [P,p.14]. Assim, podemos enunciar o critério fraco de Maillet, [P, p.147]:

Critério de Maillet: Seja $\alpha=[a_0,a_1,...]$, uma fração quase periódica pura onde $\{a_i\}$ é limitada. Se para um número infinito de números de índices i, temos que no i- ésimo intervalo

(18) $$A_{k.\lambda, n} >(B_{n+k-1})^i.$$

Então α é transcendente.

Observe-se que aqui mudamos nossa notação escrevendo k(i) em vez de k_i, etc... O exemplo mais simples onde se aplica o critério é quando todos os k(i)=1, e a_n=2 ou 3, e aqui deveremos ter $\lambda_i\geq(2i)!$, [P, p.151].

Em suma, podemos afirmar que o trabalho de Maillet repousa quase integralmente em cima da representação de números por frações continuadas.

AXEL THUE

No período que se segue da conferência de Hilbert, os matemáticos tentaram melhorar a desigualdade de Dirichlet e as de Liouville. O primeiro grande trabalho nesta área foi feito na primeira década do século XX com Thue. Ele trabalha em cima das desigualdades de Liouville e Dirichlet. O interesse de Thue não é bem transcendência, e sim a área hoje denominada Aproximações Diofantinas, a qual, basicamente, tem por objetivo determinar soluções inteiras de equações polinomiais a coeficientes inteiros.

A desigualdade de Liouville juntamente com a de Dirichlet, nos diz que dado α algébrico, existe θ tal que $|\alpha-p/q|<q^{-\theta+\varepsilon}$ tem um número finito de soluções se $\varepsilon>0$ e um número infinito, caso $\varepsilon<0$. Os teoremas de Thue - Siegel - Roth [Lq, p.89], nos diz que podemos tomar θ =2 □no sentido de que □fixado qualquer número $\varepsilon>0$, a desigualdade tem sempre um número finito de soluções. Ou melhor:

<u>Teorema (Thue, Siegel, Roth)</u>: Seja $\alpha \neq 0$ um número algébrico. Então, para cada $\varepsilon>0$ a desigualdade que se segue admite no máximo um número finito de soluções.

(19) $$|\alpha-p/q|<q^{-(2+\varepsilon)}$$

Uma das principais conseqüências do teorema de Thue - Siegel - Roth é:

<u>Teorema:</u> Seja $p(x, y)= a_0x_n+a_1x_{n-1}y+....+a_n y_n$ um polinômio a coeficientes inteiros, tal que $p(x, 1)$ é irredutível. Então, para qualquer c a equação $p(x, y)=c$ tem somente um número finito de soluções inteiras.

Um dos grandes corolários deste teorema foi o Teorema de Siegel sobre número de pontos inteiros em curvas algébricas de gênero maior que um. O teorema de Thue - Siegel é um exemplo de que esta área está intimamente ligada a área de Aproximações Diofantinas, a qual basicamente consiste em determinar se uma dada equação a coeficientes inteiros tem soluções inteiras e, caso afirmativo, determinar seu número assintótico de soluções. O desenvolvimento feito acima está numa sub-área da Teoria Analítica de Números que é a aproximação de números algébricos por frações.

Até este ponto a conjectura de Euler- Hilbert aparentemente não teve grande influência no desenvolvimento deste tópico. Tanto Thue como Siegel estavam mais preocupados em resolução de equações diofantinas. Uma das dificuldades das estimativas de Thue - Siegel é que não obtém nenhuma informação sobre este número de pontos, ou melhor, sobre as constantes que aparecem nas fórmulas. Neste caso, constantes efetivas, ou efetivamente calculáveis, somente vieram a ser obtidas por Baker, na década dos 60.

Outra observação segue-se do fato de toda vez que tivermos uma desigualdade deste tipo que é válida para todos os números algébricos irracionais, então sua negação nos fornece um critério de transcendência.

<u>Teorema:</u> Seja α um número irracional. Suponhamos que existe um $k>2$ tal que a desigualdade

(20) $$|\alpha-p/q|<q^{-k□}$$

admite um número infinito de soluções. Então, α é transcendente.

VALORES DE FUNÇÕES ANALÍTICAS EM PONTOS ALGÉBRICOS

Nas duas primeiras décadas do século XX, os matemáticos continuavam a apresentar outras demonstrações do teorema de Lindemann. As primeiras tentativas de estender este teorema a outras funções falharam, porém pouco a pouco eles foram entendendo que este teorema era sobre a independência de valores de funções analíticas e ainda, mais que estas funções são soluções de equações diferenciais.

Comecemos com Georg Polya (1887-1985). Em 1920, ele observou que dada uma função inteira F, i.e, analítica em todo plano, cujo desenvolvimento em série na origem tem coeficientes algébricos, então o fato de F assumir valores algébricos num subconjunto S de números algébricos, exerce uma forte restrição no crescimento da função. Mais precisamente se F tem coeficientes inteiros, se os valores de F no conjunto dos inteiros positivos de F forem racionais, então uma certa condição de crescimento implica que F é racional.

Em 1927, W. Maier mostra a irracionalidade dos valores de J_0 de Bessel e de algumas séries hipergeométricas. Ele usa aproximações de Padé! Siegel diz que se inspirou nele para desenvolver seu trabalho sobre E- funções. [FN] sugere que mais tarde Apery também se inspirou no trabalho de Maier. O esclarecimento deste trabalho só veio por volta de 1929, quando Siegel demonstra o mesmo teorema para valores da função de Bessel, $J_\lambda(z)$, (solução da equação diferencial $z^2Y''+zY'+(z^2-\lambda^2)Y=0$), para λ racional, diferente da metade de um ímpar. O trabalho de Mahler surge nesta época. O trabalho de Siegel abriu caminho para a solução do problema de Hilbert - Euler feita pelo seu discípulo T. Schneider. Também o argumento de Siegel só ficou bem claro com Schneider, na década de 40.

Carl Ludwig SIEGEL

O trabalho de Siegel nesta direção começa reformulando o princípio dos pombos para estimativa do tamanho de soluções de um sistema de equações lineares a coeficientes num corpo algébrico. Este resultado ficou sendo conhecido por lema de Siegel.

Lema (Siegel): Seja $L[x]=\Sigma a_{ij}x_i=0$ um sistema de r equações a n incógnitas a coeficientes racionais inteiros, tais que seus coeficiente a_{ij} são limitados por uma constante A. Então, existe uma solução $\{x_i\}$ tal que $|x_i|<2.(2nA)^k$, onde $k=r/(n-r)$.

Dada a importância deste lema, do fato que ele generaliza o princípio dos pombos de Dirichlet, e de sua simplicidade, vamos demonstrá-lo. (Lang, Álgebra, L2, apêndice].

Demonstração: podemos interpretar L como uma aplicação linear de Z^n em Z^r. Seja V(B) o conjunto dos pontos de Z^r onde $\text{Max}|x_i|<B$. L leva V(B) em V(nBA). O número de elementos de V(B) está entre B^n e $(2B)^n$. Se tivermos 2 elementos (princípio das casas de pombos) x e u tais que L[x]=L[u], x-u será a nossa solução. Para isto é suficiente que $B^n>(nAB)^r$ ou basta que $B=(2AB)^c$ onde $c=r/(n-r)$.

Nesse resultado estende-se sem grande trabalho ao caso onde os coeficientes a_{ij} são números algébricos.

Nesta mesma época Gelfond publica vários trabalhos nesta direção e quase simultaneamente com Siegel eles apresentam uma nova idéia em substituição à identidade de Hermite.

Argumento de Gelfond - Siegel: Dadas duas funções f(z) e g(z) que admitem valores inteiros algébricos num conjunto S no plano complexo, usando o lema de Siegel, construímos uma função $F(z)= \Sigma c_{ij}\cdot f^i(z)\cdot g^j(z)$, onde c_{ij} são inteiros algébricos convenientemente escolhidos de modo que F(z) tenha muitos zeros em S, e que num ponto dado w em S possamos mostrar que F(w) é muito pequeno mais diferente de zero. Isto nos fornece a contradição. Uma alternativa é conseguir um número grande de formas lineares independentes, de modo que $F\equiv 0$. Os coeficientes c_{ij} são convenientemente calculados com o auxilio do lema de Siegel.

Com isto, Siegel em 1929, conseguiu uma nova demonstração do teorema de Lindemann-Weiestrass e com a generalização desta demonstração ele obteve um critério para que certos valores de certas funções fossem transcendentes. Com uma demonstração ainda mais difícil ele consegue mostrar que a função $J_0(z)=\Sigma(n!)^{-2}z^{2n}$ de Bessel satisfaz ao seu critério, [G, cap.II]. Dois pontos são fundamentais nesta generalização: as funções são soluções de equações diferenciais e tem certa ordem rápida de crescimento. Ele as chama de E-funções.

Definição: Uma E-função é uma função inteira $f(z)=\Sigma\alpha_n z^n/n!$, onde α_n pertence a um corpo de números algébricos K e satisfaz as seguintes condições:

1. Para todo $\varepsilon>0$ temos que $\alpha_n=O(n^\kappa)$, $\kappa=\varepsilon n$.

2. Seja d_n inteiro positivo tal que $d_n\alpha_k$ é inteiro algébrico, para k=0,1,...,n. Então $d_n= O(n^\kappa)$, $\kappa=\varepsilon n$, para $\varepsilon> 0$ arbitrário.

Segundo Gelfond o nome de E-função deve-se às propriedades semelhantes à exponencial; seus coeficientes se comportam como potencias arbitrariamente pequena se n! e um exemplo não trivial é [G,61]

$f(z)=\Sigma_{n=k}(\alpha_n/([n/k]!)^k)z^n$, $\alpha_n=O(n^\kappa)$, $\kappa=\varepsilon n$.

Em todos os casos conhecidos a condição $O(n^\kappa)$ pode ser substituída por uma mais forte que é $O(c^n)$ para c grande. As simplificações feitas mais tarde por Shidlowskij permanecem válidas nesta situação. Ainda não se tem um bom conhecimento da família de seqüências que satisfazem $O(n^\kappa)$. Polinômios, exp[wz], w algébrico, são os primeiros exemplos de E-funções. É não trivial que a função de Bessel $J=J_\lambda$, com λ racional positivo e diferente de metade de um inteiro, é uma E-função, (ver [M,§100]). As funções mais naturais na Análise são as soluções de equações diferenciais. As lineares de primeira ordem admitem uma fórmula para as suas soluções. Podemos dividir as equações lineares a coeficientes analíticos em duas categorias de acordo com o fato de o coeficiente da maior derivada, ou por abuso de linguagem a equação, possuir ou não um zero na origem. As que não têm zero na origem são mais simples de serem tratadas, pelo menos numa vizinhança da origem podemos assumir que a solução é analítica e procurar uma solução em série formal da equação. Já as que têm zero na origem tem uma solução não analítica, e algumas tem também uma solução analítica que também pode ser determinada por uma série formal.

No inicio do século XIX, Gauss estudou a equação que ele chama de hipergeométrica: A equação é

$$z(1-z)y''+[c-(a+b+1)z]y'-aby=0,$$

e a solução analítica é

$$y=1+(ab/c)z+(a(a+1)b(b+1)/(c(c+1)))z^2/2!+...$$

Seu estudo engloba muitas outras funções, como as funções de Bessel. Ela também se chama equação de Ernest Eduard Kummer (1810-1893). Vamos introduzir séries hipergeométricas generalizadas que é definida da seguinte maneira. [FN, p.211]. Seja

(22) $(a)_n=a(a+1)...(a+n-1)$, $(a)_0=1$, $p_n=(a_1)_n..(a_r)_n$, e $q_n=(b_1)_n...(b_s)_n$, $s>r$

A serie $f[\{a_1,...a_r\},\{b_1,...,b_s\};z]$ é definida por

(23) $\quad {}_{r+1}f_s[\{1,a_1,...a_r\},\{b_1,...,b_s\}; z]= \Sigma (p_n/q_n) z^n$

Esta série em geral pode representar uma função algébrica. A série hipergeométrica de Gauss-Kummer nada mais é que $f_2[\{a,b\},\{1,c\}; z]=f(a,b,c;z)$

Em 1981, Alexandr Ivanovich Galochkin demonstra um critério para que as séries hipergeométricas sejam E-funções, [FN, p.213]:

Teorema de Galockin: Sejam $\{a_1,.., a_r, b_1,..., b_s\}$, números algébricos que não são racionais inteiros menores ou iguais a zero. Suponhamos que os a_i são diferentes do b_j, e quando um a_i for irracional existe um b_j tal que b_j-a_i é um número natural. Então $f[\{a_1,...a_r\},\{b_1,...,b_s\};z]$ é uma E- função.

Neste caso, estas funções são inteiras e satisfazem uma equação diferencial linear de ordem s. Ver Mahler, [M, p.149]. Siegel, mostrou em 1929, que no caso particular onde $\{1,a_1,...a_r\ b_1,...,b_s\}$ são racionais tais que b_j é tal que $b_j\neq 0$, não é inteiro negativo, então ela é uma E-função. Neste caso específico podemos substituir $O(n^k)$, $k=\varepsilon n$. por $O(c^n)$ para c grande.

As E-funções formam uma álgebra sobre um anel de polinômios a coeficientes algébricos, e ainda mais tanto a derivada como a integral de E- funções são E-funçoes.

A versão original de Siegel, [G, p.79], tinha mais uma condição de "normalidade" muito difícil de ser verificada. Levou 40 anos para se encontrar outros exemplos além dos de Siegel, de E-funções normais, [FN, p.228].

A partir de 1953, Andrej Borisovich Shidlovskij tentou com êxito simplificar o teorema de Siegel e a condição de normalidade é substituída pela independência algébrica das funções $\{f_1,...f_s\}$ sobre K(z). Este fato é em alguns casos também muito difícil de se verificar, e às vezes é um problema em aberto. Outro resultado mais forte é que a teoria de Siegel tratava de sistemas homogêneos e nosso teorema é mais geral. A nova versão do teorema de Siegel melhorada por Shidlovski se enuncia:

<u>Teorema (Siegel - Shidlovski):</u> Seja K um corpo de números algébricos e seja $F'=MF+F^*$ um sistema linear não homogêneo, de s equações, a coeficientes em K(z). Seja $F =\{f_1,...f_s\}$ um vetor coluna formado por s E-funções. Seja $\alpha\neq 0$ em K tal que não é pólo de nenhum dos coeficientes do sistema. Então $\{f_1(\alpha),...f_s(\alpha)\}$ são algebricamente independentes sobre Q, se e somente se $\{f_1,...f_s\}$, são algebricamente independente sobre K(z).

Geralmente se indicarmos por $tzd°_K$ o grau de transcendência de uma conjunto W ao número máximo de elementos de W que são algebricamente independentes sobre K, então a versão mais forte do teorema de Shidlovski nos diz que nas mesmas condições acima:

(24) $\quad tzd°_K \{ f_1(\alpha),...f_s(\alpha)\}= tzd°_{C[z]}\{ f_1(z),...f_s(z)\}$

Segue-se da versão original de Siegel que se $J=J_\lambda$ é a função de Bessel, com λ racional positivo, diferente de metade de um inteiro, e $\{\alpha_1,...,\alpha_m\}$ são números algébricos e distintos e não nulos, então os 2m números $\{J(\alpha_1), J'(\alpha_1),...,J(\alpha_m),..., J'(\alpha_m)\}$ são algebricamente independentes. Ver [G, §2.4, p.93]. No caso das funções hipergeométricas generalizadas fica faltando a independência algébrica das soluções da equação diferencial. Shidlovski estuda soluções hipergeométricas generalizadas de equações lineares não homogêneas de primeira ordem, por exemplo $y'+A(z)y = B(z)$, onde A e B são polinômios em z. Se y(z) é uma solução que não é uma função racional, então se $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ são números linearmente independentes sobre Q temos que $\{y(\alpha_1),...,y(\alpha_k)\}$ são algebricamente independentes sobre Q. Ainda não sabemos se para λ algébrico os valores de $J_\lambda(z)$, em pontos algébricos são transcendentes.

Neste último quarto do século XX, muito foi feito nesta direção. Um estudo extenso foi feito no caso onde os parâmetros são racionais. Um número muito grande de matemáticos trabalhou nesta direção. Aos leitores interessados, recomendo [FN, cap.V] de onde extraímos quase todas nossas informações. Outro livro que nos foi útil, e que traz uma demonstração quase que completa dos teoremas de Shidlowski é o de Mahler [M].

Em 1929, Siegel introduz a classe das G- funções as quais crescem mais lentamente que as E- funções. Uma G-função é uma função analítica $f(z)=\Sigma\alpha_n z^n$ onde α_n pertence a um corpo de números algébricos K e satisfaz as seguintes condições:

1. Existe uma constante c tal que todos os conjugados de α_n são limitados por c^n.

2. Existe uma seqüência de inteiros $d_n >0$ tais que $d_n\alpha_k$ é inteiro algébrico, para $k=0,1,...,n$, e para todo n, $d_n<c^n$.

Nestas duas últimas décadas muito trabalho foi feito em cima destas funções, porém o que se tem conseguido são resultados sobre irracionalidade. (ver Y. Nesterenko,[N,cap VI,§7]).

Kurt MAHLER (1903-1988)

O critério de Liouville não é uma condição necessária para transcendência. Nesta direção, o trabalho de Siegel e de Schneider, foi aprimorado por Mahler e daí saem famílias de números transcendentes que não satisfazem o critério de Liouville. Mahler (1929) começa estudando funções que satisfazem certas equações funcionais, provavelmente inspirado na chamada série de Ivar Fredholm (1866-1927) Σz^k com $k=2^n$, a qual satisfaz a equação $f(z^2)=f(z)+2$. Mahler mostra que esta série toma valores transcendentes em pontos algébricos α tal que $0<\alpha<1$. Este resultado se generaliza a funções que satisfazem equações do tipo

$$f(z^d)=g(f(z),z) \text{ ou } f(z)=g(f(z^d),z),\ \ g\in K(X,Y) \qquad (25\ )$$

onde K é um corpo de números algébricos. Ele usa a seguinte variante da desigualdade de Liouville: Seja α um número algébrico, $\alpha\neq 0$ e seja $\deg(\alpha)$ seu grau, e $\operatorname{den}(\alpha)$ o menor inteiro d tal que $d\alpha$ é inteiro algébrico. Seja $H(\alpha)$ o máximo entre os valores absoluto de α e de seus conjugados.

Desigualdade de Liouville: Seja α, não zero, um número algébrico de grau n. Então:

(26) $$\log|\alpha| \geq -2n \operatorname{Max}\{ \log H(\alpha), \log(\operatorname{den}(\alpha)) \}.$$

Esta desigualdade sai do fato de que $\operatorname{den}(\alpha).\alpha$ é um inteiro algébrico e conseqüentemente, sua norma é pelo menos igual a um. Ela tem a vantagem de trabalhar somente com o número evitando suas aproximações.

Vamos enunciar a seguir o teorema de Mahler: Seja K um corpo de números algébricos e Z_K seu anel de inteiros. Seja f(z) uma série de potências de raio de convergência R, tal que f satisfaz a equação:

(27) $$f(z^d)= (\Sigma a_i(z)f(z)^i)/ (\Sigma b_i(z)f(z)^i), \text{ com } a_i(z), b_i(z)\in Z_K[z] , d>m .$$

onde os polinômios são de grau m. Seja $Res(z) =\text{Resultante}[(\Sigma a_i(z)X^i),(\square\Sigma a_i(z)X^i)']$

Teorema de Mahler: Suponhamos que f(z) seja transcendente sobre K(z). Seja α um número algébrico $0<|\alpha|<R$ com $Res(\alpha^t)\neq 0$, $t=d^k$, $k\geq 0$. Então, $f(\alpha)$ é transcendente.

Não é difícil arranjar exemplos de funções satisfazendo a esta equação: Seja P(z) um polinômio a coeficientes em Q^{alg}.

(28) $$P(x)=1+a_1z+...+a_{d-1}z^{d-1},\ a_{d-1}\neq 0.\ \ f(z)=\Pi P(x^{d(n)}),\ d(n)=d^n,$$

satisfaz a $f(z^d)=f(z)/P(z)$.

No caso onde

(29) $$P(z)=1+z^{s(1)}+z^{s(2)}+...+z^{s(l)} \text{ com } s(1)<s(2)<...<s(l)<d ,$$

nossa série fica (Ver, Nishioka, [Ni,Cap I]) $\Sigma e(n)z^n$ com e(n) =0 ou 1, e e(n)=1 se e somente se a representação p-ádica de n somente contem os dígitos em {0, s(1),..., s(l)}.

Outro resultado decorrente deste teorema é:

Teorema: Seja a>c fixo e sejam dadas duas seqüências de números inteiros positivos $\{a_k\}$ e $\{c_k\}$ tais que $c_{k+1}>(1+\varepsilon).c_k+((\ln a_{k+1})/\ln a)$ para algum $\varepsilon>0$. Então, o número η é transcendente. Em particular, $\eta=\Sigma\, a^{-n(k)}$ é também transcendente, onde a>0 e $n(k)=[2^{ak}]$.

Um resultado mais geral de [LP, p.220], nos diz que se p(x) é um polinômio a coeficientes algébricos e ω for um número irracional então $\eta(p,\omega,\alpha)=\Sigma p(\omega n)\alpha^n$ é transcendente para todo $0<\alpha<1$. Se ω for quadrático e $\{p_i\}$ forem linearmente independentes sobre Q, então $\eta(p_i, \omega, \alpha)$ são algebricamente independentes.

Em 1937, Mahler usando um caso especial da desigualdade (20) demonstrou seu belíssimo exemplo de número transcendente:

<u>Teorema de Mahler</u>: Seja p(x) um polinômio a coeficientes inteiros com valores inteiros positivos se x>0. Fixado um inteiro positivo q, seja $p_{i1},p_{i2},..., p_{in(i)}$ os dígitos do desenvolvimento de p(i) na base q. Seja $\eta=0.p_{11}p_{12}..p_{1n(1)}p_{21}...p_{2n(2)}....$ o decimal infinito escrito na base q. Então, η é transcendente mas não é um número de Liouville.

Em particular, se p(x)=x e q=10 temos o número transcendente.

(30) η=.123456789101112....

Este η é um exemplo de um número normal na base 10, segundo Borel, i.e., se fixado k>0, qualquer bloco de k dígitos repetido um número infinito de vezes com a mesma probabilidade. Os números do intervalo [0,1] que são normais em qualquer base formam um conjunto de medida 1.

Mahler apresentou em [M, p.25] a seguinte condição necessária e suficiente para que um número seja transcendente.

<u>Critério de Mahler</u>: Um número α é transcendente se e somente se existir

1. Uma seqüência de polinômios $p_r(z)\in Z[z]$ distintos;
2. Uma seqüência de números positivos w(r) tendendo ao infinito;

Tais que para todo r,

(31) $$0 < |p_r(\alpha)| < M(p_r)^{-w(r)}$$

onde $M(p)=2^{\deg(p)}$. L(p). Aqui L(p) é a soma dos valores absolutos dos coeficientes de p.

Podemos dizer que de uma certa forma, assim como Maillet trabalha com representação por fração continuada, Mahler trabalha basicamente com produtos infinitos. Os trabalhos de Siegel são sobre representação por séries. As técnicas de Mahler tanto para transcendência de reais, complexos, ou p-ádicos criaram novos ramos da teoria de transcendência. Ver [Ni].

Alexandr GELFOND.

Gelfond começa seu estudo por volta de 1925, tendo por base o trabalho de Polya sobre o comportamento de funções inteiras que admitem valores algébricos em pontos algébricos. Em 1929, Gelfond demonstra que 2^b é transcendente se b^2 é inteiro negativo. Logo depois, em 1930, Rodion Osieviz Kuzmin (1891-1949), demonstra este resultado para b^2 positivo, respondendo a uma das perguntas de Hilbert: $2^{\sqrt{2}}$ é transcendente. Gelfond usa suas técnicas e mostra que e^{π} é transcendente. A demonstração para α^β só é feita em 1935, e aí ele reduz o problema da transcendência de $\eta=\ln(\beta)/\ln(\alpha)$, ao problema da independência linear sobre Q de dois logaritmos. Pouco mais tarde (1948), ele e Yuri Linnik (1915-1972) mostram que a independência linear de três logaritmos implica que o número de corpos quadráticos imaginários que admitem a fatorização única é finito. Gelfond reconhece as conseqüências em teoria de números da independência linear sobre os números algébricos de logaritmos linearmente independentes sobre os racionais, e fala da dificuldade do problema envolvido.

Neste problema, a idéia de Gelfond consiste em usar a fórmula de interpolação chamada de fórmula de Newton:

(32) $f(z)= \Sigma A_k/((z-z_0)(z-z_1)....(z- z_k))$,
$A_k= (1/(2\pi i)) \int_c [f(\zeta)/((\zeta-z_0)(\zeta-z_1)....(\zeta-z_k))]d\zeta$

onde $\{z_n\}$ são os inteiros de Gauss com uma certa ordenação. Aqui a função $f(z)=e^{\pi z}$. Como exemplo da técnica, Gelfond em [G, p.103], mostra que $e^{\pi}=(-1)^{i}$ é transcendente. Ele usa as propriedades da distribuição de primos para os inteiros de Gauss e daí para obter uma contradição ele estima de duas maneiras distintas os números

(33) $|\Omega_k|$=mdc{ t_{kn}}, $t_{kn} = (z_n-z_0)\cdot(z_n-z_1)\cdot...\cdot(z_n - z_k)$, $0<n<k$.

Como já mencionamos anteriormente Gelfond apresenta uma nova idéia em substituição da identidade de Hermite, que usa o argumento de Gelfond- Siegel . Olhemos agora ao desenvolvimento da demonstração da transcendência de α^β de Gelfond, [G,105]. Assumimos que α, β e $\eta=\ln(\alpha)/\ln(\beta)$ são algébricos, onde ln é o ramo principal do logaritmo. Gelfond divide a demonstração em quatro etapas:

1. Aplicamos o procedimento acima mencionado às funções $f(z)=\alpha^z$ e $g(z)=\beta^z$. Obtemos uma função que tem um número muito grande de zeros e cujos coeficientes c_{ij} são não zero inteiros pequenos, pois α, β e $\eta=\ln(\alpha)/\ln(\beta)$ são algébricos.

2. A segunda etapa é baseada em propriedades intrínsecas dessas funções que nos permite achar mais zeros num disco contendo S. Este processo pode ser repetido

3. Adicionamos mais zeros para que isto tudo implique que um número grande de derivadas de F sejam zero na origem.

4. Obtemos um sistema de equações envolvendo c_{ij} e mostramos que tem determinante diferente de zero o que implica $c_{ij}=0$. Obtemos assim uma contradição.

Outra variante seria repetir indefinidamente a segunda etapa, o que implicaria que todas as derivadas na origem seriam zero ou seja F=0.

A demonstração de Schneider usa o processo de interpolação (28) escolhendo os pontos z_k para cada tipo de função usada. Neste caso a demonstração repousa em cima da aditividade das funções usadas.

Gelfond foi um dos primeiros a se preocupar com o cálculo efetivo das constantes

Th. SCHNEIDER

Em 1935, Schneider, discípulo de Siegel, usando as técnicas mencionadas acima, apresenta independentemente de Gelfond uma outra demonstração da transcendência de a^b. Os resultados de Schneider são dirigidos ao estudo da função $\wp$ de Weiestrass (37). Esta demonstração usa as propriedades aditivas da demonstração de Hermite. Mais tarde se entende melhor porque os resultados funcionam. Todos os métodos até então ou usam a aditividade destas funções ou o fato de que elas satisfazem a um sistema de equações diferenciais lineares tendo como coeficientes funções racionais. Por volta de 1949, Schneider conseguiu colocar junto estas idéias e as de Gelfond, e consegue parte do seguinte teorema que, por volta de 1962, foi simplificado por Lang. Ao contrário do teorema de Siegel, o teorema se aplica ao estudo da transcendência de valores individuais. Observe-se que a condição de invariância por D=d/dz do anel $K[f_1,...,f_s]$, nos diz que estas funções são soluções de um sistema de equações <u>não necessariamente linear</u> como no Teorema de Siegel.

A função f(z) inteira, i.e., analítica em todo plano, tem ordem r se existe C tal que para altos valores de R temos $|f(z)|\leq C^{\exp(h)}$, com $h=\exp(R^r)$, quando $|z|\leq R$. Uma função é meromorfa de ordem r, se for quociente de duas funções inteiras de ordem r. A exponencial e^x tem ordem 1; f(z)=z tem ordem zero, e tanto $\wp(z)$ como sua derivada $\wp'(z)$ têm ordem 2. Diremos que f(z) na origem se 1/f(z) tiver um zero e for analítica numa vizinhança da origem

<u>Teorema: (Schneider - Lang)</u> Seja K uma extensão finita dos racionais e $\{f_j(z)\}$, j=1,...,s, uma família finita de funções meromorfas de ordem r, tais que:

1.O corpo $K(f_1,...,f_u)$ tem grau de transcendência t sobre K, com $t\geq 2$.

2.O operador D=d/dz deixa invariante o anel $K[f_1,...,f_u]$.

Seja $\{w_1,...w_m\}$ um conjunto de números complexos distintos que não são pólos das funções f_j, e tais que os valores $f_j(w_k)$ estão em K. Então $m\leq 10r[K:Q]$.

No caso onde o número de funções u é 2, este teorema nos diz que quando m for maior que [K:Q], então para cada i=1,...,m, $f_1(w_i)$ e $f_2(w_i)$ não podem ser simultaneamente algébricos.

Mostraremos a transcendência de *e* e de π. Usamos as funções $f_1(z)=z$ e $f_2(z)=\exp(z)$ cujo wronskiano é diferente de zero, conseqüentemente, elas são algebricamente independentes, e r=1. A derivada leva o anel $K[f_1,,f_2]$ nele mesmo. Suponhamos que α e $\exp[\alpha]$ são algébricos e seja $K=Q(\alpha,\exp(\alpha))$. Então os valores $f_i(\alpha)$, $f_i(2\alpha)$, ..., $f_i(N\alpha)$, i=1,2, são distintos e estão K qualquer que seja N, o que é uma contradição. Logo, $\exp(\alpha)$ é transcendente. Se π for algébrico, então πi também o é, e $\exp(\pi i)=-1$ é transcendente; contradição.

Para transcendência de α^β trabalha-se com as funções $\{f_1(z)=\exp(\ln(\alpha z))$, $f_2(z)=\exp(\beta.\ln(\alpha.z))\}$ as quais são algebricamente independentes, pois β é algébrico, não racional. Suponhamos que $\exp(\beta\ln(\alpha))=\alpha^\beta$ seja algébrico, então fixado qualquer inteiro positivo N, estas funções calculadas em {1,2,3...,N} dão potências inteiras destes números algébricos, que serão também algébricas. Como r=1, e o grau g do menor corpo contendo $\{\alpha, \alpha^\beta\}$ é fixo, temos que N<10.r.g e isto contradiz o teorema.

Na próxima seção, vamos estudar a transcendência $\wp(\alpha)$ para valores da função de Weiestrass em pontos algébricos α.

A demonstração do teorema de Schneider-Lang se encontra no apêndice do livro do Lang de Álgebra [L2] e também em [L1], Teorema 3. Ele generaliza tanto o Teorema de Lindemann, bem como as soluções de Gelfond - Schneider do Problema de Hilbert.

Passemos agora ao teorema. Podemos supor que u=2, e indiquemos $f_1=f$ e $f_2=g$ Suponhamos que $f(w_j)$ e $g(w_j)$ estejam em K para todo j. Seja $n=r^2/m$ e seja $F=\Sigma\ b_{ij}f^ig^j$. Pelo lema podemos escolher b_{ij} com $d^kF/dz^k=0$ em todos w_i, para todo $1\leq k<n$ e j=1,..m. Seja s o menor inteiro tal que a derivada $F^{(s)}$ em algum w_i, digamos w_1 seja não zero.

Estende-se o lema a K. As hipóteses são para que possamos estimar as derivadas das funções de {f, g} e daí,

(34) $$1<|N(c.\gamma\square|< c_1(s).s^{([K:Q]-1)}\ |\gamma|\ .$$

Aqui $N(\alpha)$ é a norma de α, ou produto de seus conjugados, e [K:Q] é o grau de K sobre Q.

Agora introduzimos uma função auxiliar cujo valor é um múltiplo do valor de f(s+1) em w_1. A função é

(35) $$H(z)=t(z)^2F(z)/w(z), \quad w(z) =\Pi_j\ (z-w_j)^s$$

e t é uma função inteira tal que $t(w_1)\neq 0$, e tal que t(z)f(z) e t(z)g(z) sejam inteiras. Daí $t(z)^2F(z)$ é também inteira.

Majora-se agora H com o auxílio do princípio do módulo máximo, num círculo de raio $R=s(1/2\rho)$ e obtém-se outra estimativa para $|\gamma|\leq\ C_2(s)s^4s/s^{ms}/(1/2\rho)$. Escolhendo as estimativas de modo a haver simplificação e comparando com a estimativa acima quando s tende ao infinito, obtém-se o resultado.

Este teorema é a chave de uma extensa teoria sobre valores de funções em variedades algébricas. Ele foi preparado para tratar os resultados de Schneider sobre a função duplamente periódica $\wp(z)$ de Weiestrass. Mais tarde, ele foi generalizado por Enrico Bombieri (1940-...) às funções de várias variáveis complexas; ele nos diz que o conjunto de pontos onde os valores das funções estão em K, estão numa hipersuperfície onde o grau depende do grau de transcendência do conjunto de funções dadas, de sua ordem, do grau de K sobre os racionais e do número de variáveis. Daí decorre uma teoria de pontos transcendentes em grupos algébricos e mais especificamente em variedades abelianas. Ver [L-3]

Em 1957, Schneider em seu livro [S, Satz 6, p.13] usa uma forma especial do teorema de Klaus Friedrich Roth (1925-...) para melhorar critérios de transcendência, ou melhor exibir outras famílias destes números. Sua idéia, já usada por Mahler é tratar de aproximações cujos denominadores são particulares, contendo como fator uma potência de um inteiro fixo, e neste caso, pode-se trabalhar com $k>1+\varepsilon$. Ele mostra a transcendência do número de Mahler (30), [S, p.35/38], e mesmo assim sua demonstração é não trivial.

Exemplo: Seja θ um número que na base g tem um desenvolvimento que é uma seqüência quase periódica como em (18). Suponhamos que lim $v_u/\lambda_u=0$ e que

lim $(v_un_u)/\lambda_u>0$. Então, θ é transcendente.

Neste caso, um exemplo de como $v_u=1$, todos os valores no bloco que repete são iguais a 0, e os outros são iguais a 1. Assim as posições que tem 1 serão 3, 9, 18, 36,...,9.2^n,... .$n_u=.\lambda_u-\lambda_{u-1}-1$. Aqui, $\lim (v_u n_u)/\lambda_u=1/2$, e $\theta=1+10^3+10^9+10^{18}+10^{36}+10^{72}+...+10^{3a(k)}+..$, onde $a(k)=2^k$.

Os exemplos de séries apresentados por Schneider, [S, p.38], se aplicam aos valores racionais destas séries. Pelo menos no caso da série de Fredholm, seu resultado é mais fraco que o de Mahler.

Th. SCHNEIDER II: a função de Weiestrass.

Dada a importância da função $\wp$ de Weiestrass e da quantidade de trabalho feita em torno destas funções, vamos mencionar alguns fatos. Seja £ um latice no plano complexo gerado por dois elementos independentes sobre Q, i.e., fixado $\{w_1,w_2\}$, $\tau=w_1/w_2\notin\Re$, £=£ (w_1,w_2), é o conjunto de todos os números da forma mw_1+nw_2 com m e n inteiros. Por exemplo, £=Z[i] inteiros de Gauss. As funções complexas duplamente periódicas chamam-se elíticas. Para cada n, as funções definem-se:

(37) $\wp_n(z)=z^{-n} + \Sigma((z+ mw_1-nw_2)^{-n} -w^{-n})$, $\wp_n(z)=\wp(z+ mw_1+nw_2)$

onde, m e n são inteiros diferentes de zero. Esta série converge absolutamente se n>1 e $z\notin$£. Ela é também meromorfas em C. $\wp=\wp_2$ é a função de Weiestrass, sua integral, é a menos de sinal a função zeta ζ_w de Weiestrass. $\wp$ é duplamente periódica de períodos w_1 e w_2. $\wp$ satisfaz as seguintes equações diferenciais:

(38) $(\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$ $\wp''=\wp^2-g_2$

onde, $g_2=\Sigma |w|^{-4}$ e $g_3=\Sigma |w|^{-6}$, a soma é tomada sobre todos os elementos de £ diferente de zero. Assim, $\{\wp(t), \wp'(t)\}$ parametrizam a cúbica complexa $w^2=4z^3-g_2z-g_3$ em C^2. Esta cúbica chama-se curva elítica.

$\wp$ tem fórmulas de adição:

(39) $\wp(u+v)=-\wp(u)-\wp(v)+(1/4)((\wp'(u)-\wp'(v))/(\wp(u)-\wp(v)))^2$

(40) $\wp(2u)=-2\wp(u)+(1/4)(\wp''(u)/\wp'(u))^2$

Outro número associado ao latice é o da função modular de Jacobi:

(41) $J^*(\tau)= g_2^3/(g_2^3- 27 g_3^2)$.

Desta última fórmula, segue-se que se α não está em £ e se g_2, g_3 e $\wp(\alpha)$ são algébricos, então $\wp''(\alpha)$ e $\wp'(\alpha)$ são também algébricos, e assim, $\wp(2\alpha)$ é algébrico. Logo, $\wp(2^n\alpha)$ é também algébrico. Assim, podemos aplicar o teorema de Schneider-Lang às funções $\{z, \wp(z), \wp'(z)\}$, pois z e $\wp(z)$ são algebricamente independentes. Logo, se g_2 e g_3, são algébricos, $\wp(\alpha)$ é transcendente, para todo α algébrico que não está em £. (ver [S, p.61/63]).

O teorema se aplica também ao caso das funções $\{\wp(z), \exp[\beta z], \wp'(z)\}$, β algébrico, e daí segue-se que se α não está em £, então os números $\wp(\alpha)$, $\exp[\alpha\beta]$ não podem ser simultaneamente algébricos. Mas geralmente, podemos trabalhar com $\{\wp(z)$,

$az+b\zeta_w(z)$, $\wp'(z)\}$; obtemos que se τ é algébrico, porém não imaginário quadrático, então $J^*(\tau)$ é transcendente. No caso onde g_2, e g_3 são algébricos também obtemos que os períodos das integrais de primeira e segunda espécie são transcendentes,i.e., integral do tipo $\int_\gamma R(z,w)dz$, onde *R* é uma função racional e $w^2=4z^3-g_2z-g_3$. Em particular dada uma elipse de centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados, e eixo maior e menor ambos algébricos, então o comprimento do arco entre dois pontos de abscissa ou ordenada algébrica é transcendente.[S, p.60/61]. Schneider estende a sua teoria a função de várias variáveis complexas para integrais e funções abelianas, e daí sai que a função beta é definida por:

(42) $$B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$$

é transcendente para todo par de racionais não inteiros. Em particular, neste caso $\Gamma(p)$ e $\Gamma(q)$ não podem ser simultaneamente algébricos, [S, p.64].

Dentro desta mesma série de resultados, em 1988, J. Wolfart [FN, p.160] apresenta uma tabela de quádruplas {a,b,c,z} de valores {a,b,c} racionais e z algébrico, tais que para toda outra terna de números racionais e valores algébricos z fora desta tabela os valores da série hipergeométrica de Gauss-Kummer F(a,b,c;z) são números transcendentes.

Diremos que £ admite multiplicação complexa se existem números complexos z, tais que z. £ $\subset$£, por exemplo, se £=Z+iZ, multiplicação por elemento de Z[i] leva nele mesmo. As possíveis multiplicações determinam uma extensão quadrática k=k(£) de Q. Neste caso, dizemos que $\wp$ admite multiplicação complexa, ou que a curva elítica tem multiplicação complexa. A teoria de transcendência depende do fato da existência ou não de multiplicação complexa. Por exemplo, se g_2 e g_3 são algébricos. Então, se $\wp$ admite multiplicação complexa, e $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ são algébricos e linearmente independentes sobre k, $\{\wp(\alpha_1),...,\wp(\alpha_n)\}$ são algebricamente independentes sobre Q. [FN, p.296]. Já no caso onde não existe multiplicação complexa, é um problema em aberto.

Alan BAKER

Por volta de 1966, Alan Baker escreveu uma série de trabalhos onde ele resolveu o problema proposto por Gelfond sobre a independência linear de vários logaritmos. Isto lhe valeu uma medalha de área em 1970. Na sua introdução feita em [B, p.1], ele mostra como o problema da independência dos logaritmos generaliza o resultado de Hermite-Lindemann. Dizer que $\ln[\alpha_i]$ é independente sobre os números algébricos significa dizer que temos Λ□□□□=$|\Sigma\alpha_i\ln[\beta_i]|$ >0. Aqui tomamos o ramo principal do logaritmo. Juntamente com Feldman e outros eles estudam minorações para Λ, □ao estilo de medida de transcendência, em termos de medida de números algébricos. Estas são as primeiras melhorias feitas na desigualdade de Liouville depois de 100 anos! Sendo mais explícito, o resultado de Baker é o seguinte:

Teorema: (Baker - Stark). Seja α um número algébrico de grau $n\geq3$ and seja $k>1$. Então existe uma constante calculável explicitamente $c=c(\alpha, k)$ tal que para toda fração p/q próxima de α,

(43) $$|\alpha-p/q|>c.q^{-(n+1)}e^s \ , \ s=(\ln(q))^{1/k}.$$

Este teorema é muito importante, pois nos permite encontrar cotas efetivas para as soluções de uma larga classe de equações diofantinas.

A generalização de Baker do teorema de Gelfond é a seguinte [L-2, p.637 e 643]:

Teorema: (Baker) Sejam $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ números algébricos não nulos cujos logaritmos juntamente com $2\pi i$, são linearmente independentes sobre o racionais. Sejam $\{\beta_1,...,\beta_n\}$ números algébricos tais que, $\{1,\beta_1,...,\beta_n\}$ são linearmente independentes sobre os racionais. Então,

(44) $$\alpha^{\beta_1}\cdot...\cdot\alpha_n^{\beta_n}$$

é transcendente. Além disso, $\{\ln(\alpha_1),...,\ln(\alpha_n)\}$ são linearmente independentes sobre o conjunto dos números algébricos.

Ainda é um problema em aberto mostrar que estes $\ln(\alpha_i)$ são algebricamente independentes sobre Q.

Dado um inteiro algébrico α vamos indicar por size(α) o máximo do logaritmo do valor absoluto dos conjugados de α. O seguinte teorema é uma melhora efetiva do teorema de Liouville.

Teorema: Sejam $\alpha_1,...,\alpha_{n+1}$ nos algébricos cujos logaritmos são linearmente independente sobre os racionais. Seja $t>n+2$. Então, existe uma constante efetivamente calculável $c(\alpha)=c$ tal que para conjunto de números algébricos $\beta_1,...,\beta_n$ de size é menor que h, temos

(45) $$\ln|\beta_1\cdot\ln(\alpha_1)+...+\beta_n\cdot\ln(\alpha_n)-\ln\alpha_{n+1})| > c\cdot h^t .$$

Todas as constantes que aqui aparecem tem cálculo efetivo.

Os teoremas de Baker resolveram parte das conjecturas de Gauss sobre números de classes de ideais em anéis de inteiros algébricos. Isto não é de se estranhar, pois a demonstração do teorema das unidades de Dirichlet já é um teorema de independência de logaritmos. Baker e Feldman melhoraram o método de Gelfond o que ampliou bastante o espectro de aplicações desta teoria a outros problemas, tanto da teoria de números algébricos, quanto na teoria de analítica de números. Vide Lang, [L3] e R. Tijdeman [T].

CLASSIFICAÇÃO DE NÚMEROS TRANSCENDENTES

Depois de Maillet, durante o período entre 1925 e 1945, D.D. Morduhai-Boltovskoi, K. Mahler, Koksma tentam classificar os números transcendentes através da medida de transcendência. (vide [S,capIII]). A dificuldade era obter bons critérios de classificação. [G, p.4/5]. Lang tenta contornar este problema introduzindo a noção de tipo, ([L3, p.667/669], [NF]). Morduhai-Boltovskoi mostra que os números de Liouville são algebricamente independentes de valores não triviais da exponencial, do logaritmo e, em particular,de $i\pi$ Morduhai-Boltovskoi chamaram de simples os números transcendentes gerados por valores de exponenciais e logaritmos. Os outros são chamados por ele de hipertranscendentes. Mais tarde, Lang define como clássicos os números que pertencem ao corpo gerado pelo fecho algébrico dos valores não triviais de exponenciais, logaritmos, função zeta, Bessel, e todas as funções que satisfazem equações diferenciais clássicas. Dentre os números hipertranscendentes estão os números de Liouville. Apesar de já termos muitos resultados, ainda é um problema muito difícil demonstrar que alguns números são transcendentes. O teorema de Lang - Schneider é uma arma potente porem é muito difícil gerar famílias específicas de valores algébricos de funções específicas. O teorema de E-funções é o que temos de melhor para demonstrar que algumas famílias de números são algebricamente independentes.

Nesta direção, a conjectura de Stephen Schanuel diz o seguinte:

Conjectura de Schanuel: Se $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ são números algébricos linearmente independentes sobre Q, então dentre $\{\alpha_1,...,\alpha_n, \exp(\alpha_1),...,\exp(\alpha_n)\}$ existem n números que são algebricamente independentes.

Esta hipótese implica que, em geral, polinômios em *e* e π são transcendentes. Este resultado é válido para corpos de séries formais. Este problema já está aberto há 40 anos.

Os resultados que levaram Lang a noção de tipo foram obtidos por Aleksandr Yakovlevich Khintchine (1894- 1959) em seu estudo do comportamento dos termos das frações continuadas.

Teorema de Khintchine: Suponhamos que a série infinita $\Sigma\Psi(q)$ converge. Então, para quase todo número real a desigualdade $|q\alpha-p|<\Psi(q)$ admite um número finito de soluções.

Já para o caso de divergência temos um teorema recente de W.M.Schmidt que diz:

Teorema de Schmidt: Suponhamos que $\Psi(q)$ diverge. Para quase todo número α, o número de soluções $\lambda(B)$ de $|q\alpha-p|<\Psi(q)$ com $0<q\leq B$ é dado assintoticamente por $c.(\Psi(0)+...+\Psi(B))$ para alguma constante c>0. (ver L3).

Um dos objetivos da teoria de aproximações diofantinas é mostrar que os números clássicos são transcendentes.

MEDIDAS DE TRANSCENDÊNCIA

Vamos agora tratar do conceito de medida introduzido por J. Popken, Siegel, Morduhai-Boltovskoi, Mahler e por Gelfond. Se α é transcendente então $|p(\alpha)|>0$ para qualquer polinômio p(x) em Z[x]. Dado um polinômio p(x) em Z[x] vamos chamar de altura H(p) de p ao máximo dos valores absoluto dos coeficientes de p. A medida transcendente de α, $\Phi[H, n, \alpha]$ será o mínimo de $|p(\alpha)|$ para todo polinômio do grau n e de altura H(p)<H. O cálculo explícito desta medida é um problema dificílimo. Conhecemos aproximações para alguns números como

$\ln(\alpha)$: $\Phi>H^{-k}$, $k=c\cdot n$

(46) π: $\Phi>e^{-k}$, $k=-c\cdot n\cdot N$, $N=\max\{\ln H\cdot\ln(\ln H), n^2\cdot\ln^2 n\}$.

Se $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ são linearmente independente sobre Q podemos falar de medida de independência linear de $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, usando polinômios em $A[x_1,...,x_n]$. Neste caso para todo $\{c_1,...,c_n\}$ inteiros temos $|c_1\cdot\alpha_1+...+c_n\cdot\alpha_n|>0$. Mas, geralmente, se $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ são algebricamente independente sobre A*, podemos falar de medida de independência algébrica de $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, usando polinômios em $A^*[x_1,...,x_n]$. Além de ser difícil obter medidas de transcendência, suas expressões são geralmente bastante complicadas, por isso evitamos entrar nesta área. Ver[G, p.60]

Esta teoria tem se mostrado ser a mais importante ferramenta da teoria da transcendência, tanto no estudo de independência algébrica como na análise diofantina. (ver [NP]).

CORPOS P- ÁDICOS.

Fixemos um número primo p. Seja $a \in Q$ e $v_p(a)$ a ordem que p divide a. Assim, $|a|_p=p^{-v1p(a)}$ é uma métrica em Q. Seja Q_p seu completado e $A_p=Q_p^{alg}$ seu fecho algébrico. Seja C_p o completado de A_p. Os elementos de C_p que não estão em A_p chamam se transcendentes sobre Q_p. A_p contém uma cópia de qualquer corpo K de números algébricos. Seja Z_p (A_{Zp}) o anel dos inteiros p- ádicos (algébricos), i.e., os elementos $a \in Q_p$ (A_p) a tais que $|a|_p \geq 1$. Os elementos de A_{Zp} tais que $|a|_p=1$, são as unidades de A_{Zp}. Toda unidade se escreve como $1+p^a v$, onde v é também uma unidade. C_p é um espaço métrico completo não arquimediano, então tem sentido em falar de convergência de séries. C_p é o análogo p-adic ao plano complexo, e assim ele possui uma teoria de funções analíticas, e com uma definição conveniente de integral, vale o teorema de Cauchy. Observe-se que aqui, vale o seguinte critério de convergência de séries: Σa_n converge se e somente se $|a_n|_p$ tende a zero, i.e., quando $a_n \neq 0$, $a_n=up^{a(n)}$ onde u é uma unidade e a(n) tende para o infinito. Assim, tem sentido falar na função exponencial e na função logarítmica. A primeira dificuldade é que a exponencial deixa de ser inteira.

Os trabalhos originais de Gelfond e de Mahler foram estendidos por eles ao campo p-ádico. Um dos primeiros trabalhos dedicados exclusivamente a transcendência em C_p é o de Adams [Ad], onde ele estende o teorema de antigas versão de Lang- Schneider ao campo p-ádico ajustando tecnicamente a demonstração complexa a este caso. Quanto aos teoremas de Baker eles só foram completamente esclarecidos bem recentemente por Kunriu Yu, [Yu]. Este trabalho contém uma boa bibliografia da situação da teoria p-ádica há aproximadamente duas décadas passadas.

CORPO DE SÉRIES DE POTENCIAS FORMAIS

Consideremos agora o corpo das séries formais a coeficientes complexos, i.e., em C((z)). Ele consiste de todas as séries $f(z)=\Sigma_{k\geq n} a_k z^k$ onde n é um inteiro positivo ou negativo.Se $a_n \neq 0$ diremos que ord(f) é n. Tanto na teoria de Mahler como na teoria de Siegel-Shidlowski a primeira hipótese nos teoremas é ou que nossa função é transcendente sobre C[z] ou se algumas funções são algebricamente independentes. A independência de valores de uma família de funções num ponto qualquer α que é regular para todas elas, implica que as funções tem necessariamente que ser independentes. Por outro lado, qualquer série formal sempre tem um raio de convergência. Logo o problema de encontrar soluções ou de equações diferenciais ou soluções de equações funcionais, em séries formais algébricas precede o de encontrar tais soluções analíticas.

Vamos mencionar somente alguns resultados.O primeiro é a extensão a este caso do critério de Mahler, [M, p.41],

Critério de Mahler: A série $f\in K((z))$ é transcendente sobre $K(z)$ se e somente se existir

1. Uma seqüência de polinômios $p_r(z,w)\in K[z,w]$ distintos, não constantes.

2. Uma seqüência de números positivos k_r tendendo ao infinito

Tais que para todo r

(47) $$p_r(z,f)\neq 0 \quad e \quad ord(\,p_r(z,f)) \geq k_r\lambda(a_r) > 0$$

onde $\lambda(p)$ é a soma dos graus de p em relação a z com o grau relativamente a w.

Uma série $\Sigma a_n z^n$ tem um bloco de zeros de comprimento k se para certo n $a_n=a_{n+1}=...=a_{k+n-1}=0$, $a_{n+k}\neq 0$. Ela chama-se lacunária, pois possui blocos disjuntos com os comprimentos k tendendo para o infinito. Deste critério, segue-se que séries lacunárias são transcendentes. Na demonstração deste fato é também usado um teorema de William Osgood (1864-1943): [M, p.42]

Teorema de Osgood: f em $K((z))$ é algébrico sobre $K(z)$ de grau ≥ 2, então f satisfaz a uma equação diferencial linear de ordem no máximo n-1, sobre $K(z)$.

O próximo resultado é um teorema de Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852) de seu trabalho publicado em 1852.

Teorema(Eisenstein): Seja $f\in Q((z))$, $f(z)=\Sigma_{\,k\geq n}\, a_k z^k$ um elemento algébrico de $Q((z))$ então existe um inteiro N tal que $N^n a_n$ é inteiro para todo $n>0$.

Isto implica que o maior primo p_n divisor do denominador de a_n é limitado. A negação deste fato nos fornece um critério de transcendência, [M, p.43].

Em geral, nos casos que requerem mostrar existência é possível fazer a demonstração direta, por exemplo [Ni, p.9].

Em 1971, James Ax demonstrou a conjectura de Schanuel, para $C(z)$:

Teorema de Ax 1: Seja $y_1,...,y_n\in zC((z))$. Então

(48) $$tzd^\circ_{\,C(z)}\{y_1,...,y_n, \exp[y_1],..., \exp[y_n]\}\geq n$$

Teorema de Ax 2: Seja $y_1,...,y_n\in C((z_1,...,z_m))$, linearmente independentes sobre Q.

Então:

(49) $$tzd^\circ_{\,C(z)}\{y_1,...,y_n, \exp[y_1],..., \exp[y_n]\}\geq n+r$$

onde r é o posto da matriz jacobiana ($\partial y_i/\partial z_j$), i=1,..,n e j=1,...,m.

As técnicas usadas são algébricas. A demonstração repousa sobre propriedades de diferenciais algébricas.

INDEPENDÊNCIA ALGÉBRICA

Podemos afirmar que a noção de independência algébrica nasceu com Weiestrass em seu teorema com Lindemann. Morduhai-Boltovskoi, [G, p.94], trata da independência de números de Liouville e dos valores de e^{ax}. O seu significado algébrico veio a ser entendido por Siegel. Daí a independência algébrica passou a ser um dos problemas centrais da teoria dos números transcendentes bem como um pouco mais tarde em Geometria Algébrica, com o conceito de dimensão algébrica.

Já por volta de 1957, Gelfond começa a perguntar sobre o grau de transcendência de certos conjuntos de números transcendentes. Por exemplo, ele consegue mostrar que se $\alpha \neq 0,1$ é algébrico e se $\beta(1)$, $\beta(2)$, e $\beta(3)$ são radicais cúbicos conjugados, então, o grau de transcendência do conjunto $\{\alpha^{\beta(1)}, \alpha^{\beta(2)}, \alpha^{\beta(3)}\}$ é no mínimo 2. Ele pergunta por uma generalização, e esta, juntamente com algumas outras perguntas, são superpostas pela conjectura de Schanuel. Em [NF, p.281] está a seguinte generalização: Seja $\alpha \neq 0,1$ e algébrico, e β algébrico de grau d. Seja $b(j)=\beta^j$, então,

(50) $$\mathrm{tzd}°Q\{\alpha^{b(1)}, \ldots \alpha^{b(d-1)}\} \geq [(d+1)/2\ ]$$

Outro resultado que é um dos melhores na direção de números clássicos foi obtido recentemente por Yu V. Nesterenko. Ele mostra que tanto $\{\pi, e^{\pi}, \Gamma(1/4)\}$, como $\{\pi, e^{\pi\sqrt{3}}, \Gamma(1/3)\}$ são algebricamente independentes.([FN, p.294])

Muito trabalho tem sido feito em cima das conjecturas de Gelfond e este é hoje um dos ramos mais ativos da teoria de transcendência. (ver [NF, cap VI] e [F]). Existe uma quantidade muito grande de pequenos resultados em casos especiais os quais nos dificulta fazer um resumo em pouco espaço.

Esta área é um bom exemplo de desenvolvimento histórico e do entendimento gradativo das idéias iniciais. Aqui é pertinente fazer uma observação de Lang,[L3]; esta área permite se trabalhar com bem pouco conhecimento matemático e ainda obter resultados profundos. O exemplo disto é a demonstração, em 1979, feita por Roger Apery (1916-1994), da irracionalidade de $\zeta(3)$ onde $\zeta(s) = \Sigma\ 1/n^s$ é a famosa função zeta de Riemann. Sabemos que o valor da função $\zeta(2n)$, n –inteiro positivo, é múltiplo racional de π^2. A conjectura é que os $\zeta(2n+1)$ são algebricamente independentes. Recentemente, Tanguy Rivoal mostrou que dentre os $\zeta(2n+1)$ existe um número infinito de números irracionais. Este resultado já foi melhorado por Wadim V.Zudilin (http/waim.mi.ras.ru)

RESUMO FINAL

Podemos dizer que a teoria dos números transcendentes cresceu no século XX., a uma teoria matemática que não somente tem aplicações em si, como também em outras áreas como a Teoria de Números Algébricos, Aproximações Diofantinas, Teoria Analítica de Números, e outras áreas. A teoria cresce com suas próprias técnicas, chegando ao fim do século XX com basicamente as seguintes linhas de muito trabalho;

A transcendência ou em muitos casos a irracionalidade de números clássicos;

Independência algébrica de valores de funções;

Determinar medidas de transcendência e outras medidas destes números. Estas aproximações melhoram cotas de soluções de equações diofantinas;

Suas técnicas são as já apontadas acima:

Aproximações por racionais e algébricos

Aproximações de Hermite -Padé, tipo fórmula de Hermite

Método de Gelfond- Baker;

Enfim, em cada demonstração de um teorema desta teoria faz-se pelo menos meia dúzia de aproximações, majorações usando análise real ou complexa. Devemos salientar o papel que as frações continuadas desempenharam desde o início da teoria até ao aparecimento da fórmula de Hermite. Nos anos seguintes, elas foram deixadas meio de lado, porém depois elas voltaram em plena forma. O mesmo aconteceu com as aproximações de Hermite-Padé durante o período 1927 a 1980.

REFERÊNCIAS

A bibliografia nesta área é extensa e, portanto, vamos nos limitar aos livros e artigos que serviram de base a nossa exposição. Não faremos todas as referências, e sim, mencionaremos o local onde ela se encontra.. Estamos nos baseando nos livros de Gelfond, Niven, Brezinski, Hardy-Wright, complementado pelos artigos de Lang e da exposição de Baker. Mais recentemente consultamos o excelente livro de N.I.Feldman – Yu V. Nesterenko, e os livros de Nesterenko e de Nishioka. Por razões de disponibilidade e outras deixamos de consultar os livros de Siegel, Baker, Schmidt, Waldschmidt, como também trabalhos importantes de dezenas de outros matemáticos aqui não mencionados. (Ver [NS], [NF], [NP], [L3], e [Ni]).

[Ad] Adams- *Transcendental Number in P-adic Domain*, Amer. J. Of Math. 88,279/308.

[Ax] J. Ax, - *On Schanuel conjectures*, Ann. Of Math.,93 (1971),pp252/268.

[A] N. Allan, -*Aproximações por Racionais*, Atas do IV Encontro de Brasileiro de Historia da Matemática, Natal, 2001..

[B] A. Baker, -*The Theory of Linear Forms and Logarithms*, Transcendence Theory: Advances and Applications, Academic Press, NY,1977. P1/28

[Bz] C. Brezinski, -*History of Continued Fractions and Padé Approximations*, Springer-Verlag, SCM séries, vol 12. NY,1980.

[C] P.L. Cijsous e R. Tijdeman, -On the Transcendence of Certain Power Séries,
Acta Arithmetica, 23,1973.

[DF] D. Figueredo, -*Números Transcendentes,* IMPA, 1964.

[FS] N. I. F el'dman, e A.B. Shidlowskij, -*The Development and Present State of the Theory of Transcendental Numbers*, Russian Mathematical Notes, 22-3,p1/79.

[G] A. Gelfond, - Transcendental and Algebraic Numbers, Dover, NY, 1960.

[HW] G.H. Hardy e E.M. Wright, -*An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Science Publications,5th edition, Oxford, 1996.

[K] J. F. Koksma,- *Diophantische Aproximationen*, Chelsea, NY, 1953.

[Lq] Y. Lequain, -*Aproximação de um Numero Real por Números Racionais*, 19° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1994.

[L1] S. Lang,-*Diophantine Approximations*, 5° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1965.

[L2] S. Lang,- *Algebra*, Addison Wesley, NY, 1965.

[L3] S. Lang, -*Transcendental Numbers and Diophantine Approximations*, Bulletin AMS, vol 77, 5,1971, p.635/677.

[L-P] J. Loxton e A. van der Poorten, -*Transcendence and Algebraic independence by a method of Mahler*, Transcendence Theory: Advances and Applications, Academic Press,NY,1977, p211/226.

[M] K. Mahler, -*Lectures on Transcendental Numbers*, Lecture Notes in Mathematics, vol 546, Springer- Verlag, 1976.

[NF] Yu V. Nesterenko, N.I. Feldman,-*Number Theory IV: Transcendental Numbers*, Springer, Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol 44

[N] I. Niven, -*Irrational Numbers*, Carus Monographs, J Wiley, NY, 1956.

[Ni] , K. Nishioka, -*Mahler functions and transcendence*Springer Lecture Notes 1631, 1996

[P] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrühen*, Chelsea, NY, 1950.

[NP] Y.V. Nesterenko, P. Philippon, (Eds.) -*Introduction to Algebraic IndependenceTheory*, Lecture Notes in Mathematics 1752, Springer 2001.

[S] Th. Schneider, -*Einführung in die Transcendenten Zahlen*, Springer Verlag,1957

[T] , R. Tijdeman, -*On the Gelfond- Baker Method and its Applications*, Proc. ofSymp. in Pure Math.,AMS, vol 28,1976,p241/268.

[Y] , K. Yu -*Linear Forms in p-adic Logarithms*, Acta Arithmetica, 53,1989.

Nelo da Silva Allan
Departamento de Matemática - IGCE, Unesp, Rio Claro e Departamento de Matemática - Universidade Estadual do Mato Grosso, Caceres, MT.
Email: neloallan@yahoo.com