

A EXPRESSÃO ZERO ELEVADO A ZERO EM CONTEXTO HISTÓRICO

Carlos José Amorim da Silva
Universidade Federal Fluminense – UFF – Brasil

Christine Sertã Costa
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio – Brasil

(aceito para publicação em março de 2022)

Resumo

Este artigo é um estudo sobre o desenvolvimento histórico evolução da abordagem dada a controvérsia que circunda a expressão zero elevado a zero. O percurso histórico selecionado sobre as questões que sustentam a referida controvérsia, apresentado neste trabalho, se inicia no século XVIII com abordagens apresentadas por Leonhard Euler, e se estende até as soluções utilizadas na atualidade. O objetivo principal do presente artigo é permitir aos leitores, estudantes e professores, constatarem que a História da Matemática é rica em detalhes e que o valor de uma simples operação aritmética, o zero elevado a zero, pode não ter resposta única aceita pela comunidade matemática ao longo da história.

Palavras-chave: Matemática, História, Zero elevado a Zero, Potenciação.

[THE EXPRESSION ZERO TO THE POWER OF ZERO IN HISTORICAL CONTEXT]

Abstract

This article is a study of the historical evolution of the approach given the controversy surrounding the expression zero to the power of zero. The historical path selected on the issues that support the referred controversy, presented in this work, begins in the 18th century with approaches presented by Leonhard Euler, and extends to the solutions used today. The main objective of this article is to allow readers, students and teachers to see that the History of Mathematics is rich in details and that the value of a simple arithmetic operation, zero to the power of zero, it may not have a single answer accepted by the mathematical community throughout history.

Keywords: Mathematics, History, Zero to the power of Zero, Potentiation.

1. Introdução

A matemática possui inúmeras controvérsias, e o zero, por vezes, está envolvido entre elas. Invariavelmente as discórdias envolvem escolhas, seja de um caminho para determinado progresso, seja das premissas que serão pré-estabelecida na busca de uma solução. Neste último caso, as escolhas feitas podem acarretar soluções distintas e provocar debates sobre qual a melhor solução a ser adotada. É interessante destacar que os matemáticos tratam esses conflitos de modo diverso ao longo da evolução do saber matemático, e que para entendê-los, faz-se mister verificar qual o rigor matemático imposto e qual a solução adotada no decorrer da história. Neste universo de polêmicas, vamos destacar uma das tradicionais controvérsias: qual é o valor ou significado da expressão zero elevado a zero (0^0)?

Outrossim, destacamos que a expressão zero elevado a zero possui, ao longo da história, duas soluções correntes: representa uma indeterminação matemática ou possui valor igual a um. Embora seja possível observar outras abordagens em livros didáticos tais como *o valor de 0^0 não está definido, não existe significado matemático à expressão 0^0 ou ainda a total omissão da abordagem desta expressão*. A força dessa controvérsia também permeia os softwares matemáticos que adotam, invariavelmente, soluções diversas para a expressão 0^0 . Logo, percorrer a história permite o desenvolvimento de análises e o entendimento dos possíveis métodos de abordagens teóricas que sustentam as soluções que caracterizam esta controvérsia.

As reflexões acima motivam o desenvolvimento deste artigo que se propõe a apresentar e discutir as diversas nuances históricas e a evolução da abordagem dada a esta questão. Este artigo apresentará um histórico de abordagens da expressão zero elevado a zero e fará diversas observações para ampliar o domínio sobre o assunto.

2. O percurso histórico

O início do percurso histórico sobre a controvérsia acerca do valor da expressão zero elevado a zero (0^0) se inicia com as abordagens realizadas por Leonhard Euler, notável e profícuo matemático do século XVIII. Leonhard Euler, na obra “Introdução a Análise do Infinito” que teve sua 1ª edição em 1748 (figura 1), destacou que:

“(...) a operação de exponenciação a ser considerada a^z onde a é uma constante e o expoente z é uma variável. Como o expoente z representa um número qualquer, é claro que pelo menos todos os inteiros positivos podem ser substituídos por z para obter os valores desejados $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, etc. Se substituirmos o z por números inteiros negativos $-1, -2, -3$, etc. obteremos $\frac{1}{a^1}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}$, etc. Se $z = 0$, temos um $a^0 = 1$. Se $a = 0$, promovemos uma enorme variação nos valores de a^z . Enquanto o valor de z permanecer positivo ou maior que zero,

sempre teremos $a^z = 0$. Se $z = 0$, então $a^0 = 1$.” (Euler, 1988, pp. 75–76, tradução nossa¹)

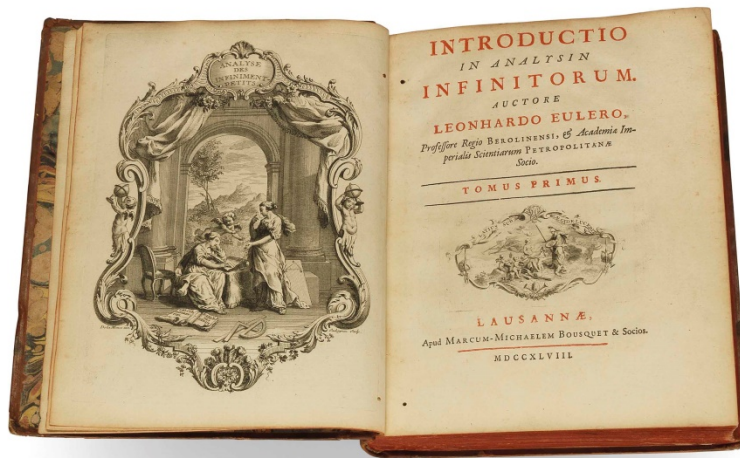


Figura 1: Introdução à Análise do Infinito

(Fonte: <<https://www.christies.com/lotfinder/Lot/euler-leonhard-1707-1783-introductio-in-analysin-infinitorum-6118969-details.aspx>>. Acesso em 10 fev. 2022.)

Em outra obra “Fundamentos do Cálculo Diferencial, com Aplicações em Análise e Séries Finitas”, cuja primeira edição, em Latim, foi publicada em 1755 em São Petersburgo – Rússia (figura 2), Leonhard Euler apresentou os seguintes argumentos:

“(…) colocando $0. \ln(0) = x = x \cdot \ln(e) = \ln(e)^x$ (sendo e a base do logaritmo natural). Portanto $\ln(0^0) = \ln(e^x)$; e tendo obtido este resultado, podemos escrever que $0^0 = e^x$. Agora, sabendo que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x}{2.3.4} + etc$. Portanto

¹ Trecho original: “(...) the exponential to be considered be a^z where a is a constant and the exponent z is a variable. Since the exponent z stands for all determined number, it is clear at least that all positive intergers can be substituted for z to give determined values $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, etc. If for z we substitute the negative integers $-1, -2, -3$, etc. we obtain $\frac{1}{a^1}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}$, etc.... If for $z = 0$, them we have $a^0 = 1$ If $a = 0$, we take a huge jump in the values of a^z . As long as the value of z remains positive, or greater than zero, then we always have $a^z = 0$. If $z = 0$, then $a^z = 1$.”

$0^0 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x}{2.3.4} + \text{etc.}$ Agora temos que $0^0 = 1$; para
 $0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$. Portanto $1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x}{2.3.4} + \text{etc.}$,
 e de nenhum modo esta equação pode ser satisfeita, exceto quando
 $x = 0$. ” (Euler, 1955, p. 813, tradução nossa²)

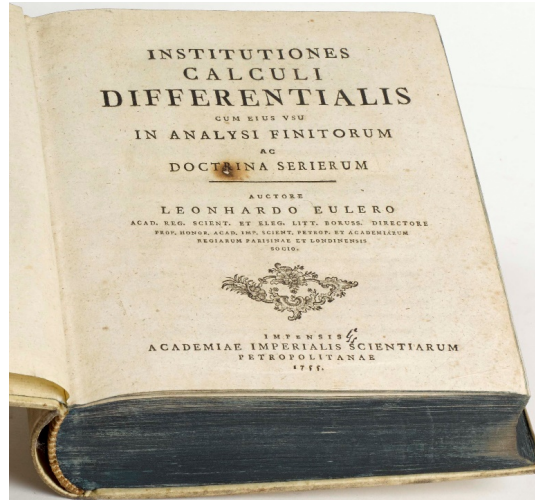


Figura 2: Fundamentos do Cálculo Diferencial, com Aplicações em Análise e Séries Finitas
 (Fonte: < <https://twitter.com/ArmRLib/status/985565468072271873/photo/1>>. Acesso em 10 fev. 2022.)

Ainda considerando os escritos de Leonhard Euler, agora em sua obra “Elementos de Álgebra”, um dos seus livros mais memoráveis, com a primeira edição publicada, em alemão, em 1770 em São Petersburgo - Rússia (figura 3), apresentou os seguintes argumentos:

² Trecho original: “(...) polo $0.l(0) = x = x.l(e) = l(e^x)$ (funtio nimirum e pro logarithmorum hyperbolicorum bafi). Igitur $l(0^0) = l(e^x)$; factoque regressu a logarithmis ad numeros erit $0^0 = e^x$. Est autem ut confrat $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x}{2.3.4} + \text{etc.}$. Ergo $0^0 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x}{2.3.4} + \text{etc.}$ Iam vero $0^0 = 1$; nam $0^0 = l(a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$. Itaque $1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x}{2.3.4} + \text{etc.}$, cui aequationi satisfieri nullo modo potest, nisi fuerit $x = 0$.”

“(…) uma série de potência, cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por a , o que aumenta o expoente em 1; da mesma forma, quando um termo qualquer é dado, podemos também encontrar o termo anterior, se dividirmos por a , o que diminui o expoente em 1. Isso mostra que o termo que precede o primeiro termo a^1 deve necessariamente ser $\frac{a}{a}$ ou 1; e, se operamos os expoentes, podemos concluir imediatamente, que o termo que precede o primeiro deve ser a^0 ; e, portanto, deduzimos esta notável propriedade, que a^0 é sempre igual a 1, por maior ou menor que o valor do número a possa ser, e mesmo quando o valor de a seja o nada; isto é, a^0 é igual a 1.” (Euler, 1840, pp.50-51, tradução nossa³)



Figura 3: Elementos de Álgebra

(Fonte: <https://www.abebooks.com/servlet/BookDetailsPL?bi=30781050883&cm_sp=collections--3iHnanN7KgdYAKHAQuoteY_item_1_17-_bdp#&gid=1&pid=1>. Acesso em 10 fev. 2022.)

Seguindo a linha cronológica, apresentaremos as considerações realizadas por George Baron, matemático da fase inicial do século XIX e fundador do primeiro jornal científico americano, *Mathematical Correspondent* (figura 4). George Baron publicou em seu jornal científico no ano de 1804 um artigo com o título: "Uma curta dissertação, relativa

³ Trecho original: "(...) in this series of powers each term is found by multiplying the preceding term by a , which increases the exponent by 1; so when any term is given, we may also find the preceding term, if we divide by a , because this diminishes the exponent by 1. This shews that the term which precedes the first term a^1 must necessarily be $\frac{a}{a}$ or 1; and, if we proceed according to the exponents, we immediately conclude, that the term which precedes the first must be a^0 ; and hence we deduce this remarkable property, that a^0 is always equal to 1, however great or small the value of the number a may be, and even when a is nothing; that is to say, a^0 is equal to 1."

à definição, da palavra Potência, em aritmética e álgebra". Deste artigo, efetuaremos os seguintes destaques sobre a operação de potenciação:

“(...) para prosseguir com a aplicação de nossa definição, a valores extremamente pequenos, suponhamos que x represente qualquer valor fracionário; ou, em outras palavras, x denote qualquer magnitude, expressa em números, por meio de alguma parte da sua unidade de medida: então pela definição $x^1 = 1 \times x$. Vamos simplificar essa multiplicação por x ; e pelas razões até agora apresentadas, temos $x^0 = 1$. Agora, como x aqui representa uma quantidade fracionária, independente de qualquer limitação, em relação à grandeza infinitesimal; podemos, portanto, supor que x , por meio de diminuição contínua, ou decrescente, passa de seu valor atual, por reduções infinitesimais, até que ele se torne nada; então será evidente que, durante essa diminuição ou redução decrescente de x , x^0 continuará igual a uma unidade invariavelmente; e isso precisamente no instante em que x se torna nada, x^0 , ou $0^0 = 1$.” (Baron, 1804, p. 64, tradução nossa⁴).

⁴ Trecho original: “(...) in order, to pursue the application of our definition, to quantity in the ultimate extremity of smallness, let us suppose x to represent any fractional quantity; or in other words, let x denote any magnitude, expressed in numbers, by means of some part of its measuring unit: then by the definition $x^1 = 1 \times x$. Let now this multiplication by x , be abstracted; and for the reasons heretofore advanced, we have $x^0 = 1$. Now since x here represents a fractional quantity, independent of any limitation, in respect to smallness; we may therefore suppose x , by means of continual diminution, or decrease, to pass from its present value, through every degree of smallness, until it become nothing; then it will be evident, that, during this diminution or decrease of x , x^0 will continue equal to an invariable unit; and that precisely at the instant, when x becomes nothing, x^0 , or $0^0 = 1$.”

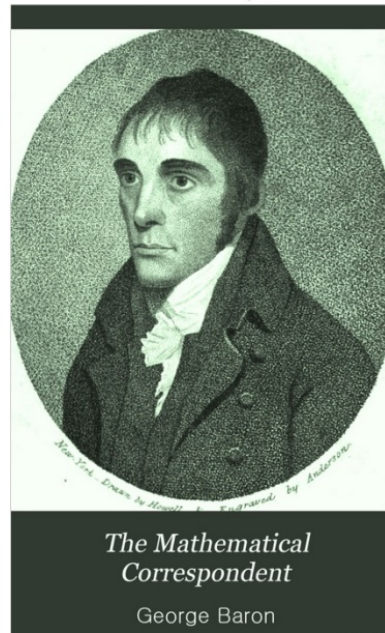
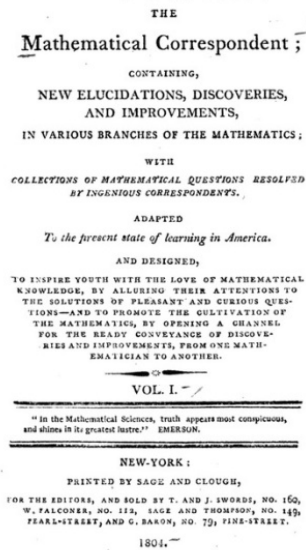


Figura 5: Jornal *Mathematical Correspondent*

(Fonte: <https://books.google.com.br/books?id=dxoAAAAAMAAJ&pg=PP15&hl=pt-BR&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false>. Acesso em 10 fev. 2022.)

Observa-se, pelos exemplos apresentados, que existia uma convergência entre os matemáticos para admitir ou concluir que o valor da expressão zero elevado a zero é igual a um, porém é conveniente destacar que as justificativas apresentadas por Baron e Euler caracterizam exemplos de manipulações que carecem do devido apuro matemático, típico do formalismo matemático empregado no século XVIII (Eves, 2004, p. 474).

O século XIX pode ser considerado como a “idade de ouro” da matemática (Boyer, 2001, p. 343). É uma época marcada pelo processo de rigorismo e o questionamento aos métodos aplicados nas demonstrações matemáticas em séculos anteriores. Muitos matemáticos se destacaram neste processo de formalização, entre eles, o francês Augustin-Louis Cauchy que demonstrou em sua obra, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (figura 6), que a expressão 0^0 é uma das formas indeterminadas quando se lida com limites. (Cauchy, 1821, p. 68).

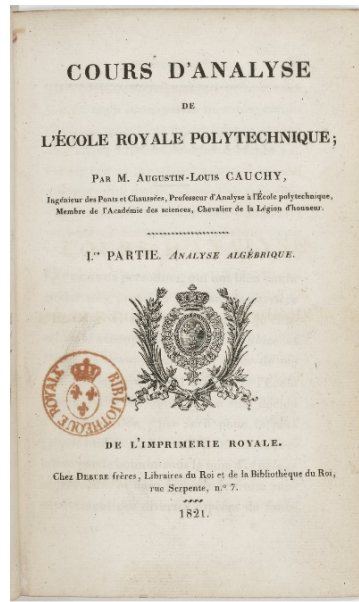


Figura 6: *Cours d'Analyse*

(Fonte: <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t/f9.image>>. Acesso em 10 fev. 2022.)

É possível observar que alguns métodos apresentados por Euler e a argumentação proposta por Baron possuíam a aplicação dos princípios de limites, pois mantinham o valor do expoente em zero e reduziam gradativamente os valores da base em aproximação ao zero. Este tipo de argumentação passou a ser questionada, pois eram conflituosas com as noções de limites apresentadas por Cauchy e como consequência não atendiam o formalismo que passou a vigorar no século XIX.

Prosseguindo nesse caminhar ao longo da história e exemplificando ainda mais este conflito, vamos apresentar alguns trechos de quatro artigos divulgados no *Journal for die reine und angewand Mathematik*⁵, publicação alemã também conhecida como *Journal de Crelle* (figura 7) em alusão ao seu fundador, August Leopold Crelle, que teve sua primeira edição em janeiro de 1826 e possui o título de ser o mais antigo periódico matemático em circulação na atualidade (Eves, 2004, pp. 533, 565; Boyer, 2001, pp. 350, 362).

⁵ Página web disponível em: <<https://www.degruyter.com/view/journals/crll/crll-overview.xml>>. Acesso em 10 fev. 2022.

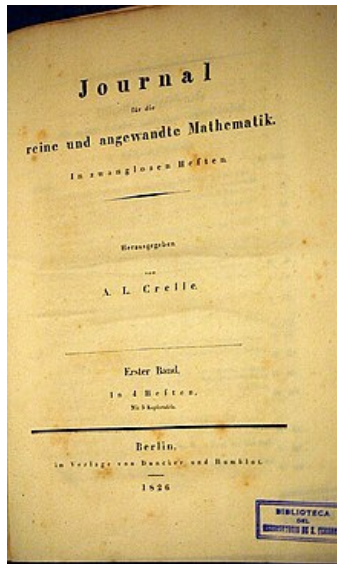


Figura 7: *Journal de Crelle*

(Fonte: <<https://www.wikidata.org/wiki/Q1368270>> Acesso em 10 fev. 2022.)

O trecho do primeiro artigo que destacamos foi de autoria do matemático italiano Guillaume Libri publicado em 1833 no volume X do *Journal de Crelle*:

“(…) é fácil provar diretamente por outros meios que a expressão 0^0 sempre tem o valor da unidade. Mascheroni já havia observado que $0^0 = 1$. Ele encontrou esse valor pela equação: $0^0 = (a - a)^{n-n} = \frac{(a - a)^n}{(a - a)^n} = 1$; mas isso pode ser feito de outras maneiras. Sabemos que quando x é um número inteiro, o desenvolvimento do binômio: $(1 - u)^x = 1 - xu + \frac{x(x-1)u^2}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)u^3}{2 \times 3} + \text{etc.}$, é finito e sempre fornece um valor exato, independentemente do valor de u ; o que não se deve à convergência das séries do segundo membro (porque essa convergência exige que tenhamos $u < 1$), mas o fator $x - x$, encontrado em todos os termos após o termo $x + 1^o$. Daí resulta que, se fizermos $x = 0$, todos os termos, exceto o primeiro, serão anulados, e sempre teremos $(1 - u)^0 = 1$. Vemos que esse valor é independente do valor de u e que podemos fazer $u = 1$, o que resulta em $(1 - 1)^0 = 1 = 0^0$. Também chegaríamos ao mesmo resultado, fazendo: $(a - b)^x = a^x - x a^{x-1} b + \frac{x(x-1) a^{x-2} b^2}{2} - \text{etc.}$, e

então (pela suposição de $x=0$), $(a-b)^0 = a^0 = 1$: porque como este último resultado é independente de a e b , podemos fazer $a=b$ e ainda teremos: $(a-a)^0 = 0^0 = 1$.” (Libri, 1833, p. 303, tradução nossa⁶).

Neste artigo o autor resgata a solução apresentada pelo matemático italiano Lorenzo Mascheroni, que permite indicar que o valor de 0^0 é unitário, solução usual no século XVIII. Outrossim, esse artigo também apresenta duas demonstrações que possui como cerne o binômio de Newton.

O segundo artigo, elaborado de forma anônima, apresenta uma análise ao artigo apresentado por Libri e foi publicado em 1834 no volume XI do *Journal de Crelle* e o destacamos em três trechos. O primeiro trecho, inicialmente reforça o fato de que, naquela época, era usual adotar o valor unitário para a expressão zero elevado a zero. Em seguida apresenta argumentações e censuras aos métodos apresentados por Euler na demonstração desta igualdade inclusa em sua obra “Elementos de Álgebra”, conforme apresentado a seguir:

“(…) Sr. Libri apresentou neste jornal, o uso da expressão 0^0 , cujo valor considera ser sempre igual à unidade. É também a opinião quase unânime de todos os pesquisadores, cujos trabalhos estão ao meu alcance. No entanto, parece-me que os vários raciocínios usados para demonstrar essa igualdade se baseiam na generalização não permitida de um caso específico, e que, se eles foram bem fundamentados, podemos também argumentar que o valor de $\frac{0}{0}$ é sempre igual à unidade. Por exemplo, Euler em seu Tratado sobre álgebra argumenta da seguinte maneira: porque temos $\frac{a}{a} = a^0 = 1$, segue-se que a^0 é sempre igual à

⁶ Trecho original: “(...) il est aisé de prouver directement par d'autres moyens que l'expression 0^0 a toujours pour valeur l'unité. Mascheroni avait déjà observé que $0^0 = 1$. Il trouvait cette valeur par l'équation $0^0 = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$ mais on peut y parvenir par d'autres voies. On sait que lorsque x est un nombre entier, le développement du binôme $(1-u)^x = 1 - xu + \frac{x(x-1)u^2}{2} - \frac{x(x-1)(x-2)u^3}{2 \times 3} + \text{etc.}$, s'arrête toujours et donne toujours une valeur exacte quelque soit la valeur de u ; ce qui ne tient pas à la convergence de la série du second membre (car cette convergence exige que l'on ait $u < 1$), mais au facteur $x-x$, qu'on retrouve dans tous les termes après le terme $x+1^{\text{me}}$. Il résulte de là que si l'on fait $x=0$, tous les termes, excepté le premier, se détruiront, et on aura toujours $(1-u)^0 = 1$ On voit que cette valeur est indépendante de la valeur de u , et qu'on pourra faire $u = 1$, d'où il résultera $(1-1)^0 = 1 = 0^0$. On voit aussi que l'on parviendrait au même résultat, en faisant d'abord $(a-b)^x = a^x - x a^{x-1} b + \frac{x(x-1)a^{x-2} b^2}{2} - \text{etc.}$, et puis (par la supposition de $x = 0$), $(a-b)^0 = a^0 = 1$: car puisque ce dernier résultat est indépendant de a et b , on pourra faire $a = b$, et on aura encore $(a-a)^0 = 0^0 = 1$.”

unidade, seja o número a grande ou pequeno, e mesmo se a é zero, de modo que o valor 0^0 é certamente igual à unidade. Mas por que não dizer novamente: por que sempre temos a igualdade $\frac{a}{a} = 1$, dependendo do valor do número a , ela ainda existirá se tivermos $a = 0$, ou seja, sempre teremos $\frac{0}{0} = 1$ ” (Sur, 1834, p. 272, tradução nossa⁷).

No segundo trecho, o autor (anônimo) apresenta objeções tanto na demonstração creditada ao matemático Mascheroni, assim como na apresentada pelo matemático Libri, e informa que a igualdade $0^0 = 1$ é eventual, conforme trecho a seguir:

“(…) Isso vale para a demonstração de Mascheroni que o Sr. Libri citou. Porque também ocorre o mesmo, pois temos $\frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$, então temos $\frac{0}{0} = 1$? A demonstração do Sr. Libri me parece também sujeita as mesmas objeções. De fato, ninguém contestará que o valor da expressão $\frac{a}{a}$ é sempre igual à unidade, mesmo se assumirmos $a = 0$, então o valor de 0^0 como o de $\frac{0}{0}$ é igual à unidade. Mas como o valor de $\frac{0}{0}$ não é sempre igual à unidade, não podemos concluir que sempre temos $0^0 = 1$.” (Sur, 1834, p. 272, tradução nossa⁸).

⁷ Trecho original: “(…) Mr. Libri a fait insérer dans ce journal, il fait usage de l'expression 0^0 , dont il considère la valeur comme étant toujours égale à l'unité. C'est aussi l'opinion presque unanime de tous les géomètres, dont les ouvrages sont à ma portée. Pourtant il me semble que les divers raisonnements qu'on a employés pour démontrer cette égalité reposent sur la généralisation non permise d'un cas particulier, et que, s'ils étaient bien fondés, on devoir aussi soutenir, que la valeur de $\frac{0}{0}$ est toujours égale à l'unité. Par exemple, Euler dans son *Traité d'algèbre* argumente comme il suit: parce qu'on a $\frac{a}{a} = a^0 = 1$ il suit que a^0 est toujours égal à l'unité, soit que le nombre a soit grand ou petit, et même si a est égal à zéro, de manière que la valeur de 0^0 est certainement égale à l'unité. Mais pourquoi ne pas dire encore: parce qu'on a toujours $\frac{a}{a} = 1$ sans que cette égalité dépende de la valeur du nombre a , elle subsistera encore si l'on a $a = 0$, c'est-à-dire qu'on aura toujours $\frac{0}{0} = 1$?”

⁸ Trecho original: “(…) Il en est de mémo avec la démonstration de Mascheroni que Mr. Libri a citée. Car n'en suit-il pas également que, parce qu'on a $\frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1$ on a aussi $\frac{0}{0} = 1$? La démonstration de Mr. Libri me parait encore sujette aux mêmes objections. En effet, personne ne contestera que la valeur de l'expression a/a est toujours égale à l'unité, au cas même qu'on suppose $a = 0$, alors la valeur de 0^0 comme celle de $\frac{0}{0}$ est égale à l'unité. Mais comme il n'en suit pas que la valeur de $\frac{0}{0}$ soit toujours égale à l'unité, de même on n'en doit pas conclure qu'on a toujours $0^0 = 1$.”

Finalmente, no terceiro trecho deste artigo, o autor (anônimo) indica que o único caminho para solução da igualdade, $0^0 = 1$, é demonstrar por limite que o valor de $f(a)^{F(b)}$ é sempre igual à unidade, quando duas funções $f(x)$, $F(y)$ se aproximam de zero, para os valores $x = a$, $y = b$ e finaliza informando que as suas abordagens são consonantes com as de Cauchy.

“(…) Para provar essa igualdade, seria necessário demonstrar que o valor de $[f(a)]^{F(b)}$ é sempre igual à unidade, se tivermos duas funções $f(x)$, $F(y)$ que se aproximam a zero, para os valores $x = a$, $y = b$, o que não fizemos até agora. Na minha opinião, a expressão 0^0 nada mais é do que a expressão $0^1 \times 0^{-1}$, e como esta última expressão que é igual a $0 \times \infty = \frac{0}{0}$ pode assumir todos os valores incluídos entre $-\infty$ e ∞ , da mesma forma a expressão 0^0 pode ter todos os seus valores. O Sr. Cauchy é o único autor em que possui esta mesma opinião.” (Sur, 1834, p. 272, tradução nossa⁹).

Cabe ressaltar que no artigo, não foram apresentadas considerações sobre as demonstrações por binômio de Newton e que, atualmente, a avaliação da expressão 0^0 por limite carece do devido rigor matemático, pois o valor do limite de uma função em um ponto não permite afirmar qual será o valor da função no ponto considerado.

O terceiro artigo apresenta uma demonstração para a igualdade $0^0 = 1$ creditada ao matemático Johann Friedrich Pfaff que foi professor do matemático August Ferdinand Möbius, autor do artigo. A demonstração publicada por Möbius recorre à transformação de variável, aplica conceitos de limites e utiliza um caso específico para concluir que o valor de 0^0 é unitário. Foi publicada em 1834 no volume XII do *Journal de Crelle* e destacamos o seguinte recorte do artigo:

“(…) Dessa equação, meu inesquecível professor e amigo, entendia. J. F. Pfaff em Halle apresentou-me uma prova em 1814 que não deixava nada a desejar em termos de nível, e que aqui apresento para eliminação das dúvidas levantadas no volume XI deste jornal, página 272, contra a compreensão geral sobre a admissibilidade geral da equação. A equação $0^0 = 1$ não quer dizer nada além de que o valor de x^x quando se aproxima

⁹ Trecho original: *“(…) Pour prouver cette égalité il faudrait démontrer que la valeur de $f(a)^{F(b)}$ est toujours égale à l'unité, si l'on a deux fonctions $f(x)$, $F(y)$ qui se changent en zéro, pour les valeurs $x = a$, $y = b$, ce qu'on n'a pas fait jusqu'à présent. Selon mon avis l'expression 0^0 n'est autre chose que l'expression $0^1 \cdot 0^{-1}$, et comme cette dernière expression qui est égale à $0 \cdot \infty = \frac{0}{0}$ peut avoir toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et ∞ , de même l'expression 0^0 peut avoir toutes ses valeurs. Mr. Cauchy est le seul auteur où j'ai trouvé la même opinion.”*

a qualquer limite especificável com a diminuição contínua de x . Se você definir $x = \frac{1}{u}$, $x^x = \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}}$, é possível demonstrar que $u^{\frac{1}{u}}$ pode ser trazido o mais próximo possível da unidade que você deseja, bastando u crescer.” (Möbius, 1834, p. 134, tradução nossa¹⁰)

O quarto artigo reúne textos de dois autores anônimos distintos que questionam as premissas apresentadas por Möbius. Os textos foram publicados em 1834 no volume XII do *Journal de Crelle* e destacaremos o seguinte fragmento do texto do primeiro autor:

“(…) À luz da observação que acaba de ser feita, não será estranho dizer que em quantidades exponenciais o valor do limite pode não ser 1, enquanto expoente e base desaparecem ao mesmo tempo, como é o caso das seguintes expressões, $x^{\frac{a+x}{\ln(x)}}$, $x^{\frac{a}{\ln(x) + \ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)}}$, ambos se reduzem a e^a quando x tende a zero.” (Bemerkungen, 1834, p. 292, tradução nossa¹¹)

O segundo texto (anônimo) possui a mesma autoria do segundo artigo apresentado neste item, conforme relato incluso no próprio artigo e que destacaremos as seguintes observações:

“(…) Seja $X = e^{\frac{-1}{x}}$, onde e significa a base dos logaritmos naturais, $Y = x$: e quando o valor x é reduzido para zero tanto X como Y serão reduzidos para zero; neste caso $\left(e^{\frac{-1}{x}}\right)^x$ deveria ser igual à unidade. No entanto, você nunca negará que, para todo valor finito de x , esta expressão será igual a $\frac{1}{e}$. Então, aqui temos um exemplo onde não é igual

¹⁰ Trecho original: “(...) Von dieser Gleichung theilte mir mein unvergeßlicher Lehrer und Freund, der verst. Hofrath Pfaff in Halle, im Jahre 1814 einen Beweis mit, der an Bündigkeit nichts zu wünschen übrig lassen möchte, und den ich hier zur Beseitigung der im XI. Bande dieses Journals, Seite 272, gegen die allgemeine Zulässigkeit der Gleichung erhobenen Zweifel bekannt zu machen, mir erlaube. Die Gleichung $0^0 = 1$ will nichts Anders sagen, als dafs der Werth von x^x bei fortwährender Abnahme von x sich der Einbeit über jede angebbare Grenze nähert. Man setze $x = \frac{1}{u}$, so wird $x^x = \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}}$, und es komm alsdann darauf an, zu zeigen, dafs $\frac{1}{u^{\frac{1}{u}}}$ der Einheit so nahe gebracht werden kann, als man will, wenn man u obne Ende wachsen läfst.”

¹¹ Trecho original: “(...) Nach der eben gemachten Bemerkung wird es nicht befremden, wenn man auf Exponentialgrößen stufst, die nicht den Grenzwert 1 annehmen, während Exponent und Basis gleichzeitig verschwinden, wie es z. B. bei den folgenden der Fan ist, $x^{\frac{a+x}{\log(x)}}$, $x^{\frac{a}{\log(x) + \log\left(\ln\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)}}$ die sich beide Dir $x = 0$ auf e^0 reduciren.”

a um. Além disso, a expressão $\left(e^{\frac{-1}{x}}\right)^{2x} = \frac{1}{e^2}$; e outros exemplos poderiam mostrar que a expressão 0^0 pode ter muitos valores diferentes. Talvez o professor Möbius compartilhe sua visão das observações que acabamos de fazer neste Jornal.” (Bemerkungen, 1834, p. 294, tradução nossa¹²)

Ambos os textos indicam que expressões mais gerais de $f(s)^{F(x)}$ podem convergir para valores diferentes do unitário. Nenhuma resposta foi publicada no *Journal de Crelle* por Möbius sobre os questionamentos ao seu artigo, com o registro da fragilidade para demonstrar a igualdade $0^0 = 1$ com a aplicação dos conceitos de limite, situação usual nos primórdios do século XIX. Deveras, as expressões gerais de $f(s)^{F(x)}$ podem convergir para valores distintos do unitário, conduzindo para definir a expressão 0^0 como uma indeterminação conforme reivindicado por Cauchy, porém, cabe reforçar que a avaliação da expressão 0^0 por limite carece do devido rigor matemático atual, pois, como já apresentado, o valor do limite de uma função em um ponto não permite afirmar qual será o valor da função no ponto considerado.

O matemático alemão Georg Cantor foi precursor de ideias notáveis em teoria dos conjuntos que inovaram o pensamento matemático nos séculos XIX e XX (Rooney, 2012, pp. 192-195). Seus estudos são introdutórios a uma nova escala de infinidades e permitiu a construção das bases da nova aritmética cardinal (Eves, 2004, p. 662).

A implementação deste novo método de potenciação com a definição do conjunto suporte conduz a demonstração de que $0^0 = 1$. Cabe ressaltar que não se trata de uma convenção, é um teorema com fundamentação sólida e apresentado por diversos matemáticos (Bourbaki, 1963, p. 46; Godement, 1997, p. 90; Suppes, 1960, p. 116; Rosser, 1978, p. 385; entre outros).

Esta nova aritmética permitiu abordar o valor da expressão 0^0 sob uma nova perspectiva e a elaboração de teoremas para provar que 0^0 possui valor unitário e que este valor, o 1, é o único que atende a expressão $a^b = c$, quando $a = 0$, $b = 0$, com a, b, c sendo números naturais, não sendo, portanto, uma mera convenção ou norma prática. A seguir apresentamos a proposição sobre o assunto de Nicolas Bourbaki:

¹² Trecho original: “(...) Es sei $X = e^{\frac{-1}{z}}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, $Y = x$: so wird sowohl X als Y für den Werth $x = 0$ auf Null reducirt; es müßte also in diesem Falle $\left(e^{\frac{-1}{x}}\right)^x$ der Einheit gleich sein. Gleichwohl wird aber Niemand leugnen, dafs für jeden endlichen Werts von x dieser Andruck $= \frac{1}{e}$ ist. Hier hätten wir also ein Beispiel, wo 0^0 nicht $= 1$ ist. Ferner ist der Ausdruck $\left(e^{\frac{-1}{x}}\right)^{2x} = \frac{1}{e^2}$; und so liefse sich durch noch andere Beispiele zeigen, dafs der Ausdruck 0^0 allerdings sehr verschiedene Werthe haben kann. Vielleicht theilt uns Herr Prof. Moebius seine Ansicht über die eben gemachten Bemerkungen in diesem Journale mit.”

“(…) *Proposição 11. Seja um número cardinal a . Temos $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^a = 1$; se $a \neq 0$, temos $0^a = 0$. Em efeito, existe uma aplicação e somente uma de um \emptyset em qualquer conjunto (a aplicação de gráfico vazio); todas as aplicações de um conjunto de elemento único em qualquer conjunto X são equipotentes a X (cap. II, § 5, nº 3); existe uma aplicação e apenas uma de qualquer conjunto em um conjunto de um elemento; finalmente, não há aplicação de um conjunto não vazio em um \emptyset . Note que em particular temos $0^0 = 1$.” (Bourbaki, 1963, p. 46, tradução nossa¹³)*

A potenciação entre os cardinais de conjuntos finitos possui relação direta com o cardinal das aplicações estabelecidas entre os conjuntos. Caso o leitor tenha interesse em aperfeiçoar o conhecimento dos conceitos necessários para a obtenção do valor de 0^0 por este método indicamos Bourbaki, 1963, p. 46 ou Godement, 1966, p. 90.

3. Considerações finais

O percurso histórico deste artigo permite visualizar como o rigor matemático influencia na obtenção da solução do problema matemático. A controvérsia sobre a solução para a expressão 0^0 é antiga. Com os relatos aqui apresentados foi possível observar que não existe um fecho para a controvérsia e que as soluções alternam conforme o rigor e a evolução do pensamento matemático. É interessante observar que no século XVIII não existia controvérsia e que o rigor matemático vigente e as soluções convergiam para atribuir o valor unitário a esta expressão. Porém o processo de formalização da matemática durante o século XIX passou a exigir definições robustas e as demonstrações legadas do século XVIII passaram a ser conflituosas com os conceitos de limites que conduziam a definir a expressão 0^0 como uma das formas indeterminadas. Esta controvérsia permaneceu durante todo o século XIX e ainda é negligenciada ou abordada em poucos livros atualmente. No século XX, alguns matemáticos renomados, entre eles N. Bourbaki, P. R. Halmos e P. Supes, inspirados em uma nova aritmética inaugurada por G. Cantor, elaboraram teoremas que permitem provar que $0^0 = 1$. Contudo, ainda hoje a controvérsia continua provocando conflitos, e não podemos garantir a existência de consenso conclusivo para a questão. Este fato pode ser prontamente observado em calculadoras digitais ou software matemáticos que adotam alternadamente a solução unitária ou indeterminada.

Espera-se que as reflexões e abordagens apresentadas neste artigo permitam aos leitores mais subsídios para exporem a riqueza de detalhes existente na História da matemática. Acreditamos que a história demonstra que a solução de diversas questões é influenciada pelo contexto em que são abordadas e que a História deva ser consultada com

¹³ Trecho original: “(…) *Proposition 11. Soit a un cardinal. On a $a^0 = 1, a^1 = a, 1^a = 1$; si $a \neq 0$, on a $0^a = 0$. En effet, il existe une application et une seule de \emptyset dans un ensemble quelconque (l’application de graphe vide); l’ensemble des applications d’un ensemble à un seul élément dans un ensemble quelconque X est équipotent à X (chap. II, § 5, nº 3); il existe une application et une seule d’un ensemble quelconque dans un ensemble à un élément; enfin, il n’existe aucune application d’un ensemble non vide dans \emptyset . On notera en particulier que l’on a $0^0 = 1$.”*

o objetivo de elucidar e analisar as diversas situações em que estão as respostas atuais para as mais diversas questões matemáticas. Esta simples expressão, o 0^0 , pode se prestar ao importante intuito de conectar a História da Matemática com a construção dos saberes matemáticos, servindo de exemplo a estudantes, professores e pesquisadores.

Bibliografia

BARON, G., **The Mathematical Correspondent: A short Disquisition, concerning the Definition, of the word Power, in Arithmetic and Algebra**, NEW-YORK: Sage and Clough, 1804. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dxoAAAAAMAAJ&pg=PP15&hl=pt-BR&source=gbs_selected_pages&cad=3#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 10 fev. 2022.

BEMERKUNGEN zu dem Aufsätze überschrieben “Beweis der Gleichung $0^0 = 1$, nach J. F. Pfaff,” im zweiten Hefte dieses Bandes, S. 134. *Journal de Crelle*. Berlin, v.12, 1834. pp. 292-294. Disponível em: <[https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0012?tfy={%22pages%22:\[300\],%22view%22:%22thumbnails%22}>](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0012?tfy={%22pages%22:[300],%22view%22:%22thumbnails%22}>)>. Acesso em: 10 fev. 2022.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. Revisão técnica Uta C. Merzbach. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

BOURBAKI, N. **Éléments de Mathématique: Théorie des Ensembles Chapitre 3**. 2. ed. Paris: Ed. Hermann, 1963.

CAUCHY, A.L. **Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique**. 1. ed. Paris: L'Imprimerie Royale, 1821. Disponível em: <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t/f9.item.zoom> > Acesso em: 10 fev. 2022.

_____. **Leçons sur le Calcul Différentiel**, 1. ed. Paris: Ed. Libraires du Roi, 1829.

_____. **Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral**. 1. ed. Paris: Ed. Bachelier, 1840.

EULER, L. **Elements of Algebra**. 5. ed. Londres: Ed. Longman Orme And Company revista, 1840. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=aPWcyZiGB7IC&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Joseph+Louis+Lagrange%22&hl=pt-BR&sa=X&ved=2ahUKEwj9i6LRxNTqAhUSILkGHYRoAxYQ6AEwAXoECAAQAg#v=onepage&q&f=false>>. Acesso em: 10 fev. 2022.

_____. **Introductio in analysin infinitorum**. Lausannae : apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios, v. 1, 1748. Disponível em: <<https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1100&context=euler-works>>. Acesso em: 10 fev. 2022.

_____. **Introduction to Analysis of the Infinite**. Tradução John D. Blanton. New York: Ed. Springer-Verlag, v. 1, 1988.

_____. **Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Usu in Analysis Finitorum Ac Doctrina Serierum**. São Petersburgo: Ed. Petri Galeatii, 1755. Disponível em <<http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E212sup.adnotationespart2.pdf>>. Acesso em: 10 fev. 2022.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GARBI, G. G., **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2007.

GODEMENT, R. **Cours d'algèbre**. 3. ed. Paris: Ed. Hermann, 1997.

LIBRI, G. *Mémoire sur les fonctions discontinues*. **Journal de Crelle**, Berlin, v. 11, 1833. pp. 303-316 Disponível em: <[https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0010?tify={%22pages%22:\[315\],%22view%22:%22thumbnails%22}>](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0010?tify={%22pages%22:[315],%22view%22:%22thumbnails%22}>)>. Acesso em: 10 fev. 2022.

MÖBIUS, A. F. *Beweis der Gleichung $0^0 = 1$, nach J. F. Pfaff*. **Journal de Crelle**. Berlin, v.12, 1834. pp. 134-136. Disponível em: < [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0012?tify={%22pages%22:\[140\],%22view%22:%22thumbnails%22}>](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0012?tify={%22pages%22:[140],%22view%22:%22thumbnails%22}>)>. Acesso em: 10 fev. 2022.

ROONEY, A. **A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. 1. ed. São Paulo: Ed. M.Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

ROSSER, J. B. **Logic for Mathematicians**. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Co, 1978

SILVA, C. J. A. **A expressão zero elevado a zero**. 2020. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: < <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/49613/49613.PDF>>. Acesso em: 10 fev. 2022.

SUPPES, P. **Axiomatic Set Theory**. New York: Dover Publications, 1960.

SUR la valuer de 0^0 . **Journal de Crelle**. Berlin, v.11, 1834. pp. 272-273 Disponível em: < [https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0011?tify={%22pages%22:\[282\],%22view%22:%22thumbnails%22}>](https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0011?tify={%22pages%22:[282],%22view%22:%22thumbnails%22}>)>. Acesso em: 10 fev. 2022.

Carlos José Amorim da Silva
Universidade Federal Fluminense – UFF – Brasil

E-mail: camorim@id.uff.br

Christine Sertã Costa
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-
Rio – Brasil

E-mail: cserta@mat.puc-rio.br