Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 22, nº 43 – pp. 17–67
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O PASSEIO DO CAVALO, DE L. EULER (TRADUÇÃO)

Frederico J. A. Lopes
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT – Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2022)

Resumo

Esta é uma tradução do artigo *Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse*, de L. Euler (1707–1783), sobre o passeio do cavalo no tabuleiro de xadrez.

Palavras-chave: xadrez, matemática recreativa, história, Euler.

[THE KNIGHT'S TOUR, BY L. EULER (TRANSLATION)]

Abstract

This is a translation of the paper *Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse,* by L. Euler (1707–1783), about the knight's tour on a chess board.

Keywords: chess, recreational mathematics, history, Euler.

1. Introdução

O passeio do cavalo é um problema clássico do xadrez. Sua entrada na matemática recreativa foi feita através da análise arguta de L. Euler (1707–1783), no artigo que aqui traduzimos, publicado em 1759 nas *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*.

Por volta de 1750, o lendário mestre do xadrez François-André Danican Philidor (1726–1795) já era conhecido por toda a Europa. Seus problemas e combinações eram muito populares, aumentando a temperatura da febre enxadrística que invadira o continente. Esse frenesi provavelmente atingiu Euler em alguma de suas muitas reuniões nas cortes europeias, o que o fez dedicar bastante tempo ao xadrez.

Em uma dessas reuniões, ele foi apresentado ao passeio do cavalo, um quebra-cabeça surgido bem antes de Philidor ter iniciado sua era. O problema trata de percorrer com o cavalo todas as 64 casas de um tabuleiro de xadrez sem passar pela mesma casa duas vezes e partindo de qualquer casa dada. Como se sabe, o cavalo tem um movimento especial, que consiste em avançar duas casas e virar uma, em ângulo reto, ou avançar uma e virar duas. Quem já tentou resolver o passeio do cavalo vai entender que não se trata de uma tarefa trivial, muito menos se a casa de partida for determinada aleatoriamente. Seria possível encontrar algum método especial para resolver o problema? Esse foi o objetivo de Euler ao redigir seu artigo.

Além da curiosidade meramente recreativa, esta tradução, parte do projeto *Traduzindo Euler*, do grupo de pesquisa TRAMA – TRAduções de MAtemática, da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), pretende disponibilizar para um público mais amplo o acesso a fontes primárias de matemática, para que pesquisadores, professores e alunos produzam suas próprias reflexões sobre o que é, como é feita e para que serve a matemática. E que se divirtam e se deleitem com a solução de Euler, que abre ainda outras questões igualmente interessantes!

2. A tradução

SOLUÇÃO DE UMA QUESTÃO CURIOSA QUE NÃO PARECE SUJEITA A NENHUMA ANÁLISE

1. Encontrei-me um dia em uma companhia, onde, por ocasião de um jogo de xadrez, alguém propôs esta questão: *percorrer com um cavalo todas as casas de um tabuleiro sem voltar jamais duas vezes à mesma casa, e começando por uma casa dada.* Para este fim, puseram-se fichas sobre todas as 64 casas do tabuleiro, com exceção daquela de onde o cavalo deveria começar sua rota; e de cada casa por onde o cavalo passava, segundo sua marcha, retirava-se a ficha, de maneira que se tratava de retirar assim sucessivamente todas as fichas. Devia-se, portanto, evitar, por um lado, que o cavalo não retornasse jamais a uma casa vazia e, por outro, era necessário dirigir seu curso de maneira que ele percorresse todas as casas.

2. Os que acreditavam que essa questão era muito fácil fizeram várias tentativas inúteis sem conseguir atingir o objetivo. Depois deles, o que havia proposto a questão, tendo começado por uma casa dada, soube tão bem dirigir a rota que conseguiu felizmente retirar todas as fichas. No entanto, a quantidade de casas não permitiu que pudéssemos guardar na memória a rota que ele havia seguido. Foi apenas depois de várias tentativas que enfim encontrei uma rota tal que satisfizesse a questão; mesmo assim ela só valia para uma certa casa inicial. Não me lembro se a ele foi dada a liberdade de a escolher, mas ele assegurou positivamente que poderia fazê-lo qualquer que fosse a casa de onde desejássemos que começasse.

3. Para esclarecer melhor esta questão, acrescentarei aqui uma rota em que, começando por um canto do tabuleiro, todas as casas são percorridas:

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	45	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

Marquei aqui as casas pela ordem numérica segundo a qual elas são sucessivamente percorridas. Assim o cavalo, colocado na casa 1, salta para 2, e daí para 3, e em seguida para 4, 5, 6 etc. até que chegue por fim a 64, quando terá passado por todas as casas. É evidente que essa rota é igualmente satisfatória quando se deseja começar por qualquer um dos outros ângulos.

4. Voltando pela mesma rota, podemos também começar pela casa 64 e daí, passando sucessivamente pelas casas 63, 62, 61, etc., chegaremos enfim, depois de percorridas todas as casas, àquela casa 1 do canto. Mas essa rota não servirá de nada quando devemos começar por qualquer outra casa; e ainda, seremos obrigados a procurar por tentativas uma nova rota onde o início seja na casa dada. Ora, entenderemos facilmente que uma tal solução do problema proposto seria demasiadamente penosa e não conviria ao objetivo em vista, que trata de encontrar prontamente a rota que devemos seguir. Além disso, uma tal busca não merece nenhuma atenção a menos que seja fundada sobre alguns princípios, ou que a possamos submeter a algum tipo de Análise que oriente as operações.

5. É também com essa visão que ouso propor minhas pesquisas sobre esta questão, às quais fui conduzido por uma ideia bem particular que Mr. Bertrand[1], de Genebra, me deu; pois, ainda que simples e completamente estranha à Geometria, essa ideia deve ser vista como verdadeiramente notável, desde que encontremos um meio de aplicá-la à Análise. Ora, mostrarei que ela é suscetível de uma análise bem particular que deve merecer muito mais atenção, e que ela demanda raciocínios pouco utilizados alhures. Concordamos facilmente com a excelência da Análise, mas acreditamos que ela se limita ordinariamente a certas pesquisas relacionadas à Matemática. Portanto, será sempre muito importante utilizá-la em assuntos que lhe parecem recusar todo acesso, pois é certo que ela contém a arte de raciocinar no mais alto grau. Não poderíamos, portanto, estender os limites da Análise sem que consigamos contar com grandes vantagens.

6. Logo de partida, observo que poderíamos resolver a questão se encontrássemos uma rota tal que a última casa, marcada com 64, estivesse distante da primeira 1 por um salto de cavalo, de maneira que ele pudesse saltar da última à primeira. Tendo pois encontrado um tal rota que recomeça em si mesma, poderíamos começar por qualquer casa

[1]Louis Bertrand (1731–1812), geólogo e matemático suíço, foi pupilo e amigo de Euler.

e daí continuar o curso seguindo a ordem dos números até a casa marcada por 64, de onde, saltando àquela marcada por 1, acabaríamos o curso até retornar àquela de onde havíamos partido. Eis uma tal rota que recomeça em si mesma:

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

7. Tendo então bem guardada na memória uma tal rota, estaremos em condições de satisfazer à questão começando por uma casa qualquer. Tomemos pois, por exemplo, a casa marcada por 25, de onde o cavalo deve partir, e teremos apenas que fazê-lo passar sucessivamente pelas casas 26, 27, 28, … até a 64, de onde, passando à casa 1, ele continuará a rota pelas casas 2, 3, 4, até que tenha chegado àquela marcada com 24. Assim, ele terá percorrido todas as casas do tabuleiro. Indicarei esta rota representando os números que marcam as casas, como

25 . . . . 64. 1 24,

e é evidente que conseguiremos começando igualmente por qualquer outra casa; assim, esta disposição

46 . . . . 64. 1 45

servirá quando devemos começar pela casa 46.

8. É também evidente que a mesma disposição fornece, para cada casa de onde devemos começar, uma rota dupla: podemos igualmente passar da casa marcada contra a ordem dos números até àquela 1, e dela saltando à 64 continuar o curso pelas casas 63, 62, 61, etc., até que cheguemos àquela de onde começamos. Se o número 40 indica a casa de onde devemos partir, então teremos estas duas rotas para seguir:

40. 41 . . . . . . 64. 1. 2 39
e 40. 39 . . . . . . 1. 64. 63 41,

onde a primeira termina na casa 39, e a outra na 41. Toda outra disposição que recomeça em si mesma fornecerá as mesmas vantagens, e é suficiente saber uma só de cor; mas compreenderemos facilmente que isso seria um feito extremamente embaraçante, a de encontrar tateando, depois de várias tentativas, uma tal disposição, e arriscaríamos não encontrá-la talvez nunca mais.

9. Vou então explicar um método certo que nos conduzirá infalivelmente ao fim proposto, e por meio dele estaremos em condições de descobrir tantas rotas satisfatórias quanto desejarmos; porque, embora o número dessas rotas não seja infinito, ele será tão grande que não seriamos capazes de esgotá-lo. Mas é necessário distinguir aqui duas espécies de trotas, uma que percorre simplesmente todas as casas do tabuleiro sem que o cavalo possa saltar da última à primeira; e a outra espécie é a das rotas reentrantes nelas mesmas, onde o cavalo, depois de ter percorrido todas as casas, pode saltar da última à primeira. Dei um exemplo da primeira espécie no §3 e um da segunda no §6. Podemos considerar uma e outra como achadas por acaso, por tentativa, mas o método que explicarei servirá para encontrarmos tantas quanto quisermos, tanto de uma quanto de outra espécie.

10. Como é muito mais difícil encontrar apenas por tentativas uma rota da segunda espécie, começarei dando um método por meio do qual poderemos, depois de encontrada uma rota da primeira espécie, descobrir não somente uma, mas várias da segunda espécie. Para isso, faço notar logo que podemos mudar a última casa de várias maneiras, com a do início permanecendo a mesma. Consideremos a rota do §3 e marquemos as casas às quais o cavalo possa passar a partir daquela marcada por 64. Ora, veremos que essas casas são 63, 31 e 51, onde a primeira, de onde saiu o salto já empregado até a 64, não é de nenhuma utilidade. Mas, já que podemos passar da casa 31 à casa 64, fazendo esse salto depois de ter percorrido da casa 1 pelas casas 2, 3, 4, etc., até a 31, e seguir a rota pelas casas 64, 63, 62, etc., até chegar à casa 32, que será a última, essa nova rota será representada assim:

1. 2 . . . . . 31. 64. 63. . . . . . 32.

11. Da mesma maneira, o salto da casa 64 à 51 nos mostra que podemos passar da casa 51 à 64, e de lá, seguindo a rota pelas casas 63, 62, etc., a última será aquela que é marcada por 52. Essa rota inteira será então representada assim:

1. 2 . . . . . . 51. 64. 63. . . . . . 52.

Agora, como esta última casa 52 possibilita um salto à primeira, essa rota se refere à segunda espécie, e é reentrante em si mesma: esta é precisamente a rota descrita no §6. Se ainda não tivéssemos chegado a uma rota reentrante, poderíamos transformar de novo a que acabamos de encontrar no § anterior:

1. 2 . . . . . 31. 64. 63. . . . . . 32.

onde a última é 32. O cavalo então poderia saltar às casas 43, 11, 31, 33, e assim teríamos apenas que inverter o trecho dessa rota entre um desses números e o último 32.

12. O número 43 dará então esta nova rota:

1 . . . . 31. 64 . . . . 43. 32 . . . . 42.

onde a casa angular 42 é a última. O segundo número, 11, dará esta rota:

1 . . . . 11. 32 . . . . 64. 31 12,

onde a casa marcada por 12 é agora a última. O terceiro número, 31, dá a rota principal, donde conseguimos esse novo conhecimento:

1 . . . . . . 31. 32 64,

e o quarto número, 33, não muda nada na rota de que tratamos. A rota precedente, terminada por 12, desde que o cavalo possa saltar de 12 às casas 59, 41, 11 e 13, fornecerá estas transformadas:

1 . . . . 11. 32 . . . . 59. 12 . . . . 31. 64 61,
1 . . . . 11. 32 . . . . 41. 12 . . . . 31. 64 42,

e aquela, uma vez que 60 conduz às casas 61, 59, 9, 45, 25, 27, 13 e 53, nos levará a muitas rotas novas, onde as casas finais serão 10, 46, 26, 28, 14 e 54.

13. Eis uma fonte bem rica de onde podemos extrair uma quantidade de novas rotas tendo delas encontrado uma só; e o número de transformações se torna ainda maior quando invertemos a ordem da primeira rota

64 1,

onde a última casa, próxima de 52, fornece essa transformada

64 . . . . . 52. 1 51

e como a 51 dá um salto à 64, esta rota é reentrante nela mesma, mas ela não é nada mais do que a inversão daquela acima. Ora, como a 51 está ligada às casas 64, 52, 54, 56, 26 e 50, ela fornece as transformadas

64 . . . . 54. 51 . . . . 1. 52. 53
64 . . . . 56. 51 . . . . 1. 52 . . 55
64 . . . . 52. 1 . . . . 26. 51 . . . 27,

e destas, se quisermos, podemos ainda encontrar uma quantidade de outras, dentre as quais não deixaremos de encontrar aquelas que são reentrantes em si mesmas.

14. Ora, tendo já encontrado uma que é reentrante em si mesma, como aquela do §6, não é difícil derivar várias outras da mesma natureza: basta arrumar as casas de maneira tal que tanto a primeira quanto a última se encontrem afastadas das bordas, pois uma e outra permitem 8 saltos. Assim, se arrumarmos os números da rota do §6 da seguinte maneira

31 . . . . . . 64. 1 30,

a última casa 30, estando ligada a estas 45, 59, 23, 29, 31, 13, 43, 41, fornece as transformadas

I. 31 . . . . 45. 30 . . . 1. 64 46,
II. 31 . . . . 59. 30 . . . 1. 64 60,
III. 31 . . . . 64. 1 . . . 23. 30 14,
IV. 31 . . . . 64. 1 . . . 13. 30 14,
V. 31 . . . . 43. 30 . . . 1. 64 44,
VI. 31 . . . . 41. 30 . . . 1. 64 42,

onde a II e a IV são reentrantes em si mesmas, e tanto dessas quanto das outras poderemos encontrar, pelas transformações indicadas, várias outras. Como a III dá

31 . . . . 64. 1 . . . . 13. 24 . . . . 30. 23 14
31 . . 33. 24 . . . 30. 23 . . . . 1. 64 34
31 . . . . 64. 1 . . . . 15. 24 . . . . 30. 23 16

15. Mas quando não temos ainda uma rota da primeira espécie, vejamos como é preciso se atentar para encontrar uma sem se entregar ao puro acaso. Começando por uma casa qualquer, continuemos à vontade os saltos do cavalo tão longe quando possamos, e que coloquemos nas casas que ficaram vazias letras que lhes sirvam de sinal, como nesta figura:

34	21	54	9	32	19	48	7
55	10	33	20	53	8	31	18
22	35	62	*a*	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	37	2	43	14	27	4	45
1	*b*	13	26	3	44	15	28

Aqui pude continuar a rota até a casa marcada por 62, e com as letras *a* e *b*.

16. Agora, tendo 62 casas percorridas pelo cavalo, eu as represento desta maneira

1 62

e olhando a casa 62 como a última, procuro transformadas que terminem em outras casas de onde há uma passagem para uma das casas *a* ou *b*. Ora, a casa 62 comunica com estas 9, 53, 59, 61, 23, 11, 55 e 21, de onde tiramos essas transformadas:

I. 1 . . . . 9. 62 . . . . 10, de onde passamos a *a*
II. 1 . . . . 53. 62 . . 54, de onde passamos a *a*
III. 1 . . . . . . 59. 62 . . 60
IV. 1 . . . . . . 23. 62 24
V. 1 . . . . 11. 62 12
VI. 1 . . . . . . 55. 62 . . . . 56, de onde passamos a *a*
VII. 1 . . . . . . 21. 62 . . . . . 22.

Assim, as rotas I, II e IV já se estendem até a casa *a*, e resta vazia somente a casa *b*, e para ligá-la com as outras temos apenas que transformar uma dessas três trotas pelo mesmo método. Operaríamos de maneira semelhante se tivessem sobrado várias casas vazias.

17. Tomemos a primeira transformada

1 . . . . . . 9. 62 . . . . . 10. *a*

onde a última casa *a* conduz a 32, 8, 52, 42, 58, 56, 10 e 54, das quais a 58 fornece esta transformada

1 . . . . 9. 62 . . . . 58. *a*.10 . . . 57

onde a última 57 conduz à casa *b*, de maneira que então o cavalo terá percorrido todas as casas, tendo começado seu curso em 1 e terminado em *b*.

1 . . . 9. 62 . . . 58. *a*. 10 . . . . 57. *b*.

Mas esta rota não é reentrante em si mesma. Para dar a ela essa vantagem, procuremos novas transformadas, a última *b* conduzindo a essas casas: 57, 25, 43: onde a 25 dá esta transformada

1 . . . . 9. 62 . . . . 58. a. 10 . . . . 25. *b*. 57 26,

onde a última conduz a 37, 25 e 51 e 27. Ora, nenhuma fornece uma rota da segunda espécie. Tomemos então 43:

1 . . . . 9. 62 . . . . 58. a. 10 . . . . 43. *b*. 57 44,

onde a última 44 conduz a 43, 51, 29 e 45: onde nenhuma dá imediatamente uma rota reentrante em si mesma.

18. Será necessário então passarmos a novas transformadas, e para que possamos fazê-lo mais facilmente, será melhor apresentarmos a rota da primeira espécie encontrada pela ordem natural dos números

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

A rota é representada dessa maneira

1 64,

com a última conduzindo a 63, 31, 49, e teremos duas transformadas:

I. 1 . . . . . . 31. 64 32,
II. 1 . . . . . . 49. 64 50,

pois a casa 63 não muda nada da proposta.

19. Como há apenas duas casas que finalizam na primeira 1, revertamos essas duas transformadas para ter:

I. 32 . . . . 64. 31 1,
II. 50 . . . . 64. 49 1,

e agora, com a última 1 conduzindo a 2 e 18, obtemos essas duas novas:

A. 32 . . . . . 64. 31 . . . . . 18. 1 17,
B. 50 . . . . . 64. 49 . . . . . 18. 1 17,

e com a última 17 conduzindo a 16, 10, 14, 18, obteremos

C. 32 . . . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . . 10. 17 11,
D. 50 . . . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . . 10. 17 11,
E. 32 . . . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . . 14. 17 15,
F. 50 . . . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . . 14. 17 . . . . 15.

A última 11 conduz a 46, 58, 12, 20, 2, 18, 62, 10 e dá

G.	32 . . . 46. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 31. 64 . . . 47,
H.	50 . . . 64. 49 . . . 46. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . . 45,
I.	32 . . . 58. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 31. 64 . . . 59,
K.	50 . . . 58. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 49. 64 . . . 59,
L.	32 . . . 64. 31 . . . 20. 11 . . 17. 10 . . . 1. 18. 19,
M.	50 . . . 64. 49 . . . 20. 11 . . 17. 10 . . . 1. 18. 19,
N.	32 . . . 64. 31 . . . 18. 1. 2. 11 . . . 17. 10 . . 3,
O.	50 . . . 64. 49 . . . 18. 1. 2. 11 . . . 17. 10 . . 3,
P.	32 . . . 62. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 31. 64. 63,
Q.	50 . . . 62. 11 . . . 17. 10 . . . 1. 18 . . 49. 64. 63,

20. Ora, E e F, onde a casa 15 conduz a 33, 8, 58, 48, 14, 62, 16, 60, darão essas transformadas:

g.	32 . . 38. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . 31. 64 . . . 39,
h.	50 . . 64. 49 . . . . 38. 15 . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 37,
i.	32 . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . 8. 15 . . . 17. 14 . . 9,
k.	50 . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . 8. 15 . . . 17. 14 . . 9,
l.	32 . . 58. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 31. 64 . . 59,
m.	50 . . 58. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 49. 64 . . 59,
n.	32 . . 48. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . . 31. 64 . . 59,
o.	50 . . 64. 49. 48. 15 . . 17. 14 . . 1. 18 47,
p.	32 . . 62. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . 31. 64. 63,
q.	50 . . 62. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . 49. 64. 63,
r.	32 . . 60. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . 31. 64. . 61,
s.	50 . . 60. 15 . . . 17. 14 . . . 1. 18 . . 49. 64. . 61,

Mas, entre todas essas transformadas, ainda não encontramos uma que seja reentrante em si mesma, mas suas transformadas ulteriores fornecerão muitas.

21. Tomemos a rota indicada pela letra G, onde última casa 47 comunica com 26, 46, 48, 44, 18, 42, 28, 16. As últimas casas que teremos por essas transformações serão: 27, 11, 47, 45, 19, 43, 29, 17, na qual a 43 comunica com a primeira 32, e dá consequentemente esta rota reentrante

32 . . 42. 47 . . 64. 31 . . 18. 1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 43

que poderá então ser representada assim

1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 43. 32 . . 42. 47 . . 64. 31 . . 18,

e marcando as casas pela ordem natural dos números, teremos esta rota reentrante:

30	55	46	9	28	57	40	7
47	12	29	56	45	8	27	58
54	31	10	13	18	41	6	39
11	48	33	42	15	44	59	26
32	53	14	17	34	19	38	5
49	64	51	20	43	16	25	60
52	21	2	35	62	23	4	37
1	50	63	22	3	36	61	24

22. Na rota indicada pela letra H, tendo 45 como a última casa, as casas
comunicantes são: 6, 36, 22, 4, 20, 44, 56, 46
e a últimas serão: 5, 37, 23, 3, 21, 45, 57, 11
onde a 57 se comunica com a primeira 50, de onde resulta esta rota reentrante:

50 . . 56. 45 . . 18. 1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 49 . . 64 . . 57

que poderá ser representada também assim

1 . . 10. 17 . . 11. 46 . . 49. 64 . . 57. 50 . . 56. 45 . . 18,

42	55	26	9	44	57	34	7
25	12	43	56	27	8	45	58
54	41	10	13	18	35	6	33
11	24	19	36	15	28	59	46
40	53	14	17	20	37	32	5
23	64	51	38	29	16	47	60
52	39	2	21	62	49	4	31
1	22	63	50	3	30	61	48

que não difere muito da precedente.

23. As rotas indicadas por I e K, que têm a última casa 59, teremos

as casas comunicantes: 54, 6, 58, 56, 10, 60,
as últimas para I serão: 55, 5, 11, 57, 9, 59,
ou as últimas para K: 55, 5, 11, 57, 9, 59,

donde tiramos mais duas reentrantes, uma vez que 57 comunica tanto com 32 quanto com 50, a saber

32 . . 56. 59 . . 64. 31 . . 18. 1 . . 10. 17 . . 11. 58. 57,
50 . . 56. 59 . . 64. 49 . . 18. 1 . . 10. 17 . . 11. 58. 57,

que poderão ser representadas assim

1 . . 10. 17 . . 11. 58. 57. 32 . . 56. 59 . . 64. 31 . . 18,
1 . . 10. 17 . . 11. 58. 57. 50 . . 56. 59 . . 64. 49 . . 18.

Igualmente, as rotas L e M, terminando por 19, teremos

as casas comunicantes com 19 . . 30. 18. 44. 20,
daí as últimas para L 29. 19. 45. 11,
. . . . para M 29. 19. 43. 11,

onde não há nenhuma reentrante. As rotas N e O, terminando por 3, teremos em relação a esta última:

as casas comunicantes 2, 44, 12, 4,
e a última se torna para N . . 11, 45, 13, 3,
. . . . para O . . 11, 43, 13, 3,

onde também não há nenhuma reentrante.

24. Se valesse a pena, poderíamos, buscando essas transformações, encontrar muitas outras rotas reentrantes em si mesmas, e não deixaríamos de descobrir meios de encurtar as operações, encontrando duas ou mais por vez, de maneira a chegar rapidamente ao fim proposto. Também não é meu projeto assinalar todas as rotas possíveis que sejam reentrantes em si mesmas, o que seria um trabalho tão penoso quanto inútil; e me contento em ter dado um método seguro para encontrarmos tantas rotas quando queiramos, um método cuja aplicação não é difícil em cada caso. Mas podemos adicionar à questão principal mais condições que a tornem mais curiosa, como se exigíssemos que os números que se encontram em casas opostas tenham a mesma diferença, que deve ser 32 como a média do número de todas as casas. Ou que cada casa tenha uma que lhe seja oposta, de maneira que a linha reta tirada pelo centro dessas casas divida o quadrado em duas partes iguais. Exijamos então que os números 33, 34, 35, 36 . . . . 64 se encontrem opostos aos números 1, 2, 3, 4 . . . . 32.

25. Para encontrar tais rotas diagonais, temos apenas que começar por escrever os números 1, 2, 3, 4, etc., segundo a marcha do cavalo e, à medida que escrevemos esses números, colocar os números 33, 34, 35, 36, etc., nas casas opostas, e seguir esse arranjo tanto quanto pudermos, como podemos ver na figura seguinte:

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58·
28	11	A	C	*f*	45	32	19·
37	50	B	D	*e*	6	59	44
12	27	38	E	*d*	*b*	18	5
51·	64	13	F	*c*	*a*	43	60
26·	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Aqui posso continuar a sequência de números 1, 2, 3, até 19, e a dos números 33, 34, 35 até 51. Mas, de maneira retrógrada, posso passar de 1 a 64, 63 até 58, e de 33 posso recuar até 26. Doze casas ficam vazias, e emprego as letras A, *a*, B, *b*, C, *c*, D, *d*, E, *e*, F, *f*, dispostas por casas opostas.

26. Temos então duas espécies separadas de casas, que se seguem segundo a marcha do cavalo:

58 . . . . 64. 1 19,
29 . . . . 51.

Com a casa 19 levando a 6, teremos essas transformadas, que poderão ser continuadas:

58 . . . 54. 1 . . . 6. 19 . . . 7, *f*, B, *d*, C,
26 . . . . 38. 51 . . . . 39, F, *b*, D, *c*.

Agora, a casa C, comunicando com as casas 8, 6, *d* da primeira sequência, não fornece novas transformações. Mas retiremos as duas últimas casas, e como é suficiente transformar uma só sequência, porque a outra fica determinada, tomemos a primeira

58 . . . 64. 1 . . . 6. 19 . . . 7, *f*, B,

onde B, levando a 12, dá essa transformada a ser continuada:

58 . . . . 64. 1 . . 6. 19 . . 12. B. *f*. 7 . . . 11. D. *c*.

Ora, com *c* comunicando com a 16, teremos

58 . . 64. 1 . . 6. 19 . . 16. *c*. D. 11 . . 7. *f*. B. 12 . . 15. *a*. E,

e a outra sequência será

26 . . . . 38. 51 . . 48. C. *d*. 43 . . 39. F. *b*. 44 . . 47. A. *c*,

onde todas as casas estão contempladas.

27. Agora é necessário ligar essas duas sequências, de maneira que o fim de uma se junte ao começo da outra. Por isso, transformemos a primeira, onde o fim E comunica com a casa 62, e então o fim se torna 63, que será unido com o começo 26 da outra. Esta transformação dá então:

58 . . 62. E. *a*. 15 . . 12. B. *f*. 7 . . 11. D. *c*. 16 . . 19. 6 . . 1. 64 . . 63
26 . . 30. *e*. A. 47 . . 44. *b*. F. 39 . . 43. *d*. C. 48 . . 51. 38 31

e temos ao mesmo tempo uma reentrante nela mesma, e dotada da condição prescrita:

14	59	42	35	16	31	54	33
41	36	15	58	55	34	17	30
60	13	56	43	18	53	32	7
37	40	19	12	57	6	29	52
20	61	38	25	44	51	8	5
39	64	21	50	11	24	45	28
62	49	2	23	26	47	4	9
1	22	63	48	3	10	27	46

28. Tendo encontrado uma só rota desta natureza, é fácil transformá-la de várias maneiras diferentes conservando-lhe a mesma propriedade. Pois, de qualquer maneira que particionemos a sequência reentrante de números 1 . . . . . . 64 em duas metades, uma contém sempre as casas opostas da outra, como podemos ver por essas bisseções:

1 . . . 32 | 2 . . . . . . 33 | 3 . . . . 34 | 4 . . . . 35 |
33 . . .64 | 34 . . . 64. 1 | 35 . . . 64. 1. 2 | 36 . . 64. 1 . . 3 |

onde as duas metades são sempre coerentes. Agora, temos apenas que tomar uma tal bisseção à vontade e transformar as duas metades semelhantemente, até que elas fiquem coerentes. Assim, tomemos a metade 3 . . . . 34 onde o fim 34 comunica com 7 e dá a transformada 3 . . . 7. 34 . . . 8, e de maneira reversa, 8 . . . 34. 7 . . . 3, onde o fim 3 comunica com a 24, dando

8 . . . . 24. 3 . . . . . 7. 34 25,

e a outra metade será

40 . . . . 56. 35 . . . . 39. 2. 1. 64. 1 . . 57,

que são coerentes pelos seus fins 25, 40 e 8, 57. Podemos então representar assim estas novas rotas:

1. 2. 39 . . . . 35. 56 . . . . 40. 25 32,
33. 34. 7 . . . . 3. 24 . . . . 8. 57 . . . . 64.

29. A mesma metade 3 . . . . 34, já que o primeiro fim 3 comunica com o 24, dá pela transformação:

23 . . . 3. 24 34,

e com 34 comunicando com a 7 dá

23 . . . . 7. 34 . . . . 24. 3 6,

e a outra metade será

55 . . . . 39. 2. 1. 64 . . 56. 35 38,

que é coerente. Consequentemente, teremos uma rota representada por essas duas metades:

1. 2. 39 . . . 55. 6 . . . 3. 24 . . . 32,
33. 34. 7 . . . 23. 38 . . . 35. 56 . . . 64.

A metade 4 . . . . . 35, por conta da comunicação do fim 35 com 18, dá

4 . . . . . 18. 35 19,

que já é coerente com

36 . . . . 50. 3 . . 1. 64 . . 51

donde tiramos esta rota:

1 . . . 3. 50 . . . . . 36. 19 32
33 . . 35. 18 . . . . 4. 51 64

e outras transformações da mesma metade dão

1 . . . . 3. 50 . . . . 43. 36. 19 . . . 23. 10 . . . 5. 24 32
33 . . . 35. 18 . . . 11. 4. 51 . . . . 55. 42 . . . 47. 56 . . . 64.

30. E eis quatro outras rotas que têm a mesma propriedade que aquela do §.27:

50	59	22	7	48	31	10	33
23	6	49	58	9	34	47	30
60	51	8	21	46	11	32	35
5	24	45	52	57	36	29	12
44	61	4	25	20	13	56	37
3	64	43	14	53	40	19	28
62	15	2	41	26	17	38	55
1	42	63	16	39	54	27	18

42	59	6	55	44	31	18	33
5	54	43	58	19	34	45	30
60	41	56	7	46	17	32	35
53	4	47	40	57	20	29	16
48	61	52	25	8	15	36	21
3	64	49	14	39	24	9	28
62	13	2	51	26	11	22	37
1	50	63	12	23	38	27	10

40	59	12	35	38	31	54	33
13	18	39	58	55	34	37	30
60	41	56	11	36	53	32	47
17	14	19	42	57	48	29	52
20	61	16	25	10	51	46	49
15	64	21	4	43	24	9	28
62	5	2	23	26	7	50	45
1	22	63	6	3	44	27	8

40	59	50	35	38	31	48	33
51	12	39	58	49	34	37	30
60	41	56	11	36	47	32	21
55	52	13	42	57	22	29	46
14	61	54	25	10	45	20	23
53	64	15	4	43	24	9	28
62	5	2	17	26	7	44	19
1	16	63	6	3	18	27	8

31. A esta condição de casas opostas podemos ainda acrescentar esta, que a primeira metade dos números 1 . . . . 32 preencha apenas a metade do tabuleiro, dividindo o tabuleiro por uma linha paralela a um lado

							33	
α								β
	1	*a*	*b*	28	7	14	19	16
	24	27	8	*c*	20	17	6	13
	9	2	25	22	11	4	15	18
	26	23	10	3	*d*	21	12	5

de maneira que os números 1 . . . . . 32 se encontrem todos abaixo da linha αβ, e os outros 33 . . . . 64 acima. É necessário, portanto, que a unidade 1 se encontre próxima da linha αβ, de maneira que ela possa se comunicar com o número 64 que se encontra acima.

32. Comecemos então por colocar a unidade em uma tal casa qualquer e, em virtude da oposição, a casa 33 será determinada também, e será necessário fazê-lo de maneira que ela comunique com aquela que contém o número 32 abaixo da linha αβ. Tentando um tal disposição, cheguei até o número 28 e escrevi nas casas vazias as letras *a, b, c, d*, para o arranjo das quais eu faço as transformações seguintes. A sequência 1 . . . . 28, em que 28 finaliza em 27, 25, 11, 17, dá essas transformadas:

I. 1 . . . . 25. 28 . . . . 26;
II. 1 . . . . 11. 28 . . . . 12;
III. 1 . . . . 17. 28 . . . . 18;

onde nenhuma se estende a uma das casas vazias. Mas depois de muitas transformações, chegamos a esta, que compreende todas as casas

1 . . . 8. 23 . . 21. 18 . . 20. *b*. 24 . . 28. 17 . . 9. *a. c. d.*

que se transforma nesta:

1 . . . 8. 23 . . 21. 18 . . 20. *b*. 24 . . 28. 17 . . 15. *d. c. a.* 9 . . . 14,

onde o fim 14 comunica com o começo 33 da outra metade acima da linha αβ; e o fim 64 desta comunicará com a casa 1.

33. Eis aqui esta rota representada por inteiro

	37	62	43	56	35	60	41	50	
	44	55	36	61	42	49	34	59	
	63	38	53	46	57	40	51	48	
	54	45	64	39	52	47	58	33	
α	1	26	15	20	7	32	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	6	31	
	27	2	17	10	29	4	23	12	
	18	9	28	3	24	11	30	5	

e não só é fácil encontrar muitas outras pelo mesmo método, como também podemos transformar esta de várias maneiras. E aqui estão algumas:

7 . . . . 1. 8 32
7 . . . . 1. 8 . . 25. 32 26
15 . . . 10. 7 . . . 1. 8. 9. 16 . . . 21. 24 . . . . 32. 23. 22,

que podemos ainda inverter, como a primitiva, representando-a assim

32 1

34. Eis ainda algumas rotas dessa espécie:

	35	62	43	56	37	60	41	50	
	44	55	36	61	42	49	38	59	
	63	34	53	46	57	40	51	48	
	54	45	64	33	52	47	58	39	
α	7	26	15	20	1	32	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	2	31	
	27	6	17	10	29	4	23	12	
	18	9	28	5	24	11	30	3	

	35	60	43	56	37	62	41	50	
	44	55	36	61	42	49	38	63	
	59	34	53	46	57	40	51	48	
	54	45	58	33	52	47	64	39	
α	7	32	15	20	1	26	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	2	27	
	31	6	17	10	29	4	23	12	
	18	9	30	5	24	11	28	3	

	41	60	37	54	43	58	47	50	
	36	63	42	59	38	49	44	57	
	61	40	53	34	55	46	51	48	
	64	35	62	39	52	33	56	45	
α	13	24	1	20	7	30	3	32	β
	16	19	14	23	2	21	8	29	
	25	12	17	6	27	10	31	4	
	18	15	26	11	22	5	28	9	

	62	37	56	41	60	35	54	47	
	57	42	61	36	55	48	51	34	
	38	63	44	59	40	53	46	49	
	43	58	39	64	45	50	33	52	
α	20	1	18	13	32	7	26	11	β
	17	14	21	8	27	12	31	6	
	2	19	16	23	4	29	10	25	
	15	22	3	28	9	24	5	30	

35. Até aqui, considerei a questão tal qual ela havia sido proposta para o tabuleiro comum dividido em 64 casas. Ora, como esse número é grande demais para que possamos conceber todas as variedades que podem ter lugar, será bom considerar também algumas figuras mais simples que contêm um número menor de casas que o cavalo de xadrez deva percorrer. De saída, é evidente que nem um quadrado de 4 nem um quadrado de 9 casas são apropriados para isso; mas veremos que não podemos ser bem-sucedidos em um quadrado de 16 casas. Pois, de qualquer maneira que o abordamos, sempre restará uma casa angular vazia; e veremos em breve que todas as transformações que podemos fazer não são capazes de a preencher. É claro que deveríamos começar e terminar em um canto; e, na partida, dois dos quatro quadrados do meio serão logo preenchidos, e os outros dois deveriam ser guardados até o fim, o que não pode ser feito.

1	8	13	10
14	11	4	7
5	2	9	12
	15	6	3

36. O primeiro quadrado, portanto, que o cavalo pode percorrer é o de 25 casas, que poderemos preencher por meio das mesmas regras, caso não consigamos na primeira tentativa. Ora, a marcha do cavalo tem sempre a propriedade de que os números pares e ímpares se seguem alternadamente, como podemos ver por todas as figuras mostradas até aqui. Daí, é evidente que a última casa, contendo 25, não poderia jamais comunicar com a primeira 1, e, portanto, é impossível encontrar uma rota reentrante nela mesma no quadrado de 25, nem com nenhuma outra figura que contenha um número ímpar de casas. Daí compreendemos também que não poderíamos jamais começar por uma casa que contém um número par, pois, de qualquer maneira que transformemos essa rota, os números pares cairão sempre nas mesmas casas, e as casas angulares conterão os números ímpares. Nesse quadrado de 25 fica também claro que é absolutamente necessário começar ou terminar por uma casa angular.

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

37. Mas vejamos também as transformações que podemos tirar dessa rota 1 . . . 25 encontrada no quadrado de 25 casas. Ora, a última comunica com as casas 20, 10, 16, 22, 12, 18, 24, 14 e dá essas transformadas:

I. 1 . . . 20. 25 . . . 21; II. 1 . . . 10. 25 . . . 11;
III. 1 . . . 16. 25 . . . 17; IV. 1 . . . 22. 25 . . . 23;
V. 1 . . . 12. 25 . . . 13; VI. 1 . . . 18. 25 . . . 19;
VII. 1 . . . . 25; VIII. 1 . . . 14. 25 . . . 15;

Então, começando pela casa angular, podemos terminar em qualquer uma das casas 21, 11, 17, 23, 13, 19, 25, 15. Mas a primeira da ainda essas transformadas,

a. 1 . . 6. 21 . . 25. 20 . . 7; *b.* 1. 2. 21 . . . 25. 20 . . . 3,

e essas outras

c. 1. 2. 11 . . 25. 10 . . 3; *d.* 1 . . 8. 11 . . 25. 10. 9,
e. 1 . . 4. 17 . . 25. 16 . . 5; *f.* 1 . . 8. 17 . . 25. 16 . . 9,
g. 1 . . 4. 23 . . 25. 22 . . 4; *h.* 1. 2. 23 . . 25. 22 3,

i. 1 . . 6. 13 . . 25. 12 . . 7; *k.* 1. 2. 13 . . 25. 12 3,
l. 1 . . 6. 19 . . 25. 18 . . 7; *m.* 1 . . 4. 19 . . 25. 18 . . 5,
n. 1 . . 6. 15 . . 25. 14 . . 7; *o.* 1 . . 8. 15 . . 25. 14 . . 9,

onde as últimas casas são 3, 5, 7, 9[2].

38. Como as casas angulares 3, 5, 7 comunicam-se apenas com duas outras, elas não dão novas transformadas pelo nosso método. Consideremos então aquelas que terminam por 9 e tiremos essas transformadas

p. 1 . . 4. 9. 10. 25 . . 11. 8 . . 5; *q.* 1 . . 8. 11 . . 24. 9. 10. 25,
r. 1 . . 4. 9 . . 16. 25 . . 17. 8 . . 5; *s.* 1 . . 8. 17 . . 24. 9 . . 16. 25,
t. 1 . . 4. 9 . . 14. 25 . . 15. 8 . . 5; *u.* 1 . . 8. 15 . . 24. 9 . . 14. 25.

Agora, essas novas rotas que terminam por 25 nos conduzem a outras transformadas, e chegaremos a muitas outras rotas que terminam por qualquer uma das casas marcadas por números ímpares. Daí vemos que, começando pela casa angular 1, podemos terminar em qualquer casa que quisermos marcada com um número ímpar e de várias maneiras diferentes. Então, como cada rota pode ser invertida, o número de todas as rotas possíveis se torna extremamente grande.

39. Aqui podemos ainda acrescentar esta condição, que os números que se encontram em casas opostas tenham sempre a mesma soma, a saber, 26. É necessário então que a primeira e a última casas se encontrem em ângulos opostos; e para encontrar uma rota assim, basta apenas que comecemos a preencher o quadrado e colocar na casa oposta de cada número seu complemento de 26 e continuar assim o tanto quanto podermos. Mas, já que sabemos que a casa do meio deve conter 13, quase não temos o que perder; e então, conservando a mesma propriedade, podemos tirar muitas formas diferentes. Eis aqui algumas:

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

I. 1 . . . . 4. 11 . . . . . . 5. 14. <u>13</u>. 12. 21 . . . 15. 22 . . . 25,
II. 1 . . . . 4. 7 . . 5. 14 . . 18. .<u>13</u>. 8 . . 12. 21 . . 19. 22 . . . 25,
III. 1 . . . . 4. 21 . . . . 14. <u>13</u>. 12 . . . . . . 5. 22 . . . 25,
IV. 1 . . . . 5. 14 . . . . 20. <u>13</u>. 6 . . . . . . 12. 21 . . . 25,
V. 1 . . 4. 11. 12. 21 . . . . 16. <u>13</u>. 10 . . . . 5. 14. 22 . . . 25,
VI. 1 . . 4. 7 . . . . . 12. 21. 20. <u>13</u>. 6. 5. 14 . . . 19. 22 . . . 25,
VII. 1 . . 4. 21. 12 . . . . 6. <u>13</u>. 20 . . . . 14. 5. 22 . . . 25.

40. Em todas essas variações, tanto os quatro primeiros números 1 . . . 4 quanto os quatro últimos 22 . . . 25, com aquele 13 do meio, se mantêm invariáveis, de maneira que as variações se dão apenas com os outros. Donde parece também que as rotas encontradas com as 7 variações esgotam inteiramente essa espécie. Eis aqui, então, todas essas 8 rotas representadas de uma só vez:

[2] A transformada *g* deve terminar com o número 5, e não com o 4, como está no texto.

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

23	18	11	6	25
10	5	24	17	12
19	22	13	4	7
14	9	2	21	16
1	20	15	8	3

23	12	7	16	25
6	17	24	21	8
11	22	13	4	15
18	5	2	9	20
1	10	19	14	3

23	8	21	16	25
20	15	24	7	12
9	22	13	4	17
14	19	2	11	6
1	10	5	18	3

23	10	19	14	25
18	5	24	9	20
11	22	13	4	15
6	17	2	21	8
1	12	7	16	3

23	20	15	8	25
14	9	24	21	16
19	22	13	4	7
10	5	2	17	12
1	18	11	6	3

23	16	21	8	25
12	7	24	15	20
17	22	13	4	9
6	11	2	19	14
1	18	5	10	3

23	10	5	18	25
14	19	24	11	6
9	22	13	4	17
20	15	2	7	12
1	8	21	16	3

41. As rotas encontradas acima para um quadrado de 25 casas podem também ser dispostas de modo que elas preencham um quadrado de 100 casas, de maneira que a rota se torna reentrante em si mesma. Eis aqui um tal quadrado de 100 casas.

30	41	46	37	32	53	60	67	72	55
47	36	31	40	45	68	73	54	61	66
42	29	38	33	50	59	52	63	56	71
35	48	27	44	39	74	69	58	65	62
28	43	34	49	26	51	64	75	70	57
7	20	25	14	1	76	99	84	93	78
12	15	8	19	24	89	94	77	98	85
21	6	13	2	9	100	83	88	79	92
16	11	4	23	18	95	90	81	86	97
5	22	17	10	3	82	87	96	91	80

onde os números estão dispostos em quatro quadrados, e cada um deles contém a mesma rota.

42. Antes de terminar, acrescentarei ainda algumas outras figuras. Entre os retângulos, o mais simples que o cavalo pode percorrer é do de 12 casas, de largura 3 e comprimento 4. Eis algumas rotas:

10	7	2	5
1	4	9	12
8	11	6	3

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

12	9	6	3
1	4	11	8
10	7	2	5

Mas vemos facilmente que as rotas reentrantes não teriam lugar aqui. Se a largura contém três casas e o comprimento 5 ou 6, é impossível de percorrê-los, mas dando ao comprimento 7 ou mais casas, podemos ter sucesso, embora sem reentrar:

3	8	5	18	15	10	13
6	19	2	9	12	21	16
1	4	7	20	17	14	11

15	18	21	2	5	8	11
20	1	16	13	10	3	6
17	14	19	4	7	12	9

Agora, se damos 4 casas à largura e 5 ou mais ao comprimento, teremos essas rotas:

14	7	20	3	16
19	2	15	8	11
6	13	10	17	4
1	18	5	12	9

16	7	22	3	18	11
23	2	17	12	21	4
8	15	6	19	10	13
1	24	9	14	5	20

20	7	26	13	18	5	24
27	14	19	6	25	12	17
8	21	2	15	10	23	4
1	28	9	22	3	16	11

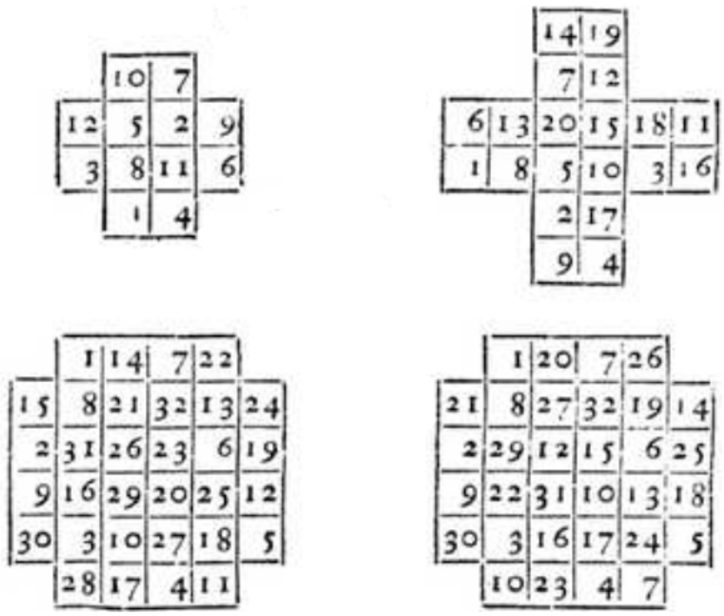
43. Até aqui as rotas reentrantes em si mesmas não podem ter lugar, mas dando 5 casas à largura e 6 ao comprimento, podemos também satisfazer a condição, assim como em todos os outros retângulos onde o número de casas é par, desde que não haja menos do que 5 casas em um lado. Eis alguns exemplos:

3	20	13	24	5	18
12	29	4	19	14	25
21	2	23	8	17	6
28	11	30	15	26	9
1	22	27	10	7	16

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

onde a segunda figura é um quadrado de 36 casas, e a rota não só é reentrante em si mesma, como também os números nas casas opostas têm todos a mesma diferença de 18.

44. Mas sem nos limitarmos às figuras retangulares, podemos formar à vontade uma quantidade de outras figuras onde o cavalo pode passar por todas as casas; acrescentarei então algumas que são mais simples e que admitem também rotas reentrantes em si mesmas.



3. Bibliografia

EULER, Leonhard. *Solution d'une question curieuse que ne paroit soumise à aucune analyse.* Berlin: Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 15 (1759) 1766, pp. 310–337. Disponível em <www.eulerarchive.org>. Acesso: 03 de novembro de 2019.

SANDIFER, Edward. *How Euler did it*. MAA Online, April 2006. Disponível em <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-04.pdf>. Acesso: 03 de novembro de 2019.

Frederico José Andries Lopes
Departamento de Matemática – UFMT – *Campus* de Cuiabá – Brasil

E-mail: contato@fredlopes.com.br

3. Texto original

310

SOLUTION

D'UNE

QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT
SOUMISE À AUCUNE ANALYSE,

PAR M. EULER.

I.

Je me trouvai un jour dans une compagnie, où, à l'occaſion du jeu d'echecs quelqu'un propoſa cette queſtion: *de parcourir avec un cavalier toutes les caſes d'un échiquier, ſans parvenir jamais deux fois à la même, & en commençant par une caſe donnée.* On mettoit pour cette fin des jettons ſur toutes les 64 caſes de l'échiquier, à l'exception de celle où le Cavalier devoit commencer ſa route; & de chaque caſe où le Cavalier paſſoit conformément à ſa marche, on ôtoit le jetton, de ſorte qu'il s'agiſſoit d'enlever de cette façon ſucceſſivement tous les jettons. Il faloit donc éviter d'un côté, que le cavalier ne revint jamais à une caſe vuide, & d'un autre côté il faloit diriger en ſorte ſa courſe, qu'il parcourut enfin toutes les caſes.

2. Ceux qui croyoient cette queſtion aſſez aiſée firent pluſieurs eſſais inutiles ſans pouvoir atteindre au but; après quoi celui qui avoit propoſé la queſtion, ayant commencé par une caſe donnée, a ſçu ſi bien diriger la route, qu'il a heureuſement enlevé tous les jettons. Cependant la multitude des caſes ne permettoit pas qu'on ait pû imprimer à la mémoire la route qu'il avoit ſuivie; & ce n'étoit qu'après pluſieurs eſſais, que j'ai enfin rencontré une telle route, qui ſatisfit à la queſtion; encore ne valoit-elle que pour une certaine caſe initiale. Je ne me ſouviens plus, ſi on lui a laiſſé la liberté de la choiſir lui-même; mais il a très poſitivement aſſuré qu'il étoit en état de l'éxécuter, quelle que ſoit la caſe où l'on voulut qu'il commençat.

3.

3. Pour éclaircir mieux cette queſtion, j'ajouterai ici une route, où, en commençant par un coin de l'échiquier, on parcourt toutes les caſes:

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	45	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

J'ai marqué ici les caſes par l'ordre des nombres, ſuivant lequel elles ſont ſucceſſivement parcourues. Ainſi le cavalier ayant été poſé dans la caſe 1 ſaute en 2, de là en 3, & depuis en 4, 5, 6, &c. jusqu'à ce que venant enfin dans la caſe 64 il aura paſſé toutes les caſes. Il eſt évident, que cette route ſatisfait également, quand on veut commencer par quelqu'un des autres angles.

4. En retournant par la même route on pourra auſſi commencer par la caſe 64, & de là en paſſant ſucceſſivement par les caſes 63, 62, 61, &c. on parviendra enfin, après avoir parcouru toutes les caſes, à celle du coin 1. Mais cette route ne ſervira de rien, quand on doit commencer par quelque autre caſe: & alors on ſera obligé de chercher par des eſſais une nouvelle route, dont le commencement ſoit dans la caſe donnée. Or on reconnoitra aiſément, qu'une telle ſolution du probleme propoſé ſeroit trop pénible, & ne conviendroit pas au but en vue; ou il s'agit de trouver promtement la route, qu'il faut ſuivre. D'ailleurs une telle recherche ne merite aucune attention, à moins qu'elle ne ſoit fondée ſur quelques principes; ou qu'on ne la puiſſe ſoumettre à quelque eſpece d'Analyſe, qui en dirige les operacions

5. Ce n'eſt auſſi que dans cette vue que j'oſe propoſer mes recherches ſur cette queſtion: auxquelles j'ai été conduit par une idée tou-

toute particuliere, que Mr. Bertrand de Geneve m'a fournie; car, quoiqu'elle ſoit legere en elle-même, & tout à fait étrangere à la Géométrie, elle doit être regardée comme très remarquable, dès qu'on aura trouvé moyen d'y appliquer l'Analyſe. Or je ferai voir qu'elle eſt ſuſceptible d'une analyſe tout particuliere, qui doit mériter d'autant plus d'attention, que cette analyſe demande des raiſonnemens peu uſités ailleurs. On convient aiſément de l'excellence de l'Analyſe, mais on la croit communément bornée à de certaines recherches, qu'on rapporte aux Mathématiques; & partant il ſera toujours fort important d'en faire uſage dans des matieres qui lui ſemblent refuſer tout accès: puisqu'il eſt certain qu'elle renferme l'art de raiſonner dans le plus haut degré. On ne ſauroit donc étendre les bornes de l'Analyſe, ſans qu'on ait raiſon de s'en promettre de très grands avantages.

6. Or d'abord je remarque, qu'on pourroit ſatisfaire à la queſtion, ſi l'on trouvoit une telle route, où la derniere caſe marquée par 64 ſeroit éloignée de la premiere 1 d'un ſaut de cavalier, de ſorte qu'il pourroit ſauter de la derniere ſur la premiere. Car, ayant trouvé une telle route rentrante en elle-même, on pourra commencer par quelque caſe que ce ſoit, & de là continuer la courſe ſuivant l'ordre des nombres jusqu'à la caſe marquée par 64, d'où, en ſautant à celle qui eſt marquée par 1, il acheveroit la courſe jusqu'à retourner à celle d'où il étoit parti. Or voilà une telle route rentrante en elle-même,

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

7.

313

7. Ayant donc bien imprimé à la mémoire une telle route, on ſera en état de ſatisfaire à la queſtion en commençant par une caſe quelconque. Car, ſoit par exemple la caſe marquée par 25, d'où le cavalier doit partir, & on n'aura qu'à le faire marcher ſucceſſivement par les caſes 26, 27, 28 . . . . . jusqu'à 64, d'où paſſant à la caſe 1, il pourſuivra ſa route par les caſes 2, 3, 4, jusqu'à ce qu'il ſoit parvenu à celle qui eſt marquée par 24: & ainſi il aura parcouru toutes les caſes de l'échiquier. J'indiquerai cette route en repréſentant les nombres qui marquent les caſes, en ſorte

25 . . . . 64. 1 24,

& il eſt évident qu'on réüſſira également en commençant par toute autre caſe: ainſi cette diſpoſition

46 . . . . 64. 1 45

ſervira, quand on doit commencer par la caſe 46.

8. Il eſt auſſi évident que la même diſpoſition fournit, pour chaque caſe où l'on doit commencer, une double route: puisqu'on peut également paſſer de la caſe marquée contre l'ordre des nombres jusqu'à celle qui contient 1, & de là ſautant en 64 continuer la courſe par les caſes 63, 62, 61, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à celle où l'on a commencé. Que le nombre 40 indique la caſe d'où il faut partir, & on aura ces deux routes à pourſuivre:

40. 41 . . . . 64. 1. 2 39,

& 40. 39 . . . . 1. 64. 63 41,

où la premiere finit par la caſe 39, & l'autre par 41. Toute autre diſpoſition rentrante en elle-même fournira les mêmes avantages, & il ſuffit d'en ſavoir une ſeule par-coeur: mais on comprendra aiſément, que ce ſeroit un ouvrage extrèmement embarraſſant, que de trouver en tâtonnant par pluſieurs eſſais une telle diſpoſition, & qu'on riſqueroit de n'y réuſſir peut-être jamais.

Mém. de l'Acad. Tom. XV. Ss 9. Je

9. Je m'en vai donc expliquer une méthode certaine, qui nous conduira infailliblement au but proposé, & par le moyen de laquelle on sera en état de découvrir autant de routes satisfaisantes qu'on voudra: car, quoique le nombre de ces routes ne soit pas infini, il sera toujours si grand, qu'on ne le sauroit jamais épuiser. Mais il faut ici distinguer deux especes de routes, l'une qui parcourt simplement toutes les cases de l'échiquier sans que le cavalier puisse sauter de la derniere à la premiere; l'autre espece est celle des routes rentrantes en elles mêmes, où le cavalier, après avoir parcouru toutes les cases, peut sauter de la derniere à la premiere. J'ai donné un exemple de la premiere espece dans le §. 3. & un de la seconde dans le §. 6. l'on peut regarder l'un & l'autre comme trouvé par hazard en tâtonnant; mais la méthode que j'expliquerai, servira à en trouver autant qu'on voudra, tant de l'une que de l'autre espece.

10. Comme il est beaucoup plus difficile de trouver par les seuls essais une route de la seconde espece, je commencerai par donner une méthode, par le moyen de laquelle on pourra, après avoir trouvé une route de la premiere espece, en découvrir non seulement une, mais plusieurs de la seconde espece. Pour cet effet, je remarque d'abord qu'on peut en plusieurs manieres changer la derniere case, celle du commencement demeurant la même. Considérons la route rapportée §. 3. & qu'on marque les cases auxquelles le cavalier pourroit passer de la derniere marquée par 64; or on verra que ces cases sont 63, 31, & 51; dont la premiere, qui renferme le saut déjà employé à 64, n'est d'aucun usage. Mais, puisqu'on peut passer de la case 31 à la case 64, qu'on fasse ce saut après être parvenu de la case 1 par les cases 2, 3, 4, &c. à celle de 31, & depuis qu'on poursuive la route par les cases 64, 63, 62, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à la case 32 qui sera à présent la derniere: cette nouvelle route, sera représentée en sorte

1. 2 . . . . . . 31. 64. 63. . . . . . . 32.

11. De

11. De même, le ſaut de 64 à 51 nous donne à connoitre, qu'on peut paſſer de la caſe 51 à 64: & de là en pourſuivant la route par les caſes 63, 62, &c. la derniere ſera celle qui eſt marquée par 52: cette route entiere ſera donc repréſentée en ſorte:

1. 2 . . . . 51. 64. 63 . . . . 52.

Maintenant, puisque cette derniere caſe 52 fournit un ſaut à la premiere, cette route ſe rapporte à la ſeconde eſpece, & eſt rentrante en elle-même: & c'eſt préciſément la route décrite au §. 6. Quand on ne ſeroit pas encore parvenu à une route rentrante, on pourroit de nouveau transformer celle que nous venons de trouver au §. précédent:

1 . . . . 31. 64 . . . . 32.

où la derniere étant 32, le cavalier en peut ſauter aux caſes 43, 11, 31, 33, ainſi on n'aura qu'à renverſer la partie de cette route compriſe entre l'un de ces nombres & le dernier 32.

12. Le nombre 43 fournira donc cette nouvelle route

1 . . . . 31. 64 . . . . 43. 32 . . . . 42;

où la caſe angulaire 42 eſt la derniere. Le ſecond nombre 11 donnera cette route:

1 . . . . 11. 32 . . . . 64. 31 12,

où la caſe marquée de 12 eſt à préſent la derniere. Le troiſieme nombre 31 rend la routè principale, d'où nous avons tiré ces nouvelles ſavoir

1 . . . . . . 31. 32 64,

& le quatrieme nombre 33 ne change rien dans la route que nous traitons. La route précédente, qui finiſſoit par 12, puisque le cavalier peut ſauter de 12 à ces caſes 59, 41, 11, & 13, fournira ces transformées.

1 . . . . 11. 32 . . . . 59. 12 . . . . 31. 64 61,
1 . . . . 11. 32 . . . . 41. 12 . . . . 31. 64 42,

Ss 2 &

316

& celle-là, puisque 60 conduit aux cases 61, 59, 9, 45, 25, 27, 13, & 53, nous ménera à plusieurs nouvelles routes, où les dernieres cases seront 10, 46, 26, 28, 14, & 54.

13. Voilà donc une source bien riche, d'où l'on peut puiser quantité de nouvelles routes, en ayant une fois trouvé une seule: & le nombre des transformations devient encore plus grand, quand on renverse l'ordre de la premiere route en sorte

64 1,

où la derniere case tenant à 52 fournit cette transformée

64 . . . . . . 52. 1 51

& puisque 51 donne un saut à 64, cette route est rentrante en elle-même, mais elle n'est que la renversée de celle de dessus. Or 51 étant lié avec 64, 52, 54, 56, 26, & 50, fournit ces transformées

64 . . . . 54. 51 . . . . 1. 52. 53
64 . . . . 56. 51 . . . . 1. 52 . . 55
64 . . . . 52. 1 . . . . 26. 51 . . . 27,

& de celles-ci, si l'on veut, on peut encore trouver quantité d'autres: parmi lesquelles on ne manquera pas d'en découvrir qui sont rentrantes en elles-mêmes.

14. Or, en ayant déjà trouvé une, qui est rentrante en elle-même, comme est celle du §. 6. il n'est pas difficile d'en tirer plusieurs autres de même nature: on n'a qu'à arranger les cases en sorte que, tant la premiere que la derniere, se trouve éloignée des bandes, puisqu'alors l'une & l'autre permet 8 sauts. Ainsi, si nous rangeons les nombres de la route §. 6. en sorte

31 . . . . 64. 1 30,

la

la derniere caſe 30 étant jointe à celles-ci: 45, 59, 23, 29, 31, 13, 43, 41, fournit ces transformées

I.	31 . . . . . 45.	30 . . . . 1.	64	46,
II.	31 . . . . . 59.	30 . . . . 1.	64	60,
III.	31 . . . . . 64.	1 . . . . 23.	30	24,
IV.	31 . . . . . 64.	1 . . . . 13.	30	14,
V.	31 . . . . . 43.	30 . . . . 1.	64	44,
VI.	31 . . . . . 41.	30 . . . . 1.	64	42,

où la II. & la IV. ſont rentrantes en elles-mêmes: & tant de celles-ci que des autres on pourra trouver par des transformations ultérieures pluſieurs autres. Comme la III donne

31 . . . . 64. 1 . . . . 13. 24 . . . . 30. 23 14
31 . . 33. 24 . . . 30. 23 . . . . 1. 64 34
31 . . . . 64. 1 . . . . 15. 24 . . . . 30. 23 16

15. Mais, quand on n'a pas encore une route de la premiere eſpece, voyons comment il faut s'y prendre pour en trouver une ſans ſe livrer au ſeul hazard. En commençant par une caſe quelconque, qu'on continue à volonté les ſauts du cavalier auſſi loin qu'on pourra, & qu'on mette dans les caſes qui ſont reſtées vuides, des lettres qui leur ſervent de ſigne, comme dans cette figure:

34	21	54	9	32	19	48	7
55	10	33	20	53	8	31	18
22	35	62	*a*	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	37	2	43	14	27	4	45
1	*b*	13	26	3	44	15	28

Ss 3 Ici

318

Ici j'ai pu continuer la route jusqu'à la caſe marquée par 62, & dans les lettres *a* & *b*.

16. Maintenant, ayant 62 caſes parcourues par le cavalier, je les repréſente de cette maniere

1 62,

& regardant la caſe 62 comme la derniere, je cherche des transformées, qui finiſſent par d'autres caſes, d'où il y ait un paſſage ſur l'une des caſes *a* ou *b*. Or la caſe 62 communique avec celles-ci 9, 53, 59, 61, 23, 11, 55, & 21, d'où nous tirons ces transformées:

I. 1 . . . . 9. 62 . . . . 10, d'où l'on paſſe en *a*

II. 1 . . . . 53. 62 . . . 54, d'où l'on paſſe en *a*

III. 1 . . . . . . 59. 62 . . 60

IV. 1 . . . . . . 23. 62 24

V. 1 . . . . 11. 62 12

VI. 1 . . . . . . 55. 62 . . . . 56, d'où l'on paſſe en *a*

VII. 1 . . . . . . 21. 62 . . . . . 22.

Donc les routes I, II, & VI, s'étendent déjà jusqu'à la caſe *a*, & il n'y reſte plus vuide que la ſeule caſe *b*, & pour la lier avec les autres on n'a qu'à transformer une de ces trois routes par la même méthode. On opéreroit ſemblablement s'il étoit reſté pluſieurs caſes vuides.

17. Prenons la premiere transformée

1 . . . . 9. 62 . . . . 10. *a*,

dont la derniere caſe *a* conduit à 32, 8, 52, 42, 58, 56, 10, & 54, parmi lesquelles 58 fournit cette transformée

1 . . . . . 9. 62 . . . . . 58. *a*. 10 . . . 57

dont la derniere 57 conduit à la caſe *b*, de ſorte qu'à préſent le cavalier aura parcouru toutes les caſes, ayant commencé ſa courſe en 1, & fini en *b*.

1 . . . . . 9. 62 . . . 58. *a*. 10 . . . . . 57. *b*.

Mais

Mais cette route n'eſt pas rentrante en elle-même. Pour lui procurer cet avantage, cherchons de nouvelles transformées, la derniere *b* conduiſant à ces caſes: 57, 25, 43: dont 25 donne cette transformée

1 . . . . 9. 62 . . . . 58. *a.* 10 . . . . 25. *b.* 57 26,

où la derniere conduit à 37, 25, & 51, & 27. Or aucune ne fournit une route de la ſeconde eſpece. Prenons donc 43.

1 . . . . 9. 62 . . . 58. *a.* 10 . . . . 43. *b* 57 44,

dont la derniere 44 conduit à 43, 51, 29, & 45: dont aucune ne donne immédiatement une route rentrante en elle-même.

18. Il faudra donc paſſer à de nouvelles transformées, & pour que cela ſe puiſſe faire plus aiſément, il ſera bon de préſenter la route trouvée de la premiere eſpece par l'ordre naturel des nombres.

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

où la route étant repréſentée en ſorte

1 64,

& la derniere 64 conduiſant à 63, 31, 49, on aura deux transformées:

I. 1 . . . . 31. 64 32,

II. 1 . . . . 49. 64 50,

car la caſe 63 ne change rien dans la propoſée.

19.

19. Puisqu'il n'y a que deux cases qui aboutissent à la premiere 1, renversons ces deux transformées pour avoir:

I. 32 . . . . . 64. 31 1,
II. 50 . . . . . 64. 49 1,

& maintenant, la derniere 1 conduisant à 2 & 18, nous en tirons ces deux nouvelles:

A. 32 . . . . . 64. 31 . . . . . 18. 1 17,
B. 50 . . . . . 64. 49 . . . . . 18. 1 17,

où la derniere 17 conduisant à 16, 10, 14, 18, nous obtiendrons

C. 32 . . . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . . 10. 17 11,
D. 50 . . . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . . 10. 17 11,
E. 32 . . . . 64. 31 . . . . 18. 1 . . . . 14. 17 15,
F. 50 . . . . 64. 49 . . . . 18. 1 . . . . 14. 17 . . . . 15.

La derniere 11 conduit à 46, 58, 12, 20, 2, 18, 62, 10, & donne

G. 32 . . . 46.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 31.64 . . . 47,
H. 50 . . . 64.49 . . . 46.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . . 45,
I. 32 . . . 58.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 31.64 . . . 59,
K. 50 . . . 58.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 49.64 . . . 59,
L. 32 . . . 64.31 . . . 20.11 . . 17.10 . . . 1.18.19,
M. 50 . . . 64.49 . . . 20.11 . . 17.10 . . . 1.18.19,
N. 32 . . . 64.31 . . . 18.1.2.11 . . . 17.10 . . 3,
O. 50 . . . 64.49 . . . 18.1.2.11 . . . 17.10 . . 3,
P. 32 . . . 62.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 31.64.63,
Q. 50 . . . 62.11 . . . 17.10 . . . 1.18 . . 49.64.63.

20. Or

20. Or E & F dont la derniere 15 conduit à 33, 8, 58, 48, 14, 62, 16, 60, donneront ces transformées:

g.	32 ..	38. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	31. 64 ..	39,
h.	50 ..	64. 49	38. 15 ..	17. 14 ...	1. 18 ...	37,
i.	32 ..	64. 31	18. 1 ...	8. 15 ...	17. 14 ..	9,
k.	50 ..	64. 49	18. 1 ...	8. 15 ...	17. 14 ..	9,
l.	32 ..	58. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	31. 64 ..	59,
m.	50 ..	58. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	49. 64 ..	59,
n.	32 ..	48. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	31. 64 ..	49,
o.	50 ..	64. 49. 48. 15 ..	17. 14 ..	1. 18	47,	
p.	32 ..	62. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	31. 64. 63,	
q.	50 ..	62. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	49. 64. 63,	
r.	32 ..	60. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	31. 64 .. 61,	
s.	50 ..	60. 15 ...	17. 14 ...	1. 18 ...	49. 64 .. 61,	

Mais, parmi toutes ces transformées, il ne s'en trouve pas encore une qui ſoit rentrante en elle-même, mais leurs transformées ultérieures en fourniront aſſez.

21. Prenons la route indiquée par la lettre G, où la derniere caſe 47 communiquant avec celles-ci: 26, 46, 48, 44, 18, 42, 28, 16, les dernieres caſes qu'on aura par ces transformations, ſeront: 27, 11, 47, 45, 19, 43, 29, 17, dont 43 communique avec la premiere 32, & donne par conſéquent cette route rentrante,

32 .. 42. 47 .. 64. 31 .. 18. 1 .. 10. 17 .. 11. 46 .. 43,

laquelle pourra donc être repréſentée en ſorte

1 .. 10. 17 .. 11. 46 .. 43. 32 .. 42. 47 .. 64. 31 .. 18,

Mém. de l'Acad. Tom. XV. Tt &

& marquant les caſes par l'ordre naturel des nombres, on aura cette route rentrante.

30	55	46	9	28	57	40	7
47	12	29	56	45	8	27	58
54	31	10	13	18	41	6	39
11	48	33	42	15	44	59	26
32	53	14	17	34	19	38	5
49	64	51	20	43	16	25	60
52	21	2	35	62	23	4	37
1	50	63	22	3	36	61	24

22. La route indiquée par la lettre H ayant 45 pour ſa derniere caſe, les caſes

communiquantes ſont: 6, 36, 22, 4, 20, 44, 56, 46,

& les dernieres ſeront: 5, 37, 23, 3, 21, 45, 57, 11,

où 57 communique avec la premiere 50, d'où réſulte cette route rentrante:

50 . . 56.45 . . 18.1 . . 10.17 . . 11.46 . . 49.64 . . 57,

qui pourra auſſi être repréſentée en ſorte:

1 . . 10.17 . . 11.46 . . 49.64 . . 57.50 . . 56.45 . . 18,

42	55	26	9	44	57	34	7
25	12	43	56	27	8	45	58
54	41	10	13	18	35	6	33
11	24	19	36	15	28	59	46
40	53	14	17	20	37	32	5
23	64	51	38	29	16	47	60
52	39	2	21	62	49	4	31
1	22	63	50	3	30	61	48

qui ne differe pas beaucoup de la précédente.

23.

23. Les routes indiquées par I & K ayant la derniere caſe 59, on aura

les caſes communiquantes: 54, 6, 58, 56, 10, 60,

les dernieres pour I ſeront: 55, 5, 11, 57, 9, 59,

or les dernieres pour K: 55, 5, 11, 57, 9, 59,

d'où nous tirons encore deux rentrantes, puisque 57 communique tant avec 32 que 50: ſavoir

32 . . 56.59 . . 64.31 . . 18.1 . . 10.17 . . 11.58.57,

50 . . 56.59 . . 64.49 . . 18.1 . . 10.17 . . 11.58.57,

qui pourront être repréſentées en ſorte:

1 . . 10.17 . . 11.58.57.32 . . 56.59 . . 64.31 . . 18,

1 . . 10.17 . . 11.58.57.50 . . 56.59 . . 64.49 . . 18,

De même, les routes L & M finiſſant par 19, on aura

les caſes communiquantes avec 19 - - 30. 18. 44. 20,

de là les dernieres pour L - - - - 29. 19. 45. 11,

- - - - - - pour M - - - - 29. 19. 43. 11,

où il n'y a aucune rentrante. Les routes N & O finiſſant par 3, on aura par rapport à cette derniere:

les caſes communiquantes - - - - 2, 44, 12, 4,

alors la derniere devient pour N - - 11, 45, 13, 3,

- - - - - - - - pour O - - 11, 43, 13, 3,

où il n'y en a point non plus.

24. S'il valoit la peine, on pourroit, en pourſuivant ces transformations, trouver pluſieurs autres routes rentrantes en elles-mêmes, & on ne manqueroit pas de découvrir des moyens pour abréger les opérations, en achevant deux ou pluſieurs à la fois, afin qu'on arrive plutôt au but propoſé. Auſſi n'eſt-ce pas mon deſſein d'aſſigner tou-

Tt 2 tes

tes les routes poſſibles, qui ſoient rentrantes en elles-mêmes, ce qui ſeroit un ouvrage auſſi pénible qu'inutile; & je me contente d'avoir donné une méthode ſure pour trouver autant de routes qu'on voudra; méthodedont l'application n'eſt pas difficile en chaque cas. Mais on peut ajouter à la queſtion principale encore des conditions, qui la rendent plus curieuſe, comme ſi l'on exigeoit, que les nombres qui ſe trouvent dans des caſes oppoſées ayent la même différence, qui doit être 32 comme la moitié du nombre de toutes les caſes. Or chaque caſe en a une, qui lui eſt oppoſée, de ſorte que la ligne droite tirée par les centres de ces deux caſes diviſe le quarré en deux parties égales. On demande donc que les nombres 33, 34, 35, 36 . . . . 64, ſe trouvent à l'oppoſite des nombres 1, 2, 3, 4 . . . . 32.

25. Pour trouver de telles routes diagonales, on n'a qu'à commencer par écrire les nombres 1, 2, 3, 4, &c. conformément à la marche du cavalier, & à meſure qu'on écrit ces nombres, mettre les nombres 33, 34, 35, 36, &c. dans les caſes oppoſées, & pour ſuivre cet arrangement, tant qu'on pourra: comme on peut le voir par la figure ci-jointe

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58
28	11	A	C	*f*	45	32	19
37	50	B	D	*e*	6	59	44
12	27	38	E	*d*	*b*	18	5
51	64	13	F	*c*	*a*	43	60
26	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Ici j'ai pu continuer la ſuite des nombres 1, 2, 3, jusqu'à 19, & celle des nombres 33, 34, 35, jusqu'à 51. Mais en rétrogradant je ſuis paſſé de 1 par 64, 63 jusqu'à 58, & de 33 j'ai pu reculer jusqu'à 26. Douze caſes ſont reſtées vuides que j'ai remplies des lettres A, *a*, B, *b*, C, *c*, D, *d*, E, *e*, F, *f*, diſpoſées par des caſes oppoſées.

26.

26. Nous avons donc deux ſéries ſéparées de caſes, qui ſe ſuivent ſelon la marche du cavalier:

58 . . . . 64. 1 19,
29 . . . . 51.

La caſe 19 aboutiſſant à 6, nous aurons ces transformées, qui pourront être continuées plus loin:

58 . . . 64. 1 . . . 6. 19 . . . 7, *f*, B, *d*, C,
26 . . . . 38. 51 . . . . 39, F, *b*, D, *c*,

Maintenant, la caſe C communiquant aux caſes de la premiere ſuite, 8, 6, *d*, ne fournit pas de nouvelles transformations. Mais retranchons les deux dernieres, & puisqu'il ſuffit de transformer une ſeule ſuite, parce que l'autre en eſt déterminée, prenons la premiere

58 . . . 64. 1 . . . 6. 19 . . . 7, *f*, B,

où B aboutiſſant à 12 donne cette transformée à continuer

58 . . . . 64. 1 . . . 6. 19 . . . 12. B. *f*. 7 . . . 11. D. *c*.

Or *c* étant communicable à 16, on aura

58 . . 64. 1 . . 6. 19 . . 16. *c*. D. 11 . . 7. *f*. B. 12 . . 15. *a*. E,

& l'autre ſuite ſera

26 . . . . 38. 51 . . 48. C. *d*. 43 . . 39. F. *b*. 44 . . 47. A. *e*,

où toutes les caſes ſont compriſes.

37. Maintenant il faut lier ces deux ſuites enſemble, en ſorte que la fin de l'une aboutiſſe au commencement de l'autre. Pour cet effet transformons la premiere dont la fin E communique avec la caſe 62, & la fin devenant alors 63 ſera cohérente avec le commencement de l'autre 26. Cette transformation donne donc:

58 . . 62. E. *a*. 15 . . 12. B. *f*. 7 . . 11. D. *c*. 16 . . 19. 6 . . 1. 64 . . 63
26 . . 30. *e*. A. 47 . . 44. *b*. F. 39 . . 43. *d*. C. 48 . . 51. 38 31

Tt 3 &

326

& on a en même tems une route rentrante en elle-même, & douée de la condition preſcrite:

14	59	42	35	16	31	54	33
41	36	15	58	55	34	17	30
60	13	56	43	18	53	32	7
37	40	19	12	57	6	29	52
20	61	38	25	44	51	8	5
39	64	21	50	11	24	45	28
62	49	2	23	26	47	4	9
1	22	63	48	3	10	27	46

28. Ayant trouvé une ſeule route de cette nature, il eſt aiſé de la transformer en pluſieurs manieres différentes en lui conſervant la même propriété. Car, de quelque maniere qu'on partage la ſuite rentrante des nombres 1 . . . . . . 64 en deux moitiés, l'une contient toujours les caſes oppoſites de l'autre; comme on peut voir par ces biſections:

1 . . . 32	2 33	3 34	4 35
33 . . . 64	34 . . . 64.1	35 . . . 64.1.2	36 . . 64.1 . . 3

où les deux moitiés ſont toujours cohérentes. Maintenant, on n'a qu'à prendre une telle biſection à volonté, & transformer les deux moitiés ſemblablement, jusqu'à ce qu'elles redeviennent cohérentes. Ainſi, prenons la moitié 3 . . . . . . 34 dont le bout 34 communiquant à 7 donne la transformée 3 . . . 7. 34 . . . 8, & par renverſement 8 . . . 34. 7 . . . 3, dont le bout 3 communiquant à 24 donne

8 . . . . 24.3 . . . . . 7.34 25,

& l'autre moitié ſera

40 . . . . 56.35 . . . . 39.2.1.64.1 . . 57,

qui

327

qui ſont cohérentes par leurs bouts 25, 40, & 8, 57. Nous pourrons donc repréſenter en ſorte cette nouvelle route:

1. 2. 39 . . . . 35. 56 . . . . 40. 25 32,
33. 34. 7 . . . . 3. 24 . . . . 8. 57 . . . . 64.

29. La même moitié 3 . . . . . 34, puisque le premier bout 3 communique à 24, donne par la transformation:

23 . . . . 3. 24 34,

& 34 communiquant à 7 donne

23 . . . . 7. 34 . . . . 24. 3 6,

& l'autre moitié ſera

55 . . . . 39. 2. 1. 64 . . 56. 35 38,

qui eſt cohérente. Par conſéquent nous aurons une route repréſentée par ces deux moitiés:

1. 2. 39 . . . 55. 6 . . . 3. 24 . . . 32,
33. 34. 7 . . . 23. 38 . . . 35. 56 . . . 64.

La moitié 4 . . . . . . 35, à cauſe de la communication du bout 35 avec 18, donne

4 . . . . . . 18. 35 19,

qui eſt déjà cohérente avec

36 . . . . . 50. 3 . . . 1. 64 . . . 51,

d'où nous tirons cette route:

1 . . . 3. 50 . . . . . 36. 19 32
33 . . . 35. 18 . . . . . 4. 51 64,

& d'autres transformations de la même moitié donnent

1 . . . 3. 50 . . . 43. 36. 19 . . . 23. 10 . . . 5. 24 . . . 32
33 . . . 35. 18 . . . 11. 4. 51 . . . 55. 42 . . . 47. 56 . . . 64.

30.

30. Voilà donc 4 autres routes, qui ont la même propriété que celle du §. 27.

50	59	22	7	48	31	10	33
23	6	49	58	9	34	47	30
60	51	8	21	46	11	32	35
5	24	45	52	57	36	29	12
44	61	4	25	20	13	56	37
3	64	43	14	53	40	19	28
62	15	2	41	26	17	38	55
1	42	63	16	39	54	27	18

42	59	6	55	44	31	18	33
5	54	43	58	19	34	45	30
60	41	56	7	46	17	32	35
53	4	47	40	57	20	29	16
48	61	52	25	8	15	36	21
3	64	49	14	39	24	9	28
62	13	2	51	26	11	22	37
1	50	63	12	23	38	27	10

40	59	12	35	38	31	54	33
13	18	39	58	55	34	37	30
60	41	56	11	36	53	32	47
17	14	19	42	57	48	29	52
20	61	16	25	10	51	46	49
15	64	21	4	43	24	9	28
62	5	2	23	26	7	50	45
1	22	63	6	3	44	27	8

40	59	50	35	38	31	48	33
51	12	39	58	49	34	37	30
60	41	56	11	36	47	32	21
55	52	13	42	57	22	29	46
14	61	54	25	10	45	20	23
53	64	15	4	43	24	9	28
62	5	2	17	26	7	44	19
1	16	63	6	3	18	27	8

31. A cette condition des cases opposées on peut encore ajouter celle-ci, que la premiere moitié des nombres 1 . . . . . 32 rem-

rempliſſe ſeule la moitié du quarré, en partageant le quarré par un ligne parallele à un côté

								33	
α	1	*a*	*b*	28	7	14	19	16	ϐ
	24	27	8	*c*	20	17	6	13	
	9	2	25	22	11	4	15	18	
	26	23	10	3	*d*	21	12	5	

en ſorte que les nombres 1 . . . . . . 32 ſe trouvent tous au deſſous de la ligne αϐ, & les autres 33 . . . . 64 au deſſus. Il faut donc que l'unité ſe trouve près de la ligne αϐ, afin qu'elle puiſſe communiquer avec le nombre 64 qui ſe trouve au deſſus.

32. Commençons donc par mettre l'unité à une telle caſe quelconque, & en vertu de l'oppoſition la caſe du nombre 33 ſera auſſi déterminée: & il faudra faire en ſorte qu'elle communique avec celle qui contiendra le nombre 32 au deſſous de la ligne αϐ. En eſſayant une telle diſpoſition je ſuis parvenu jusqu'au nombre 28, & j'ai écrit dans les caſes vuides les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, pour l'arrangement desquelles je fais les transformations ſuivantes. La ſuite 1 . . . . . . 28, puisque 28 aboutit à 27, 25, 11, 17, donne ces transformées:

I. 1 . . . . 25.28 . . . . 26;
II. 1 . . . . 11.28 . . . . 12;
& III. 1 . . . . 17.28 . . . . 18;

dont aucune ne s'étend à une des caſes vuides. Mais après pluſieurs transformations on parvient à celle-ci, qui comprend toutes les caſes,

1 . . . 8.23 . . 21.18 . . 20.*b*.24 . . 28.17 . . 9.*a*.*c*.*d*.

Mém. de l'Acad. Tom. XV. Vv qui

330

qui ſe transforme enfin en celle-ci:

1 . . . . 8.23 . . 21.18 . . 20.*b*.24 . . 28.17 . . 15.*d*.*c*.*a*.9 . . . 14,

dont la fin 14 communique avec le commencement 33 de l'autre moitié au deſſus de la ligne $\alpha\beta$: & la fin de celle-ci 64 communiquera d'elle-même avec la caſe 1.

33. Voici donc cette route repréſentée en ſon entier

	37	62	43	56	35	60	41	50	
	44	55	36	61	42	49	34	59	
	63	38	53	46	57	40	51	48	
	54	45	64	39	52	47	58	33	
α	1	26	15	20	7	32	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	6	31	
	27	2	17	10	29	4	23	12	
	18	9	28	3	24	11	30	5	

& il eſt non ſeulement aiſé d'en trouver par la même méthode pluſieurs autres, mais on peut auſſi transformer celle-ci en pluſieurs manieres: dont voici quelques unes:

7 . . . . 1.8 32

7 . . . . 1.8 . . . 25.32 26

15 . . . 10.7 . . . 1.8.9.16 . . . 21.24 . . . . 32.23.22,

qu'on peut encore renverſer, de même que la primitive, en la repréſentant en ſorte

32 1

34. Voilà

34. Voilà donc encore quelques routes de cette eſpece:

	35	62	43	56	37	60	41	50	
	44	55	36	61	42	49	38	59	
	63	34	53	46	57	40	51	48	
	54	45	64	33	52	47	58	39	
α	7	26	15	20	1	32	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	2	31	
	27	6	17	10	29	4	23	12	
	18	9	28	5	24	11	30	3	

	35	60	43	56	37	62	41	50	
	44	55	36	61	42	49	38	63	
	59	34	53	46	57	40	51	48	
	54	45	58	33	52	47	64	39	
α	7	32	15	20	1	26	13	22	β
	16	19	8	25	14	21	2	27	
	31	6	17	10	29	4	23	12	
	18	9	30	5	24	11	28	3	

	41	60	37	54	43	58	47	50	
	36	63	42	59	38	49	44	57	
	61	40	53	34	55	46	51	48	
	64	35	62	39	52	33	56	45	
α	13	24	1	20	7	30	3	32	β
	16	19	14	23	2	21	8	29	
	25	12	17	6	27	10	31	4	
	18	15	26	11	22	5	28	9	

	62	37	56	41	60	35	54	47	
	57	42	61	36	55	48	51	34	
	38	63	44	59	40	53	46	49	
	43	58	39	64	45	50	33	52	
α	20	1	18	13	32	7	26	11	β
	17	14	21	8	27	12	31	6	
	2	19	16	23	4	29	10	25	
	15	22	3	28	9	24	5	30	

35. Jusqu'ici j'ai conſidéré la queſtion telle qu'elle avoit été propoſée pour l'échiquier ordinaire diviſé en 64 caſes. Or comme ce nombre eſt trop grand, pour qu'on puiſſe concevoir toutes les variétés qui y peuvent avoir lieu, il ſera bon de conſidérer auſſi quelques figures plus ſimples, qui contiennent un moindre nombre de caſes que le cavalier d'echec doive parcourir. Or d'abord il eſt évident, que, ni un quarré de 4, ni un de 9 caſes n'y eſt propre: mais on verra

Vv 2 qu'on

332

qu'on ne ſauroit réuſſir non plus dans un quarré de *16* caſes. Car, de quelque maniere qu'on s'y prenne, il reſtera toujours une caſe angulaire vuide; & on s'appercevra bientôt, que toutes les transformations qu'on puiſſe faire, ne ſont pas capables de la remplir. Il eſt clair qu'on devroit commencer, & finir par un coin: & partant deux des quatre caſes du milieu ſeront d'abord remplies, & les deux autres devroient être gardées jusqu'à la fin, ce qui ne ſe peut pas.

1	8	13	10
14	11	4	7
5	2	9	12
	15	6	3

36. Le premier quarré donc que le cavalier puiſſe parcourir eſt celui de 25 caſes, qu'on pourra remplir moyennant les mêmes regles, en cas qu'on ne réuſſiſſe point au premier eſſai. Or la marche du cavalier produit toujours cette propriété, que les nombres pairs & impairs ſe ſuivent alternativement, comme on peut voir par toutes les figures rapportées jusqu'ici. D'où il eſt évident, que la derniere caſe contenant 25 ne ſauroit jamais communiquer avec la premiere 1: & partant il eſt impoſſible de trouver une route rentrante en elle-même dans le quarré de 25, ni dans aucune autre figure, qui contient un nombre impair de caſes. On comprend de là auſſi, qu'on ne ſauroit jamais commencer par une caſe qui contient un nombre pair; car, de quelque maniere qu'on transforme cette route, les nombres pairs tomberont toujours dans les mêmes caſes, & les caſes angulaires contiendront des nombres impairs. Dans ce quarré de 25 il eſt auſſi clair, qu'il faut abſolument ou commencer ou finir par une caſe angulaire.

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

37. Mais voyons auſſi les transformations, qu'on peut tirer de cette route 1 . . . . . 25 trouvée du quarré de 25 caſes.
Or

Or la derniere communiquant aux cases 20, 10, 16, 22, 12, 18, 24, 14, fournit ces transformées:

I.	1 . . . 20.25 . . . 21;	II.	1 . . . 10.25 . . . 11;
III.	1 . . . 16.25 . . . 17;	IV.	1 . . . 22.25 . . . 23;
V.	1 . . . 12.25 . . . 13;	VI.	1 . . . 18.25 . . . 19;
VII.	1 . . . . 25;	VIII.	1 . . . 14.25 . . . 15.

Donc, commençant par la case angulaire, on peut finir par quelcune de ces cases 21, 11, 17, 23, 13, 19, 25, 15. Mais la premiere donne encore ces transformées,

a. 1 . . 6.21 . . 25.20 . . 7; *b*. 1.2.21 . . . 25.20 . . . 3,

& les autres celle-ci:

c. 1.2.11 . . 25.10 . . 3; *d*. 1 . . 8.11 . . 25.10.9,
e. 1 . . 4.17 . . 25.16 . . 5; *f*. 1 . . 8.17 . . 25.16 . . 9,
g. 1 . . 4.23 . . 25.22 . . 4; *h*. 1.2.23 . . 25.22 3,
i. 1 . . 6.13 . . 25,12 . . 7; *k*. 1.2.13 . . 25.12 3,
l. 1 . . 6.19 . . 25.18 . . 7; *m*. 1 . . 4.19 . . 25.18 . . 5,
n. 1 . . 6.15 . . 25.14 . . 7; *o*. 1 . . 8.15 . . 25.14 . . 9,

où les dernieres cases sont 3, 5, 7, 9.

38. Puisque les cases angulaires 3, 5, 7, ne communiquent qu'à deux autres, elles ne fournissent point par notre méthode de nouvelles transformées. Considérons donc celles qui finissent par 9, & nous tirerons ces transformées,

p. 1 . . 4.9.10.25 . . 11.8 . . 5; *q*. 1 . . 8.11 . . 24.9.10.25,
r. 1 . . 4.9 . . 16.25 . . 17.8 . . 5; *s*. 1 . . 8.17 . . 24.9 . . 16.25,
t. 1 . . 4.9 . . 14.25 . . 15.8 . . 5; *u*. 1 . . 8.15 . . 24.9 . . 14.25.

Maintenant ces nouvelles routes qui finissent par 25, nous conduisent à d'autres transformées: & nous parviendrons à plusieurs autres

Vv 3 rou-

routes qui finiſſent par quelqu'une des caſes qui ſont marquées des nombres impairs: d'où l'on voit qu'en commençant par la caſe angulaire 1, on peut finir par quelque caſe marquée d'un nombre impair qu'on voudra; & cela en pluſieurs manieres différentes. Enſuite, chaque route pouvant être renverſée, le nombre de toutes les routes poſſibles deviendra extrèmement grand.

39. Ici on peut encore ajouter cette condition, que les nombres qui ſe trouvent en deux caſes oppoſées, faſſent partout la même ſomme, ſavoir 26. Il faut donc que la premiere & derniere caſes ſe trouvent en des angles oppoſés; & pour trouver une telle route, on n'à qu'à commencer à remplir le quarré, & mettre à l'oppoſite de chaque nombre ſon complément à 26; & continuer auſſi loin qu'on pourra. Mais, puiſqu'on ſait que la caſe du milieu doit contenir 13, on ne ſauroit preſque manquer: & alors, en conſervant la même propriété, on en peut tirer pluſieurs formes différentes: dont voici quelques unes.

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

I. 1 . . . . 4.11 . . . 5.14.$\underline{13}$.12.21 . . . 15.22 . . . 25,
II. 1 . . . . 4.7 . . 5.14 . . 18.$\underline{13}$.8 . . 12.21 . . 19.22 . . . 25,
III. 1 . . . . 4.21 . . . . 14.$\underline{13}$.12 . . . . . . 5.22 . . . 25,
IV. 1 . . . . 5.14 . . . . 20.$\underline{13}$.6 . . . . . . 12.21 . . . 25,
V. 1 . . 4.11.12.21 . . 16.$\underline{13}$.10 . . . . 5.14.22 . . . 25,
VI. 1 . . 4.7 . . . 12.21.20.$\underline{13}$ 6.5.14 . . . 19.22 . . . 25,
VII. 1 . . 4.21.12 . . . . . 6.$\underline{13}$.20 . . . . 14.5.22 . . . 25.

40. Dans toutes ces variations, tant les quatre premiers nombres 1 . . . 4, que les quatre derniers 22 . . . 25, avec celui du milieu 13, demeurent invariables, de ſorte que les variations ne s'étendent que ſur les autres. D'où il ſemble auſſi, que la route trouvée avec

avec les 7 variations épuiſent entierement cette eſpece: voici donc toutes ces 8 routes repréſentées à la fois.

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
12	7	2	15	20
1	16	21	8	3

23	18	11	6	25
10	5	24	17	12
19	22	13	4	7
14	9	2	21	16
1	20	15	8	3

23	12	7	16	25
6	17	24	21	8
11	22	13	4	15
18	5	2	9	20
1	10	19	14	3

23	8	21	16	25
20	15	24	7	12
9	22	13	4	17
14	19	2	11	6
1	10	5	18	3

23	10	19	14	25
18	5	24	9	20
11	22	13	4	15
6	17	2	21	8
1	12	7	16	3

23	20	15	8	25
14	9	24	21	16
19	22	13	4	7
10	5	2	17	12
1	18	11	6	3

23	16	21	8	25
12	7	24	15	20
17	22	13	4	9
6	11	2	19	14
1	18	5	10	3

23	10	5	18	25
14	19	24	11	6
9	22	13	4	17
20	15	2	7	12
1	8	21	16	3

41. Les routes trouvées ci-deſſus pour un quarré de 25 caſes ſe peuvent ainſi diſpoſer qu'elles rempliſſent un quarré de 100 caſes, en ſorte que la route devienne rentrante en elle-même. Voici un tel quarré de 100 caſes.

30	41	46	37	32	53	60	67	72	55
47	36	31	40	45	68	73	54	61	66
42	29	38	33	50	59	52	63	56	71
35	48	27	44	39	74	69	58	65	62
28	43	34	49	26	51	64	75	70	57
7	20	25	14	1	76	99	84	93	78
12	15	8	19	24	89	94	77	98	85
21	6	13	2	9	100	83	88	79	92
16	11	4	23	18	95	90	81	86	97
5	22	17	10	3	82	87	96	91	80

où les nombres ſont diſpoſés en quatre quartiers, dont chacun contient la même route.

42.

42. Avant que de finir, j'ajouterai encore quelques autres figures, & parmi les rectangulaires, la plus ſimple que le cavalier puiſſe parcourir, eſt de 12 caſes, la largeur contenant 3, & la longeur 4, dont voici quelques routes:

10	7	2	5
1	4	9	12
8	11	6	3

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

12	9	6	3
1	4	11	8
10	7	2	5

Mais on voit aiſément, que des routes rentrantes ne ſauroient ici avoir lieu. Si la largeur contient trois caſes, & la longueur 5 ou 6, il eſt impoſſible de les parcourir: mais, donnant à la longueur 7 ou pluſieurs caſes, on pourra réuſſir, pourtant ſans rentrer:

3	8	5	18	15	10	13
6	19	2	9	12	21	16
1	4	7	20	17	14	11

15	18	21	2	5	8	11
20	1	16	13	10	3	6
17	14	19	4	7	12	9

Or, ſi nous donnons 4 caſes à la largeur, & 5 ou pluſieurs à la longueur, on aura ces routes:

14	7	20	3	16
19	2	15	8	11
6	13	10	17	4
1	18	5	12	9

16	7	22	3	18	11
23	2	17	12	21	4
8	15	6	19	10	13
1	24	9	14	5	20

20	7	26	13	18	5	24
27	14	19	6	25	12	17
8	21	2	15	10	23	4
1	28	9	22	3	16	11

43. Jusqu'ici les routes rentrantes en elles-mêmes ne peuvent pas avoir lieu; mais, donnant 5 caſes à la largeur, & 6 à la longueur, on pourra auſſi remplir cette condition, de même que dans tous les autres rectangles, dont le nombre des caſes eſt pair, pourvu qu'il n'y ait pas moins de 5 caſes dans un côté. En voici des exemples:

3	20	13	24	5	18
12	29	4	19	14	25
21	2	23	8	17	6
28	11	30	15	26	9
1	22	27	10	7	16

30	21	6	15	28	19
7	16	29	20	5	14
22	31	8	35	18	27
9	36	17	26	13	4
32	23	2	11	34	25
1	10	33	24	3	12

où

où cette autre figure eſt un quarré de 36 caſes, & la route eſt non ſeulement rentrante en elle-même, mais les nombres dans les caſes oppoſées ont partout la même différence de 18.

44. Mais, ſans ſe borner aux figures rectangulaires, on peut former à volonté quantité d'autres figures, où le cavalier peut paſſer par toutes les caſes: dont j'ajouterai quelques unes, qui ſont plus ſimples, & qui admettent même des routes rentrantes en elles-mêmes.

	10	7	
12	5	2	9
3	8	11	6
	1	4	

		14	19		
		7	12		
6	13	20	15	18	11
1	8	5	10	3	16
		2	17		
		9	4		

	1	14	7	22	
15	8	21	32	13	24
2	31	26	23	6	19
9	16	29	20	25	12
30	3	10	27	18	5
	28	17	4	11	

	1	20	7	26	
21	8	27	32	19	14
2	29	12	15	6	25
9	22	31	10	13	18
30	3	16	17	24	5
	10	23	4	7	