Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 21, nº 42 – pp. 229–274
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

TRADUÇÃO DO TEXTO "RÉFLEXIONS ET ECLAIRCISSEMENS SUR LES NOUVELLES VIBRATIONS DES CORDES EXPOSÉES DANS LES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE 1747 & 1748", DE DANIEL BERNOULLI

Oscar João Abdounur
Universidade de São Paulo – USP – Brasil

Glauco Aparecido de Campos
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Brasil

(aceito para publicação em setembro de 2021)

Resumo

Este artigo apresenta uma tradução do texto *Réflexions et Eclaircissemens sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748* do estudioso Daniel Bernoulli (1700–1782), publicado nas *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* em Berlim. Este texto fora escrito em resposta às memórias *De vibratione chordarum exercitatio (1748)* de Leonhard Euler (1707–1783) *e Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration (1747)*, de Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), trabalhos que também foram publicados nas *Mémoires* da academia mencionada. Em contrapartida ao tratamento matemático apresentado por Euler e d'Alembert, Bernoulli procura construir uma justificativa para a percepção dos sons ouvidos simultaneamente ao som principal de uma corda vibrante, por meio da sobreposição dos modos de vibração de uma corda qualquer, dando continuidade a uma acirrada disputa sobre a questão. Em tal abordagem, é fundamental ressaltar que Bernoulli mantém continuamente um sentido físico para as teorizações dos sons simultâneos por ele estabelecidos e inferências delas decorrentes.

Palavras-chave: Cordas vibrantes, abordagem física, harmônicos, história da acústica

TRANSLATION OF THE TEXT "RÉFLEXIONS ET ECLAIRCISSEMENS SUR LES NOUVELLES VIBRATIONS DES CORDES EXPOSÉES DANS LES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE 1747 & 1748", BY DANIEL BERNOULLI

Abstract

This article presents a translation of the text *Réflexions et Eclaircissemens sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748* written by the scholar Daniel Bernoulli (1700–1782), published in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* in Berlin. It was written as an answer to the memoirs *De vibratione chordarum exercitatio* (1748) de Leonhard Euler (1707–1783) and *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration* (1747), de Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), two works which were also published in the *Mémoires* of the academy mentioned above. In contrast to the mathematical approach presented by Euler and d'Alembert, Bernoulli seeks to build a justification to the perception of the sounds listened simultaneously with the main sound of a vibrating string, via superposition of vibration modes of an arbitrary string, carrying on to a tough dispute about the issue. In this approach, it is fundamental to point out that Bernoulli mantains a physical meaning to the theorizations of the simultaneous sounds established by him and inferences resulted by them.

Keywords: Vibration strings, physical approach, overtones, history of acoustic.

Apresentação

Uma evidência representativa da abordagem física referente à percepção dos sons percebidos simultanemente se dá quando Euler critica argumentos físicos de Bernoulli, por exemplo, opondo-se ao fato de que o enésimo harmônico de uma corda deveria ser uma senoide[1], o que Euler considerava uma particularização. Fundamentado em Taylor, Bernoulli concebia um harmônico como uma senoide (companheira de uma cicloide extremamente alongada), ainda por que ele não compreendia em que sentido outras curvas poderiam ser admitidas. A abordagem citada é talvez a razão pela qual Bernoulli vê a necessidade de responder aos textos dos estudiosos mencionados.

As tentativas de Bernoulli de racionalizar os harmônicos[2] tendo por base a corda vibrante parece permitir a ele a possibilidade de conceber tais sons para qualquer corpo sonoro, que, portanto, possui uma infinidade de sons e uma infinidade de maneiras correspondentes de fazer vibrações regulares. O tipo de inferência mencionado (analogia) é bastante recorrente na argumentação utilizada por Bernoulli no presente texto.

[1] DARRIGOL, 2007, p. 361.

[2] Na realidade, Bernoulli não utilizava este termo, mas optamos por utilizá-lo nesta introdução para a facilitar a compreensão.

Bernoulli trata a composição de sons distintos de maneira semelhante com que trata a composição de harmônicos de um som, estabelecendo uma analogia entre a percepção de fontes sonoras distintas em um concerto com o quanto os respectivos harmônicos de tais fontes não se impedem. Com isso, Bernoulli está concebendo o que a historiografia costuma chamar de princípio da superposição.

Do ponto de vista estilístico, Bernoulli apresenta seu texto muitas vezes com frases mais espontâneas, o que por um lado dificulta a apreensão do encadeamento lógico subjacente ao texto, mas por outro favorece a compreensão da natureza heurística do pensamento deste estudioso do século XVIII. Na presente tradução, optamos por respeitar ao máximo a estilística/estrutura do texto, fazendo as mínimas mudanças suficientes para dar sentido ao texto em português.

Bibliografia

BERNOULLI, Daniel. 1753. Réfléxions et Eclaircissemens sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les Mémoires de l'Academie de 1747 & 1748. In: *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, **tom. IX**. 147–172.

DARRIGOL, Olivier. 2007. The acoustic origins of harmonic analysis. In: *Archive for history of exact sciences*, **vol. 61, n° 4**. 343–424.

TRUESDELL, Clifford. 1960. The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788. In: *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, **vols. X e XI, Ser. 2**.

Oscar João Abdounur

Departamento de Matemática – Mat – campus São Paulo- Brasil

E-mail: abdounur@ime.usp.br

Glauco Aparecido de Campos

Instituto Federal de São Paulo – IFSP – campus Bragança Paulista - Brasil

E-mail: glaucodecampos@ifsp.edu.br

Reflexões e esclarecimentos sobre as novas vibrações de cordas expostas nas memórias da Academia de 1747 e 1748

por Daniel Bernoulli

Introdução

I. O sr. Taylor veio a ser o primeiro a conhecer o número de vibrações, que faz em um tempo dado uma corda uniformemente espessa com um comprimento dado, com um peso dado e tensionada por uma força dada. Não seria possível determinar esse número sem conhecer previamente as curvas, que formariam as cordas durante todo o tempo que durariam suas vibrações; foi, portanto, demonstrado, que essa curva seria constantemente a companheira de uma cicloide extremamente alongada, sobre a qual as ordenadas representam o seno dos arcos representados pelas abscissas: também é a meu ver que sob esta forma as vibrações podem se tornar regulares, simples e isócronas, apesar da desigualdade de excursões. Com esta ideia que eu sempre tive, eu só posso estar surpreso de ver nos *Mémoires* dos anos 1747 e 1748 uma infinidade de outras curvas dotadas da mesma propriedade; não me seria necessário menos que os grandes nomes dos srs. d'Alembert e Euler, que eu não posso suspeitar de qualquer desatenção, para examinar se não existiria algum equívoco na agregação de todas estas curvas com aquela do sr. Taylor, e em qual sentido poder-se-ia admiti-las. Eu vi imediatamente, que só se pode admitir esta multitude de curvas num sentido absolutamente impróprio; eu não estimo menos os cálculos dos srs. d'Alembert e Euler, que abarcam certamente tudo que a análise pode ter de mais profundo e mais sublime; mas que mostram ao mesmo tempo, que uma análise abstrata, que se leva em consideração sem qualquer exame sintético da questão proposta, está sujeita a nos surpreender mais do que nos esclarecer. Parece-me que bastaria dar atenção à natureza de vibrações simples das cordas, para prever sem quaisquer cálculos tudo que estes dois grandes geômetras encontraram pelos cálculos mais espinhosos e mais abstratos, com um espírito analítico que permanecesse atento.

II. Notemos inicialmente que, segundo a teoria do sr. Taylor, uma corda tensionada pode formar suas vibrações uniformes de uma infinidade de maneiras, que diferem entre elas para a física, mas que retornam às mesmas na geometria, uma vez que em cada uma dessas maneiras faz-se somente mudar a unidade que serve de medida. Estas diferentes maneiras consistem no número de ventres, que a corda pode formar durante suas vibrações. Quando existe somente um ventre, como na primeira figura[3], as vibrações são mais lentas, elas formam o som fundamental; quando existem dois ventres, e um nó no meio do eixo, as vibrações dobram, e elas formam a oitava do som fundamental; quando a corda forma três, quatro ou cinco ventres, com dois, três ou quatro nós, segundo distâncias mútuas iguais, como nas figuras 3, 4 e 5, as vibrações triplicam, quadruplicam, ou

[3] As figuras se encontram na última página do original francês, após o fim da tradução.

quintuplicam, e formam a décima-segunda, a oitava dupla, ou a terça maior da oitava dupla, relativamente ao som fundamental. Esta multiplicidade vai ao infinito. Em cada espécie[4] destas vibrações, as excursões totais podem ser grandes ou pequenas a critério, dado que as maiores podem ser consideradas extremamente pequenas. A natureza destas vibrações é tal que não somente cada ponto começa e termina cada vibração simples ao mesmo tempo, mas ainda que todos os pontos se colocam após cada meia vibração simples na posição do eixo AB . É necessário considerar todas estas condições como essenciais, e disso decorre imediatamente que há apenas as curvas dadas por Taylor que satisfazem o problema. Mas ao separar estas condições pode-se formar uma infinidade de curvas, que satisfazem alguma condição separadamente; mas eu mostrarei quão pouco seria fundamentado nestes casos recorrer às vibrações isócronas para cada ponto. Estas vibrações são como movimentos recíprocos dos corpos, que descem e sobem alternadamente sobre uma curva; esta curva só pode ser a cicloide, se for requerido que todas as descidas, grandes ou pequenas, sejam isócronas entre elas da mesma forma que as subidas; mas se se quer simplesmente que as vibrações inteiras sejam isócronas entre elas, se pode dar tantas curvas quanto se queira, que satisfazem a este problema; uma vez que eu demonstrei nos *Mémoire* de Petersburgo, que para qualquer que seja a curva de descida dada, pode-se sempre determinar a curva de subida, tal que os dois tempos empregados para a descida e para a subida tomados juntamente resultem numa mesma soma, qualquer que seja a desigualdade existente entre as amplitudes das excursões.

III. Se eu disse que as cordas podem fazer suas vibrações simples de uma infinidade de maneiras, em que as cinco primeiras figuras servem de exemplo, isto não é somente uma verdade abstrata; pode-se fazê-la real, como o exemplo dos trompetes marinhos o mostra suficientemente pelos sons que se tira: as experiências feitas ao se colocar um cavalete em algum dos pontos a , e ao pinçar o pedaço Aa confirmam a mesma coisa; uma vez que elas [as experiências] nos ensinam que se formam nos pontos b , c e d os nós a distâncias iguais, que permanecem em repouso, enquanto todos os outros pontos estão em movimento. Esta multiplicidade infinita de vibrações manifesta-se em todos os corpos sonoros, independentemente da natureza que eles possam ter; é por isso que se pode tirar da trompa, do trompete etc. todos os sons que vão em progressão de números naturais; quer dizer, na mesma progressão dos sons, que se pode tirar de uma única e mesma corda pelas diferentes espécies de vibrações. Ao fechar-se todos os buracos de uma flauta transversal, pode-se pela simples variação de embocadura obter primeiramente o som mais grave ou fundamental, e depois sucessivamente sua oitava, sua décima-segunda, sua oitava dupla, sua décima-sétima maior, que semelhantemente são como 1, 2, 3, 4 e 5, mas não é necessário crer que esta progressão seja geral. Após ter formado uma boa teoria sobre as vibrações de ar nos instrumentos de sopro, eu concluí que que só se poderia tirar de tubos fechados os sons que vão em progressão de números ímpares, a saber, 1, 3, 5, 7 etc., e minha conclusão foi confirmada pela experiência: pois tendo retirado a peça superior de uma flauta transversal e a fechando com a mão, eu tirei primeiramente o som mais grave, e depois reforçando o sopro sua décima-segunda sem

[4] Em relação ao termo espécie, podemos entendê-lo como modo de vibração de uma corda.

passar para a oitava, em seguida a décima-sétima maior, e enfim um tom que não é reconhecido na música, e que se aproximava da vigésima-primeira do som fundamental. Eu não sei se esta propriedade já foi observada por outros; mas ela me parece ainda mais notável, pois talvez seja adequada para explicar em que consistem esses acessos de fácil reflexão e de fácil transmissão dos raios, observados com tanta sagacidade pelo grande Newton. É sobre isto que eu considero fazer um *Mémoire*, na qual eu teria explicado e reduzido [a propriedade] ao cálculo de vibrações de ar formadas nos tubos abertos e fechados, e demonstrado a analogia entre estas vibrações e aquelas do éter, que faz a luz. Eu faço aqui esta observação para provar, que os diferentes sons tirados de um mesmo corpo sonoro não vão sempre na progressão dos números naturais. Mas eu digo mais: estes sons podem ter tal proporção a ponto de não existir qualquer fórmula em quantidade finita que possa exprimi-la; como se pode ver pelos sons, que eu calculei uma outra vez, a saber, aqueles que se podem tirar de uma vara de aço batidas pelos pequenos golpes. Era um problema novo, que demandava muito de circunspecção. Depois de tê-lo resolvido, eu o propus ao sr. Euler, que o deu uma solução perfeitamente conforme a minha, ainda que em princípio incompleta, na medida em que ele tinha omitido a metade dos sons possíveis. Eu o adverti e ele a completou nas atas de Leipzig.

IV. Minha conclusão é, que todos os corpos sonoros contêm em potencial uma infinidade de sons, e uma infinidade de maneiras correspondentes de fazer suas vibrações regulares; enfim, que em cada espécie diferente de vibrações as inflexões das partes do corpo sonoro se fazem de uma maneira diferente. Mas não é dessa multitude de vibrações aplicada a cordas tensas, que os srs. d'Alembert e Euler pretendem falar; ela não era desconhecida ao sr. Taylor: eles multiplicam ao infinito cada espécie [eles argumentam que existem infinitas espécies]; em concordância com cada intervalo entre dois nós vizinhos [existe] uma infinidade de curvas tais que cada ponto começa e conclui ao mesmo instante as vibrações, enquanto que, seguindo a teoria de Taylor, cada dito intervalo deve necessariamente tomar a única curva da companhia da cicloide extremamente alongada [senoide]. Esta contradição aparente entre os também grandes geômetras me parece demandar algum esclarecimento.

V. Observemos, portanto, que a corda AB pode não somente fazer suas vibrações de acordo com a primeira figura, ou a segunda, ou a terceira e assim por diante, mas pode-se fazer ainda uma mistura de todas estas vibrações com todas as combinações possíveis; e, portanto, todas as novas curvas e novas espécies de vibrações dadas pelos srs. d'Alembert e Euler são apenas uma mistura de várias espécies de vibrações taylorianas. Se isto é verdade, eu não saberia aprovar a agregação de todas estas curvas novas; uma vez que a corda, ao se adequar a ela não dá um único tom, mas vários tons ao mesmo tempo. Para perceber a incongruência dessa nova agregação, suponhamos que, no lugar de uma só corda, [tenhamos] por exemplo cinco cordas inteiramente iguais em todos os sentidos, e que a primeira faça as suas vibrações de acordo com a lei da primeira figura; a segunda corda de acordo com a lei da segunda figura, e assim por diante. Supondo que todas estas cordas comecem suas vibrações em um mesmo instante; querer-se-ia chamar estas cinco espécies de vibrações de isócronas entre elas, simplesmente porque elas terminam uma de suas vibrações ao mesmo tempo que a primeira corda termina cada uma das suas? Sem dúvida, uma vez que a segunda corda faz duas vibrações, a terceira três, e assim por diante, enquanto que a primeira corda só faz uma; e que cada corda dá um tom diferente em proporção. Entretanto, tudo que eu acabei de dizer com relação a várias cordas inteiramente iguais, pode e deve ser aplicado a uma única corda.

VI. Efetivamente, todos os músicos concordam, que uma corda longa tocada dá ao mesmo tempo, além de seu tom fundamental, outros tons bem mais agudos; eles observam sobretudo a mistura da décima-segunda e da décima-sétima maior: eles também não observam distintamente a oitava da oitava dupla, isto é somente por causa da bem grande semelhança destes dois tons com o tom fundamental. Aqui está uma prova evidente de que se pode fazer em uma única corda uma mistura de vários tipos de vibrações taylorianas de uma vez. Ouve-se de forma semelhante nos sons de grandes sinos uma mistura de tons diferentes. Se se segurar na metade um bastão de aço, no qual se bate, ouve-se de uma vez uma mistura confusa de vários tons, os quais, sendo apreciados por um músico hábil, encontram-se extremamente desarmoniosos, de maneira que se forma aqui uma concorrência de vibrações, que nunca começam e terminam em um mesmo instante, senão por um grande acaso: de onde se pode ver que a harmonia de sons, que se ouve em um mesmo corpo sonoro de uma vez, não é essencial a esta matéria [harmonia], e não deve servir de princípio para os sistemas de música. O ar não está isento desta multiplicidade de sons coexistentes: ocorre frequentemente que se tira de uma vez dois sons diferentes de um tubo; mas, aquilo que se prova melhor, quão pouco as diferentes ondulações de ar se perturbam, é quanto se ouve distintamente todas as partes de um concerto, e que todas as ondulações causadas por estas diferentes partes formam-se em uma mesma massa de ar sem se perturbar mutuamente, tudo como os raios da luz, que entram em um quarto obscuro através de uma pequena abertura, não se perturbando.

VII. Depois destas observações, será fácil construir uma infinidade de curvas a partir da curva AB com a condição de que cada ponto da corda chegue alguma vez ao mesmo tempo a um ponto de repouso instantâneo, e dar a lei geral para todas estas curvas sem qualquer cálculo preliminar. Comecemos pela combinação das duas primeiras figuras. Suponhamos que a corda faça suas vibrações para formar o som fundamental conforme a primeira figura; esta curva sendo supostamente infinitamente pequena, a corda poderia ainda ser considerada como uma linha reta, e sua curva poderia servir de eixo móvel à curva da segunda figura, a dois ramos; e disso resulta uma nova curva, que preencheria a condição prescrita. Aqui está, portanto, a construção desta nova curva.

VIII. Seja (fig. 6) $AmanB$ a curva da primeira figura: considera-se esta curva como um eixo reto, sobre o qual se constrói $ApaqB$ inteiramente a mesma com relação ao seu eixo curvo que aquela da figura segunda, com relação ao eixo perfeitamente reto AB , e esta curva $ApaqB$ será tal qual se desejava, a mais simples das curvas dadas pelos srs. d’Alembert e Euler.

Como a aplicada [ordenada] maior pm pode ter uma certa razão em relação à aplicada [ordenada] maior ar , está claro que esta curva $ApaqB$ já contém uma infinidade de espécies. Eis aqui as propriedades desta curva $ApaqB$:

(a) Eu digo que a curva ideal $AmanB$ fará suas vibrações com relação ao eixo reto ArB seguindo inteiramente a lei de vibrações simples da primeira figura.
(b) Em seguida, que cada ponto da curva $ApaqB$ terá seu movimento relativo com relação a cada ponto correspondente da curva $AmanB$, o mesmo que o movimento absoluto representado pela segunda figura.
(c) No entanto, cada ponto da segunda figura faz precisamente duas vibrações, enquanto o mesmo ponto faz uma nas vibrações da primeira figura. É necessário portanto que todos os pontos da curva $ApaqB$ terminem suas vibrações alternadas ao mesmo tempo, que aquelas da figura $AmanB$ terminam cada uma de suas.
(d) No início, uma vez que um ponto da curva $ApaqB$ está fora da curva $AmanB$, este mesmo ponto no começo de suas duas vibrações estará dentro desta última curva, que não terá feito uma única vibração, e assim a curva $AmanB$ tendo assumido a situação $Am'a'n'B$, acontecerá que a curva $ApaqB$ assuma a situação $Ap'a'q'B$, e que a curva $Ap'a'q'B$ seja completamente a mesma que ela tinha sido, mudando a ordem dos lados, quer dizer, mesma que $BqapA$, o que faz um caso do belo teorema do sr. Euler.

IX. Da mesma forma que nós combinamos as vibrações da primeira e da segunda figura, nós poderemos combinar as vibrações da primeira figura com aquelas de todas as outras figuras sem exceção até o infinito; todas estas combinações podem subsistir ao mesmo tempo; assim; por exemplo, a curva absoluta $ApaqB$ da sexta figura, poderá ser ainda considerada como uma curva transladada, poder-se-á reparti-la em três partes iguais, e aplicar aí a mesma curva que, na terceira figura, é aplicada ao eixo reto AB . Qualquer que seja a curva absoluta resultante de todas estas combinações feitas a critério, ocorrerá sempre que todos os pontos da curva chegam num mesmo instante ao ponto de repouso instantâneo do lado oposto do eixo, e a curva neste estado será sempre a mesma, em situação oposta, como ela foi no começo, como o diz o sr. Euler.

X. Se se combina as figuras que têm um número de ventres ímpares, estas curvas ainda terão a propriedade de que cada ponto da curva absoluta passe num mesmo instante pelo eixo reto AB , o que se pode fazer consequentemente de uma infinidade de maneiras, mas assim que uma só curva com ventres pares se mistura, isso não acontece mais. Veja lá uma exposição física das novas vibrações de cordas dadas pelos srs. d'Alembert e Euler, e se eu compreendi bem seus enunciados, todas as curvas novas que eles dão, estão incluídas na nossa construção, e são uma simples mistura de várias espécies de vibrações, em que cada uma tomada a parte segue as leis descritas pelo sr. Taylor. Mas me parece que isto só é uma espécie de composição de movimento, que não pode dar qualquer amplificação à teoria do sr. Taylor.

XI. Para melhor compreender a incongruência de uma tal amplificação, nós combinaremos a curva fundamental do sr. Taylor, que é representada pela primeira figura, com a curva anguiforme tayloriana que teria 1001 ventres; resultará uma curva [composta] de número de novas curvas, que terá a propriedade de que todos os pontos começam ao mesmo tempo suas vibrações, passarão todos num mesmo instante pelo eixo reto, e chegarão em um mesmo instante ao ponto de repouso, do outro lado do eixo, para começar um novo movimento semelhante ao precedente. Mas o que ocorre durante este movimento? Eu digo que haverá na corda precisamente 1000 pontos a distâncias pequenas iguais, em que cada um faz uma vibração absolutamente da mesma maneira como se as vibrações se fizessem simplesmente seguindo a lei da primeira figura, enquanto que todos os outros pontos farão 1001 idas e vindas, ou 1001 vibrações, e poderão mesmo passar 1001 vezes o eixo reto. Estas 1001 vibrações serão inteiras e perfeitas; em cada dessas vibrações cada elemento terá um momento de repouso absoluto e perfeito, e um momento no qual sua velocidade seja a maior. Se desejássemos confundir essas pequenas vibrações rápidas com a vibração simples fundamental, unicamente porque a milésima primeira vibração pequena termina ao mesmo tempo em cada ponto, que a vibração fundamental termina, isto seria chamar síncronos dois pêndulos simples, em que um teria um pé de comprimento e o outro 10020001 pés, pois estes dois pêndulos começavam suas vibrações ao mesmo tempo, as terminam também ao mesmo tempo; se poderia mesmo unir estes dois pêndulos, em supondo um corpo extremamente pesado, suspenso por uma corda longa, e um pequeno corpo anexado ao grande por um pequeno fio, poder-se-á sempre obter que o pequeno pêndulo anexado ao grande começa a primeira de suas vibrações e termina a última, ao mesmo tempo que o grande pêndulo começa e termina uma única vibração; mas será que haverá fundamento para chamar estas vibrações de isócronas?

XII. Vejamos ainda se todas as novas curvas encontradas pelo sr. Euler são compreendidas na nossa observação. Para este efeito, será necessário dar uma equação para todas as curvas taylorianas, das quais as cinco primeiras figuras são exemplos. Eu me servirei das denominações do sr. Euler. Seja, portanto, o comprimento da corda $AB=a$; $\pi=$ a semi-circunferência do círculo cujo raio é expresso pela unidade, a maior ordenada no meio de cada ventre para a primeira figura α , para a segunda β , para a terceira γ , para a quarta δ , seja enfim x uma certa abscissa, e y a ordenada para essa abscissa, se terá segundo o sr. Taylor.

para a 1ª figura $y=\alpha sen\,\frac{\pi x}{a}$

para a 2ª figura $y=\beta sen\,\frac{2\,\pi x}{a}$

para a 3ª figura $y=\gamma sen\,\frac{3\,\pi x}{a}$

para a 4ª figura $y=\delta sen\,\frac{4\,\pi x}{a}$ etc.

Portanto, combinando todas estas curvas à imitação da sexta figura, para a qual nós combinamos as duas primeiras figuras, nós teremos geralmente para a mesma abscissa x esta equação:

$$y=\alpha sen\,\frac{\pi x}{a}+\beta sen\,\frac{2\,\pi x}{a}+\gamma sen\,\frac{3\,\pi x}{a}+\delta sen\,\frac{4\,\pi x}{a}\,etc\,.$$

na qual as quantidades α , β , γ , δ etc são arbitrariamente positivas ou negativas.

XIII. Veja lá esta infinidade de curvas encontradas sem qualquer cálculo, e nossa equação é a mesma que aquela do sr. Euler; vide as *Mémoires de l'Academie* para o ano 1748, página 85. É verdade que o sr. Euler, não trata esta multitude infinitamente infinita [infinita] em geral, e que ele somente a dá no §. 30 como casos particulares; mas é sobre isto que eu não estou suficientemente esclarecido: se existe ainda outras curvas, eu não compreendo em que sentido se pode as admitir.

XIV. Se na nossa equação, se supuser os coeficientes dos termos alternados, a saber β , $\delta=0$, ocorrerá, portanto, não somente, que todas as espécies de vibrações terminam ao mesmo tempo que termina a vibração fundamental, mas ainda que todos os pontos da corda se organizam ao mesmo tempo na posição da linha reta AB ; isto não é senão um corolário do nosso §.10. Nesta suposição, a curva obtém um diâmetro que passa pela metade da corda AB e que reparte a curva em dois ramos iguais e semelhantes. Este teorema é, portanto, ainda o mesmo que aquele do sr. Euler do §. 28.

XV. Se após todas as nossas observações querer-se-ia ainda confrontar as vibrações compostas com as vibrações simples expostas pelo sr. Taylor, eu não me oporia; minha intenção não foi senão principalmente a de expor aquilo que as novas vibrações dos srs. d'Alembert e Euler tem de físico. Se ao contrário, encontra-se que estas novas vibrações não saberiam ser consideradas como vibrações simples, que somente faziam o objeto do sr. Taylor, e que estando decompostas em vibrações simples e uniformes, cada espécie se faz simplesmente seguindo a lei de Taylor, estas novas curvas só farão confirmar a teoria de Taylor, quando ele exclui todas as outras curvas e ele admite somente a trocoide prolongada. Mas eu não admiraria menos a profunda sagacidade com a qual nossos dois ilustres geômetras souberam determinar analiticamente estas novas curvas. De resto, eu creio que qualquer curva inicial que se dê à corda, ela não se furtará de fazer suas vibrações quase que imediatamente seguindo a simples uniformidade de movimentos isócronos, e em conformidade com a natureza da trocoide prolongada exposta pelo sr. Taylor, embora o sr. Euler não pareça [compartilhar] deste sentimento no §. 27. Aqui está como eu concebo a coisa. A experiência e a razão nos ensinam, que de duas cordas igualmente grandes e igualmente tensionadas, a mais longa conserva suas vibrações por mais tempo do que a menor, nas cordas pequenas tocadas, o som dura somente um instante. Assim todas as vibrações parciais, misturadas com a vibração total e fundamental, terminarão bem rapidamente, enquanto que a fundamental dura ainda bem sensivelmente, e, portanto, a corda não formará mais do que a trocoide do sr. Taylor. É também isto que nós vemos sempre ocorrer nas cordas pinçadas de um cravo, nas quais se reconhece pelos olhos tal curva uniforme, que só forma um único ventre.

XVI. Pode-se ainda observar acerca desta matéria, que há somente cordas uniformemente espessas suscetíveis de propriedades que nós acabamos de expor; a razão é, que quando as cordas irregularmente espessas se dobram segundo a figura 2, 3, 4, 5 etc. as vibrações não se tornam precisamente 2, 3, 4, 5 etc. vezes mais rápidas que elas são com respeito à primeira figura, e que assim na mistura destas vibrações elas não terminam nunca em um mesmo instante, embora elas tenham todas começado em um mesmo instante. Não existe, portanto, a meu ver uma única curva para as cordas desigualmente espessas, para um número de intersecções dadas ao nosso problema; e se é assim, por que existiria uma infinidade para as cordas uniformemente espessas? Enfim, que se escolha a mistura mais simples, considerando a equação $y=\alpha sen\frac{\pi x}{a}+\beta sen\frac{2\pi x}{a}$, na qual os coeficientes α e β podem ser certas linhas pequenas. Seja o comprimento do pêndulo simples isócrono, com as vibrações uniformes que correspondem à primeira figura (simples) l; o comprimento de um pêndulo semelhante para a segunda figura $\frac{1}{4}l$; ou segundo os srs. d'Alembert e Euler, o pêndulo isócrono para a figura expressa pela equação $y=\alpha sen\frac{\pi x}{a}+\beta sen\frac{2\pi x}{a}$ tem sempre para comprimento a quantidade l; embora este mesmo comprimento é manifestamente $\frac{1}{4}l$ fazendo $\alpha=0$; existiria então aí uma contradição, se estes geômetras não tomassem a palavra isocronismo num outro sentido, que não aquele vinculado a ele ordinariamente.

XVII. Da nossa solução sintética do problema dos srs. d'Alembert e Euler, se vê também sem cálculo a maneira de se determinar a curva absoluta da corda a cada instante, da mesma forma a velocidade de cada ponto: pois, seja a curva inicial expressa por:

$$y=\alpha sen\frac{\pi x}{a}+\beta sen\frac{2\pi x}{a}+\gamma sen\frac{3\pi x}{a}+\delta sen\frac{4\pi x}{a}+etc\,.$$

e seja, por exemplo, a questão de determinar a curva no momento em que o meio da corda passa pelo eixo reto AB: é claro que a curva será expressa neste instante pela relação:

$$y=-\beta sen\frac{2\pi x}{a}+\delta sen\frac{4\pi x}{a}-etc\,.$$

na qual os sinais são alternadamente negativos e positivos. Quanto às velocidades, é igualmente fácil determiná-las pela simples composição de movimento, uma vez que se determina na mecânica a razão de velocidades de cada ponto para cada figura à parte.

XVIII. Eu evitei até aqui os cálculos, e eu fundamentei todo o meu raciocínio sobre o princípio confirmado pela experiência (§. 6.), que pode se fazer uma mistura de vibrações em um único e mesmo corpo sonoro, que sejam absolutamente independentes umas das outras. Considerando cuidadosamente este princípio, ele não é diferente daquele da composição de movimento, entretanto, para atualizá-lo, eu acreditei juntar aqui as reflexões mecânicas, e os cálculos que esta matéria demanda.

XIX. Seja um corpo A (fig. 7) arrastado diretamente em direção a um ponto fixo B ; se se exige que o corpo chegue ao ponto B em um tempo dado, qualquer que seja a distância inicial AB , tem-se que as atrações do corpo A em direção ao ponto fixo B devem ser em cada ponto proporcionais às distâncias dos corpos desde o ponto B . Tem-se mesmo que existe somente esta lei da gravitação que satisfaça à questão, então as meias excursões se tornam de uma parte e de outra perfeitamente iguais. Aí está o verdadeiro isocronismo e o único que deve ser considerado. Suponhamos após isto que, enquanto o corpo A é empurrado com a dita lei em direção ao ponto B , os pontos A e B sofrem em cada instante uma aceleração igual em direção ao ponto C , de modo que o sistema AB sofre uma gravitação comum em direção a C , que seja ainda proporcional às distâncias BC , deste modo obter-se-á um outro isocronismo nas excursões do sistema AB . Após isso, poder-se-á novamente imaginar que os três pontos A , B e C , sofrem em cada instante uma aceleração igual em direção a um quarto ponto D e que esta aceleração comum aos três pontos A , B e C seja sempre proporcional às distâncias do ponto C ao ponto D . Desta maneira, poder-se-á multiplicar ao infinito as gravitações do corpo A em direção a diferentes pontos, e esse corpo A sofrerá desse modo uma mistura de várias espécies de vibrações, que convém examinar.

XX. Qualquer que seja a distância inicial, o corpo A empregará sempre o mesmo tempo para alcançar o ponto B , e para fazer uma semi-vibração; após o que o corpo A fará uma outra semi-vibração, do lado oposto sempre no mesmo momento; ele retornará ainda ao ponto B após um terceiro momento, e assim por diante: em uma palavra, esse movimento relativo ao ponto B fará o mesmo, que se este ponto permanecesse inteiramente em repouso. Eu chamaria estes movimentos recíprocos de vibrações isócronas relativas; e essa distinção das vibrações é bem necessária, pois de fato eles são bem diferentes das vibrações absolutas do mesmo corpo A . Suponhamos que o peso do corpo A em direção ao ponto B seja igual ao peso natural, fazendo a distância do ponto $B=a$; nessa suposição estas primeiras vibrações isócronas relativas serão isócronas com as vibrações absolutas de um pêndulo simples de comprimento a .

Após ter considerado estas primeiras vibrações relativas ao ponto B , nós teremos as mesmas reflexões a fazer sobre as vibrações isócronas do ponto B relativas ao ponto C ; e estas vibrações existirão ao mesmo tempo no corpo A , sem perturbar de qualquer maneira as primeiras vibrações desse corpo. Estas segundas vibrações serão isócronas com aquelas de um pêndulo simples de comprimento b, supondo que o peso do ponto B, ou do corpo A, em direção ao ponto C, se torna igual ao peso natural, onde se faz $BC=b$.

Se se quer juntar a estas duplas vibrações do corpo A uma terceira espécie, será necessário supor uma terceira vibração comum ao sistema precedente ABC em direção ao ponto D, que estará sob denominações isócronas semelhantes com aquelas de um pêndulo simples de comprimento c. Desta maneira se poderá ir tão longe quanto se queira e produzir no corpo A tantas espécies de vibrações isócronas relativas quanto se será proposto. Mas não vamos mais longe, e suponhamos esta terceira vibração absoluta, considerando o ponto D como fixo. Desta maneira o único e mesmo corpo A terá ao mesmo tempo três espécies de vibrações independentes umas das outras, cujos centros de força são os pontos B, C, e D, que nós vamos considerar mais de perto.

XXI. Os tempos das referidas vibrações parciais estarão sob razão dupla [quadrada] das quantidades arbitrárias a, b e c; se estas quantidades são como 4, 9 e 36, os tempos das vibrações serão como 2, 3 e 6; assim, enquanto o ponto C faz uma vibração inteira relativamente ao ponto fixo D, o ponto B fará duas relativamente ao ponto C, e o ponto A fará três relativamente ao ponto B: de onde é claro, que todo o sistema não será retornado ao seu primeiro estado no final de seis vibrações relativas ao ponto B, ou as quatro vibrações relativas ao ponto C ou as duas vibrações relativas ao ponto D. Mas segundo a maneira que os srs. d'Alembert e Euler consideram a coisa, toda esta mistura de vibrações seria apenas duas vibrações simples. Nesse exemplo não acontecerá que os três pontos A, B e C se reúnam ao ponto fixo D. Mas se se supõe as três quantidades arbitrárias $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$, estar em razão de 3, 5, e 15, os tempos de vibração estarão na mesma razão, e os pontos A, B e C se encontrarão reunidos ao ponto D no final de cada semi-vibração do ponto C; deste modo as excursões serão perfeitamente semelhantes e iguais de cada lado do ponto fixo D: mas, na minha opinião, o ponto A deve [ser considerado] fazer cinco semi-vibrações antes que isso aconteça, ao passo que no outro sentido ele deve fazer uma única semi-vibração. Para ver a necessidade de considerar esses movimentos recíprocos em conformidade com a nossa teoria, há que se supor as distâncias arbitrárias iniciais BC, e CD, extremamente pequenas em relação à AB; haverá, portanto, somente as vibrações AB que sejam sensíveis e o corpo A fará manifestamente cinco semi-vibrações antes da junção perfeita dos pontos A, B e C ao ponto D. Mas, se se considerasse as distâncias AB, e BC, como extremamente pequenos com relação à CD, haverá somente as vibrações CD que sejam sensíveis, e o corpo A não poderia mais [ser considerado] ter feito uma única vibração. É necessário portanto evitar aqui todo equívoco nas palavras vibração e isocronismo. Se as quantidades $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$ são incomensuráveis, não poderá jamais acontecer que o sistema retome o seu estado inicial, nem que o corpo A retornaria ao ponto de onde ele tinha partido, uma vez que os pontos A, B e C não terão jamais seus mais compridos alongamentos relativos em um mesmo instante: entretanto cada espécie de vibração relativa se fará separadamente segundo a lei dos pêndulos simples cicloidais. Essa é a fonte da razão que impede de entender a nova teoria dos srs. d'Alembert e Euler a todos os tipos de corda, qualquer lei de desigualdade que possa ter na sua espessura.

XXII. Na aplicação dessas reflexões às cordas vibrantes será necessário supor $b=\frac{1}{4}c$, $a=\frac{1}{9}c$ etc. de sorte que os números de diferentes espécies de vibrações simples estejam em razão de números naturais 1, 2 e 3 etc. começando por aquele do ponto C relativo ao ponto fixo D , em seguida aquele do ponto B relativo ao seu centro de força móvel C , e então aquele do ponto A relativo ao centro de força móvel B .

XXIII. Suponhamos agora a distância inicial $AB=\alpha$, $BC=\beta$, $CD=\gamma$ etc. e que ao final de um tempo dado t a distância AB seja tornada x , a distância $BC=y$, a distância $CD=z$ etc.; seja também a velocidade relativa entre os pontos A e $B=u'$, aquela entre os pontos B e $C=u''$, aquela entre os pontos C e $D=u'''$ etc, ter-se-á

$$du' = \frac{x}{a}\ dt\ e\ u' = \sqrt{\frac{\alpha\alpha - xx}{a}}$$
$$du'' = \frac{y}{b}\ dt\ e\ u'' = \sqrt{\frac{\beta\beta - yy}{b}}$$
$$du''' = \frac{z}{c}\ dt\ e\ u''' = \sqrt{\frac{\gamma\gamma - zz}{c}}$$

Além dessas equações a geometria nos ensina ainda acerca de construções e equações entre o tempo t e as distâncias x , y , z etc. Pois, seja o seno total expresso pela unidade e que se denota por $A.\,cos\,F$ um arco de círculo, cujo raio é um, e cujo cosseno é uma certa quantidade F , poder-se-á exprimir o tempo t por cada uma das equações seguintes

$$t= \sqrt{a}\times A\ .\ cos\ \frac{x}{\alpha}$$
$$t= \sqrt{b}\times A\ .\ cos\ \frac{y}{\beta}$$
$$t= \sqrt{c}\times A\ .\ cos\ \frac{z}{\gamma}$$

Por meio destas equações poder-se-á determinar cada uma das distâncias x , y , z etc pelo mesmo tempo t comum convertendo os sinais; dessa forma ter-se-á

$$x=\alpha\ cos\ A\ .\ \frac{t}{\sqrt{a}}$$
$$y=\beta\ cos\ A\ .\ \frac{t}{\sqrt{b}}$$
$$z=\gamma\ cos\ A\ .\ \frac{t}{\sqrt{c}}$$

Nessas equações é necessário entender por $cos\,A\,\frac{t}{\sqrt{a}}$ o cosseno de um arco de um círculo, que é igual a $\frac{t}{\sqrt{a}}$ e cujo raio é igual à unidade, e assim os outros. Além disso, as quantidades $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, etc. marcam os tempos de um corpo animado pelo peso natural empregado para cair livremente de alturas $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, etc.

Nós determinamos, portanto, cada uma das quantidades x , y , z e etc. pelo mesmo tempo t , e por consequência a distância absoluta do corpo ao último ponto fixo, cuja distância é $x+y+z+etc$. Nós determinamos semelhantemente para cada instante as velocidades relativas u' , u'' , u''' , etc e a velocidade absoluta do ponto A expressa por $u'+u''+u'''+etc$. assim como os elementos de todas essas velocidades.

XXIV. Poder-se-á, no lugar dos tempos expressos por $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, etc. considerar os tempos que respondem a uma vibração simples relativa do ponto A com relação ao ponto B , e depois do ponto B com relação ao ponto C , em seguida do ponto C em relação ao ponto D . Se nós designamos, portanto, esses tempos por θ' , θ'' e θ''' e que π seja a semicircunferência de um círculo que possui por raio a unidade, será necessário supor nas equações do artigo precedente $\sqrt{a}=\frac{\theta'}{\pi}$, $\sqrt{b}=\frac{\theta''}{\pi}$, $\sqrt{c}=\frac{\theta'''}{\pi}$, substituições após as quais todas as quantidades tornam-se manifestamente homogêneas.

Seja, por exemplo, $\theta'=1''$, $\theta''=2''$, $\theta'''=3''$, e seja questão de determinar todas as circunstâncias do movimento fazendo $t=$ um quarto de segundo; eu digo que se terá $x=\alpha\cos A\frac{\pi t}{\theta'}=\alpha\cos A\frac{1}{4}\pi=\alpha\sqrt{\frac{1}{2}}$; $y=\beta\cos A\frac{\pi t}{\theta''}=\beta\cos A\frac{1}{8}\pi=\beta\cos 22°30'$; e $z=\gamma\cos A\frac{\pi}{12}=\gamma\cos 15°$; portanto $x+y+z=$ 0,70710 $\alpha+$ 0,92387 $\beta+$ 0,96592 γ , quantidade [esta] que marca a distância do corpo A ao ponto D após um quarto de segundo de tempo. Ter-se-á, em seguida, $u'=\sqrt{\frac{\alpha\alpha-xx}{a}}=\frac{\alpha}{\sqrt{a}}senA\frac{1}{4}\pi$; $u''=\sqrt{\frac{\beta\beta-yy}{b}}=\frac{\beta}{\sqrt{b}}senA\frac{1}{8}\pi=\frac{\beta}{2\sqrt{a}}senA\frac{1}{8}\pi$, e $u'''=\frac{\gamma}{3\sqrt{a}}senA\frac{1}{}\pi$. Disso resulta para nosso exemplo a velocidade absoluta $u'+u''+u'''=\frac{6\alpha sen\,45°+4\beta sen\,22°30'+2\gamma sen\,15°}{6\gamma a}$.

XXV. Mas, sem nos determos a este tipo de determinações, que não têm muita relação com aquilo que eu propus como principal, examinamos sobretudo sobre quais circunstâncias a velocidade absoluta $u'+u''+u'''$ pode tornar-se 0 , nos restringindo às três espécies de vibrações simples juntamente misturadas. Será necessário para este efeito, em virtude do §. 23, fazer $\sqrt{\frac{\alpha\alpha-xx}{a}}+\sqrt{\frac{\beta\beta-yy}{b}}+\sqrt{\frac{\gamma\gamma-zz}{c}}=0$, substituímos para x , y ,e z seus valores em t , e nós teremos $\frac{\alpha}{\sqrt{a}}senA\frac{t}{\sqrt{a}}+\frac{\beta}{\sqrt{b}}senA\frac{t}{\sqrt{b}}+\frac{\gamma}{\sqrt{c}}senA\frac{t}{\sqrt{c}}=0$. Eu me proponho a determinar o valor de t , que satisfaça a essa equação em algum exemplo particular. Nós suporemos, portanto, θ''' ou $\pi\sqrt{c}=2\theta''$ ou $2\pi\sqrt{b}=3\theta'$ ou $3\pi\sqrt{a}$, quer dizer nós suporemos, que, enquanto o ponto C faz uma vibração para o ponto fixo D, o ponto B faça duas para o ponto C, e o ponto A faça três para o ponto B, suposição que demanda $\sqrt{c}=2\sqrt{b}=3\sqrt{a}$. A nossa expressão acima dará

$$3\,\alpha sen A\,\frac{3\,t}{\sqrt{c}}+2\,\beta sen A\,\frac{2\,t}{\sqrt{c}}+\gamma sen A\,\frac{t}{\sqrt{c}}=0\,.$$

Seja agora $A\,\frac{t}{\sqrt{c}}=q$, e ter-se-á $sen A\,\frac{2\,t}{\sqrt{c}}$, quer dizer o seno do arco duplo $2\,q\,\sqrt{(1-qq)}$ e $sen A\,\frac{3\,t}{\sqrt{c}}=3\,q-4\,q^3$, e a expressão de cima nos fornece

$$3\,\alpha\left(3\,q-4\,q^3\right)+2\,\beta\times 2\,q\,\sqrt{(1-qq)}+\gamma q=0$$

ou

$$9\,\alpha-12\,\alpha qq+4\,\beta\,\sqrt{(1-qq)}+\gamma=\ 0$$

Pela primeira destas equações já se vê que se pode fazer $q=sen A\,\frac{t}{\sqrt{c}}=0$, o que fornece $z=\gamma\,cos\,A\,\frac{t}{\sqrt{c}}=\pm\gamma$; $y=\beta\,cos\,A\,\frac{t}{\sqrt{b}}=\beta\,cos\,A\,\frac{2\,t}{\sqrt{c}}=\beta$, e $x=\pm\alpha$, e por consequência $x+y+z=\pm\alpha+\beta\pm\gamma$. Este é o caso que se oferece; mas existem ainda outros indicados para a segunda equação, que podem ser bem reais. Para encurtar o cálculo, nós nos limitaremos aos casos que fazem $9\,\alpha+\gamma=\ 4\,\beta$; e nesses casos encontram-se $sen A\,\frac{t}{\sqrt{c}}$ ou

$$q=\pm\frac{\sqrt{(6\,\alpha\beta-\beta\beta)}}{3\,\alpha}\ ;$$

e em seguida o $cos\,A\,\frac{t}{\sqrt{c}}$ ou

$$\sqrt{(1-qq)}=\pm\frac{\sqrt{(9\,\alpha\alpha-6\,\alpha\beta+\beta\beta)}}{3\,\alpha}=\pm\left(1-\frac{\beta}{3\,\alpha}\right).$$

Daí, obtém-se $z=\pm\gamma\left(1-\frac{\beta}{3\,\alpha}\right)$,

este valor de z já marca a posição do ponto C; encontrar-se-á em seguida o valor de y, e enfim aquele de x, e por aí ter-se-á determinado as posições dos três pontos C, B e A. Vê-se, portanto, que a nossa questão é muitas vezes a mais suscetível de soluções bem reais, apesar de que elas não o sejam sempre: pois no caso presente é necessário que a quantidade $\frac{\beta}{3\,\alpha}$ seja sempre um número positivo, e que β seja menor que $6\,\alpha$.

Desçamos aqui a um exemplo bem particular: suponhamos $\beta=\ 4\,\alpha$ e por consequência $\gamma=\ 7\,\alpha$. Nesse caso é necessário tomar $\sqrt{(1-qq)}$ negativa, e fazer $\sqrt{(1-qq)}=\frac{-1}{3}$, o que dá o arco $\frac{t}{\sqrt{c}}$ de $109^d, 28'$, cujo cosseno é $-\frac{1}{3}$, o arco $\frac{2\,t}{\sqrt{c}}$ de $218^d, 56'$, cujo cosseno é $-0,77787$; e o arco $\frac{3\,t}{\sqrt{c}}$ de $328^d,24'$, cujo cosseno é 0,83172 . Estes valores dão $z=\frac{-1}{3}\gamma=\frac{-7}{3}\alpha$; $y=-0{,}77787\,\beta=-3{,}11148\,\alpha$; e $x=0{,}85172\,\alpha$, e por consequência $x+y+z=-4{,}59309\,\alpha$. Assim, a distância inicial do corpo A desde o ponto D sendo expressa por 12, existirá ainda duas posições do corpo A , nas quais a velocidade absoluta seja nula, e as distâncias ao ponto D serão, portanto, -4 e $-4,59309$.

XXVI. Aqui está agora a natureza do movimento absoluto do corpo A com relação ao ponto fixo D ; a figura 8 marca os pontos principais com a justa proporção de distâncias. Eu digo, portanto, que o corpo partindo do ponto A será primeiramente acelerado e em seguida retardado, após o que ele será parado por um momento no ponto B ; ele retornará de lá até o ponto C , onde ele repousará ainda um instante; do ponto C ele retornará em direção ao ponto B parando lá de novo durante um instante, e do ponto B enfim ele retornará ao ponto A , do qual ele tinha partido, onde sua velocidade será ainda nula, e portanto tudo será reduzido ao seu primeiro estado. Além disso, o tempo empregado para fazer a primeira vibração AB é expresso por $109^o,28'$, o tempo para fazer a segunda pequena vibração BC pelo arco $70^o,32'$, esse segundo tempo será ainda empregado para fazer a terceira vibração CB , e o primeiro tempo para fazer a quarta vibração BA . Se se expressa, portanto, todo o tempo, que o corpo emprega antes que se recoloque em seu primeiro estado por 21600 , a primeira vibração empregará 6568 da mesma maneira que a quarta, ao passo que cada uma das duas médias empregará 4232 . Como nesse exemplo a segunda e terceira excursão são bem pequenas, o movimento do corpo parecerá como quase em repouso durante quase a metade do tempo inteiro. Mas ter-se-ia podido escolher outros exemplos onde as excursões parciais seriam tornadas como iguais e como isócronas, e portanto é uma questão, se o corpo deve ser suposto ter feito quatro vibrações, ou duas; no sentido dos srs. d'Alembert e Euler, seria necessário sempre dizer, que ele só teria feito duas, embora se pôde fazê-lo cem idas e voltas todas quase iguais, e quase isócronas, e cujos movimentos far-se-iam quase inteiramente segundo as leis dos movimentos isócronos simples e ordinários.

XXVII. Isso que eu acabei de dizer acerca do corpo A , ocorre perfeitamente a cada ponto nas novas vibrações de cordas: eu me contentaria, para fazer ver essa conformidade inteira, em explicar a mistura dessas duas primeiras espécies de vibrações mais simples, expressas pelas duas primeiras figuras. Eu representei essa mistura pela sexta figura, a qual eu dei a construção no §. 8. Seja nessa curva absoluta $ApaqB$ a maior ordenada relativa $pm=\rho$, a maior ordenada ar da curva ideal $AmanB=\sigma$; e seja ainda o comprimento da corda inteira $AB=a$; que se tome uma abscissa determinada $Ab=x$ com sua ordenada bd ; a partir disso ter-se-á em virtude da teoria do sr. Taylor $cd=\rho sen\,\frac{2\,\pi x}{a}$ e $bc=\sigma sen\,\frac{\pi x}{a}$, e por consequência a ordenada $bd=\rho sen\,\frac{2\,\pi x}{a}+\sigma sen\,\frac{\pi x}{a}$. Seja $bd=y$, ter-se-á, supondo dx constante,

$ddy=\left(\frac{4\,\pi\pi}{aa}\,\rho sen\,\frac{2\,\pi x}{a}+\frac{\pi\pi}{aa}\,\sigma sen\,\frac{\pi x}{a}\right)dx^2$; no entanto, nomeando P o peso que tensiona a corda, e p o peso da corda tensionada e uniforme, de fato, a força aceleradora absoluta do ponto d é expressa por $\frac{P}{p}\bullet\frac{addy}{dx^2}$; essa força aceleradora será então aqui $\frac{P}{p}\,a\left(\frac{4\,\pi\pi}{aa}\,\rho sen\,\frac{2\,\pi x}{a}+\frac{\pi\pi}{aa}\,\sigma sen\,\frac{\pi x}{a}\right)$ ou $\frac{4\,P}{p}\bullet\frac{\pi\pi\rho}{a}\,sen\,\frac{2\,\pi x}{a}+\frac{P}{p}\bullet\frac{\pi\pi\sigma}{a}\,sen\,\frac{\pi x}{a}$, que faz a força aceleradora do ponto $d=\frac{4\,P}{p}\bullet\frac{\pi\pi}{a}\bullet cd+\frac{P}{p}\bullet\frac{\pi\pi}{a}\bullet bc$. Nós vemos então, que a força aceleradora inteira é composta de duas partes, em que a primeira é proporcional à distância dc , e que faz fazer ao ponto d vibrações isócronas relativas ao ponto c , que faz aqui um centro de força móvel: a segunda parte da força aceleradora do ponto d é $\frac{P}{p}\bullet\frac{\pi\pi}{a}\bullet bc$: no entanto, pela natureza da curva $AcanB$, o ponto c é animado em direção ao ponto imóvel b com a mesma força aceleradora $\frac{P}{p}\bullet\frac{\pi\pi}{a}\bullet bc$; assim a segunda força produz constantemente a mesma aceleração aos pontos d e c , e só fará transportar a pequena distância dc sem mudá-la de jeito nenhum. Nós estamos, portanto, inteiramente no mesmo caso que aqueles dos §§. 19 e 20. Para obter uma identidade inteira será necessário supor na sétima figura $CD=o$, $AB=dc$ e $BC=cb$, ou $\alpha=\rho sen\,\frac{2\,\pi x}{a}$, $\beta=\sigma sen\,\frac{\pi x}{a}$ e $\gamma=0$, e nessas expressões a quantidade x é constante com relação ao movimento do mesmo ponto d . Assim o movimento de cada ponto na curva $AdaqB$ será com relação à curva ideal $AcanB$, o mesmo que o movimento absoluto da segunda figura, e o movimento absoluto da curva ideal $AcanB$ será o mesmo que aquele da primeira figura; assim a vibração segundo a figura a $AdaqB$ não é absolutamente senão uma mistura de vibrações segundo a primeira e a segunda figura combinadas conjuntamente, em que cada espécie se faz independentemente uma da outra. Esse movimento absoluto do ponto d abarca realmente dois movimentos periódicos, um com relação ao ponto c , e outro com relação ao ponto b ; o número dos primeiros retornos periódicos será sempre o dobro daqueles dos segundos. O espírito percebe uma e outra espécie desses retornos periódicos e percebe com isso um som duplo, em que um é a oitava do outro. Como as pequenas quantidades pm e ar designadas por ρ e σ podem ter alguma relação, só observar-se-á a primeira espécie de movimento periódico fazendo pm muito maior que ar , enquanto que só sentir-se-á a segunda espécie fazendo ar muito maior que pm ; no primeiro caso, o tempo de uma vibração é manifestamente a metade menor que o segundo, enquanto que segundo a maneira de considerar as vibrações dos srs. d'Alembert e Euler, o tempo de cada período é sempre o mesmo, qualquer razão que haja entre ρ e σ , isso que não me parecia conforme o princípio de continuidade. Pois, se o tempo de uma vibração é segundo eles sempre t , qualquer razão que houvesse entre ρ e σ , porque ele torna manifestamente $\frac{1}{2}\,t$ fazendo $\rho=0$? Para responder a esta dificuldade, me parece que é preciso necessariamente dizer, que ele faz ao mesmo tempo uma dupla espécie de vibração na corda, e que a mistura dessas duas espécies forma aquilo que esses geômetras chamam vibrações simples; que a segunda espécie diminui à medida que se diminui a quantidade σ , e que ela se torna nula fazendo $\sigma = 0$; e, portanto, não haverá qualquer descontinuidade.

XXVIII. Eu espero que aquilo que eu acabei de dizer nesse *Mémoire* poderá servir para propagar luz sobre a natureza das novas vibrações das cordas, encontradas com tanta sagacidade pelos srs. d'Alembert e Euler; e isso era todo meu objetivo. Se o método em que eles se fizeram servir para resolver seus problemas é muito mais difícil que o meu, eu não me admiro com a vantagem da superioridade do gênio deles. Quanto à questão se as novas vibrações são realmente vibrações simples e síncronas para todos os pontos, onde elas não são sobretudo uma mistura de várias diferentes vibrações coexistentes em uma mesma corda e todas de diferentes durações, eu só falei para melhor explicar a natureza dessas vibrações, estando bem distante de fazer uma querela com estes também grandes homens sobre o significado de certos termos.

Eu tratarei em um segundo *Mémoire* de alguns problemas novos, em que a solução resulta bem facilmente de nossos princípios e que ao mesmo tempo coloca esta matéria em uma nova luz.

RE'FLE'XIONS
ET
ECLAIRCISSEMENS
SUR LES NOUVELLES VIBRATIONS DES COR-DES EXPOSÉES DANS LES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE
de 1747. & 1748.

PAR M. DANIEL BERNOULLI.

I.

Mr. *Taylor* eſt parvenu le premier à connoitre le nombre des vibrations, que fait dans un tems donné une corde uniformement epaiſſe d'une longueur donnée, d'un poids donné, & tenduë par une force donnée. Il n'étoit pas poſſible de déterminer ce nombre ſans connoitre préalablement les courbures, que prendroient les cordes pendant tout le tems que dureroient leurs vibrations ; il a donc démontré, que cette courbure étoit

T 2 con-

conſtamment la compagne d'une cycloïde extremement allongée, dans laquelle les appliquées repréſentent les ſinus des arcs repréſentés par les abſciſſes: auſſi n'eſt-ce à mon avis que ſous cette forme que les vibrations peuvent devenir régulieres, ſimples, & iſochrones, malgré l'inégalité des excurſions. Avec cette idée, que j'ai toujours euë, je ne pouvois qu'être ſurpris de voir dans les Mémoires des années 1747. & 1748. une infinité d'autres courbures comme douées de la même propriété; il ne me falloit pas moins que les grands noms de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*; que je ne pouvois ſoupçonner d'aucune inattention, pour examiner s'il n'y auroit pas quelque équivoque dans l'aggrégation de toutes ces courbes avec celle de M. *Taylor*, & dans quel ſens on pourroit les admettre. J'ai vû auſſi-tôt, qu'on ne pouvoit admettre cette multitude de courbes que dans un ſens tout-à-fait impropre; je n'en eſtime pas moins les calculs de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, qui renferment certainement tout ce que l'Analyſe peut avoir de plus profond & de plus ſublime; mais qui montrent en même tems, qu'une analyſe abſtraite, qu'on écoute ſans aucun examen ſynthetique de la queſtion propoſée, eſt ſujette à nous ſurprendre plutôt qu'à nous éclairer. Il me ſemble à moi, qu'il n'y avoit qu'à faire attention à la nature des vibrations ſimples des cordes, pour prévoir ſans aucun calcul tout ce que ces deux grands Géometres ont trouvé par les calculs les plus épineux & les plus abſtraits, dont l'eſprit analytique ſe ſoit encore aviſé.

II. Remarquons d'abord que, ſuivant la théorie de M. *Taylor*, une corde tenduë peut former ſes vibrations uniformes d'une infinité de manieres, qui different entre elles pour le phyſique, mais qui reviennent au même pour le géometrique, parce que dans chacune de ces manieres on ne fait que changer l'unité qui ſert de meſure. Ces manieres differentes conſiſtent dans le nombre des ventres, que la corde peut former durant ſes vibrations. Quand il n'y a qu'un ſeul ventre, comme dans la premiere Figure, les vibrations ſont les plus tardives, elles forment le ſon fondamental; quand il y a deux ventres, & un noeud

149

noeud au milieu de l'axe, les vibrations ſe doublent, & elles forment l'octave du ſon fondamental; lorſque la corde forme trois, quatre, ou cinq ventres, avec deux, trois, ou quatre noeuds, par des diſtances mutuelles égales, comme dans les figures 3. 4. & 5. les vibrations ſe triplent, quadruplent, ou quintuplent, & forment la douzième, la double octave, ou la tierce majeure de la double octave, rélativement au ſon fondamental. Cette multiplicité va à l'infini. Dans chaque eſpece de ces vibrations les excurſions totales peuvent être grandes ou petites à diſcrétion, pourvû que les plus grandes puiſſent être cenſées extrêmement petites. La nature de ces vibrations eſt telle que, non ſeulement chaque point commence & finit chaque vibration ſimple au même inſtant, mais encore que tous les points ſe mettent après chaque demi-vibration ſimple dans la poſition de l'axe AB. Il faut conſidérer toutes ces conditions comme eſſentielles, & tout auſſi-tôt il n'y a que les courbes données par M. *Taylor*, qui ſatisfaſſent au problème. Mais en ſéparant ces conditions on peut former une infinité de courbes, qui ſatisfaſſent à quelque condition ſéparément; mais je ferai voir combien peu on ſeroit fondé en ces cas à appeller les vibrations iſochrones pour chaque point. Il en eſt de ces vibrations, comme des mouvemens réciproques des corps, qui deſcendent & montent alternativement ſur une courbe; cette courbe ne peut être que la cycloïde, ſi l'on demande que toutes les deſcentes, grandes ou petites, ſoyent iſochrones entre elles de même que les montées; mais ſi l'on veut ſimplement que les vibrations entieres ſoyent iſochrones entre elles, on peut donner autant de courbes qu'on demande, qui ſatisfaſſent à ce problème; puiſque j'ai demontré dans les Mémoires de Petersbourg, que quelle courbe de deſcente on donne, on peut toujours déterminer la courbe de montée, telle que les deux tems employés à la deſcente & à la montée pris enſemble faſſent une même ſomme, quelque inégalité qu'il y ait entre les amplitudes des excurſions.

III. Si j'ai dit que les cordes peuvent faire leurs vibrations ſimples d'une infinité de manieres, dont les cinq premieres figures ſervent

T 3 d'exemd'exemples, ce n'eſt pas là une vérité abſtraite ſeulement; on peut la rendre réelle, comme l'exemple des trompettes marines le montre aſſez par les ſons qu'on en tire: les Expériences qu'on fait en plaçant un chevalet dans quelqu'un des points *a*, & en pinçant le bout A*a*, confirment la même choſe; puiſqu'elles nous aprennent, qu'il ſe forme aux points *b*, *c*, *d*, &c. des noeuds à diſtances égales, qui demeurent comme en repos, pendant que tous les autres points ſont agités. Cette multiplicité infinie de vibrations ſe manifeſte dans tous les corps ſonores, de quelque nature qu'ils puiſſent être; c'eſt par là qu'on peut tirer des cors de chaſſe, des trompettes, &c. tous les ſons qui vont en progreſſion des nombres naturels; c'eſt à dire dans la même progreſſion que les ſons, qu'on peut tirer d'une ſeule & même corde par ſes differentes eſpeces de vibrations. En fermant tous les trous d'une flûte traverſiere, on peut par la ſimple variation de l'embouchure obtenir d'abord le ſon le plus bas, ou fondamental, & puis ſucceſſivement ſon octave, ſa douzième, ſa double octave, ſa dix-ſeptième majeure, qui ſont pareillement comme 1, 2, 3, 4 & 5. mais il ne faut pas croire pour cela, que cette progreſſion ſoit générale. Aprés m'être formé une bonne théorie ſur les vibrations de l'air dans les inſtrumens à vent, j'en ai conclu, qu'on ne pourroit tirer des tuyaux bouchés que les ſons, qui vont en progreſſion des nombres impairs, ſavoir 1, 3, 5, 7, &c. & ma concluſion a été confirmée par l'Expérience: car ayant ôté la piece d'en-haut d'une flûte traverſiere, & la bouchant avec la main, j'en ai tiré d'abord le ſon le plus bas, & puis renforçant le ſoufle ſa douzième ſans paſſer par l'octave, enſuite ſa dix-ſeptième majeure, & enfin un ton qui n'eſt pas reçu dans la Muſique, & qui approchoit de la vingt-unième du ſon fondamental. Je ne ſai ſi cette propriété a déjà été remarquée par d'autres; mais elle me paroit d'autant plus remarquable, qu'elle eſt peut-être propre à expliquer en quoi conſiſtent ces accès de facile réfléxion & de facile transmiſſion des rayons, obſervés avec tant de ſagacité par le grand Newton. C'eſt ſur quoi je compte de donner un Mémoire, quand j'aurai expliqué & réduit au calcul les vibra-

vibrations de l'air formées dans des tuyaux ouverts & bouchés, & démontré l'analogie entre ces vibrations de l'air & celles de l'ether, qui fait la lumiere. Je n'ai fait ici cette remarque, que pour prouver, que les differens ſons tirés du même corps ſonore ne vont pas toujours dans la progreſſion des nombres naturels. Mais je dis plus : ces ſons peuvent avoir telle proportion, qu'il n'y a aucune formule en quantités finies qui puiſſe l'exprimer; comme on peut voir par les ſons, que j'ai calculés autrefois, qui ſont ceux qu'on peut tirer d'une verge d'acier frappée par des petits coups. C'étoit un problème nouveau, & qui demandoit beaucoup de circonſpection; après l'avoir réſolu, je l'ai propoſé à M. *Euler*, qui en a donné une ſolution parfaitement conforme à la mienne, quoique incomplete d'abord en ce qu'il avoit omis la moitié des ſons poſſibles ; je l'en ai averti, & il y a ſuppléé dans les Actes de Leipſig.

IV. Ma concluſion eſt, que tous les corps ſonores renferment en puiſſance une infinité de ſons, & une infinité de manieres correſpondantes de faire leurs vibrations régulieres ; enfin, que dans chaque differente eſpece de vibrations les infléxions des parties du corps ſonore ſe font d'une maniere differente. Mais ce n'eſt pas de cette multitude de vibrations appliquée aux cordes tenduës, que Mrs. d'*Alembert* & *Euler* prétendent parler ; elle n'étoit pas inconnuë à M. *Taylor* : ils multiplient à l'infini chaque eſpece, en accordant à chaque intervalle entre deux noeuds voiſins une infinité de courbures telles que chaque point commence & acheve aux mêmes inſtans ſes vibrations, pendant que, ſuivant la théorie de M. *Taylor*, chaque dit intervalle doit néceſſairement prendre la ſeule courbure de la compagne de la cycloïde extrémement allongée. Cette contradiction apparente entre d'auſſi grands Géometres me paroit demander quelque éclairciſſement.

V. Remarquons donc, que la corde AB peut non ſeulement faire ſes vibrations ſuivant la figure premiere, ou ſeconde, ou troiſième, & ainſi à l'infini, mais qu'il peut ſe faire encore un mélange de toutes ces vibrations avec toutes les combinaiſons poſſibles ; & cependant

toutes

toutes les nouvelles courbes & nouvelles eſpeces de vibrations données par Mrs. d'*Alembert* & *Euler* ne ſont abſolument qu'un mélange de pluſieurs eſpeces de vibrations Tayloriennes. Si cela eſt vrai, je ne ſaurois approuver l'aggrégation de toutes ces nouvelles courbes ; puisque la corde en s'y conformant ne donne pas un ſeul & même ton, mais pluſieurs tons à la fois. Pour ſentir l'incongruïté de cette nouvelle aggrégation, ſuppoſons, au lieu d'une ſeule corde, cinq cordes par exemple, entierement égales en tout ſens ; que la premiere faſſe ſes vibrations ſuivant la loi de la premiere figure ; la ſeconde corde ſuivant la loi de la ſeconde figure, & ainſi des autres. Suppoſons que toutes ces cordes commencent leurs vibrations dans un même inſtant ; voudroit-on appeller ces cinq eſpeces de vibrations iſochrones entre elles, ſimplement parce qu'elles finiſſent une de leurs vibrations au même instant que la premiere corde finit chacune des ſiennes ? Non ſans doute, parce que la ſeconde corde fait deux vibrations, la troiſième trois, & ainſi des autres, pendant que la premiere corde n'en fait qu'une ; & que chaque corde donne un ton different à proportion. Cependant tout ce que je viens de dire par rapport à pluſieurs cordes entierement égales, peut & doit être appliqué à une ſeule & même corde.

VI. Effectivement tous les Muſiciens conviennent, qu'une longue corde pincée donne en même tems, outre ſon ton fondamental, d'autres tons beaucoup plus aigus ; ils remarquent ſur tout le mêlange de la douzième & de la dix-ſeptième majeure : s'ils ne remarquent pas auſſi diſtinctement l'octave & la double octave, ce n'eſt qu'à cauſe de la trop grande reſſemblance de ces deux tons avec le ton fondamental. Voilà une preuve évidente, qu'il peut ſe faire dans une ſeule & même corde un mêlange de pluſieurs ſortes de vibrations Tayloriennes à la fois. On entend pareillement dans le ſon des groſſes cloches un mêlange de tons differens. Si l'on tient par le milieu une verge d'acier, & qu'on la frappe, on entend à la fois un mêlange confus de pluſieurs tons, lesquels étant appréciés par un habile Muſicien ſe trouvent extrémement

153

mement desharmonieux, de ſorte qu'il ſe forme ici un concours de vibrations, qui ne commencent & ne finiſſent jamais dans un même instant, ſinon par un grand hazard : d'où l'on voit que l'harmonie des ſons, qu'on entend dans une même corps ſonore à la fois, n'eſt pas eſſentielle à cette matiere, & ne doit pas ſervir de principe pour les ſyſtèmes de Muſique. L'air n'eſt pas exemt de cette multiplicité de ſons coëxiſtans : il arrive ſouvent qu'on tire deux ſons differens à la fois d'un tuyau ; mais, ce qui prouve le mieux, combien peu les differentes ondulations de l'air s'entre-empêchent, eſt qu'on entend diſtinctement toutes les parties d'un concert, & que toutes les ondulations cauſées par ces differentes parties ſe forment dans la même maſſe d'air ſans ſe troubler mutuellement, tout comme les rayons de la lumiere, qui entrent dans une chambre obſcure à travers une petite ouverture, ne ſe troublent point.

VII. Après ces remarques il ſera facile de conſtruire une infinité de courbes initiales à la corde AB avec cette condition, que chaque point de la corde arrive quelquefois en même tems à un point de repos inſtantané, & de donner la loi générale pour toutes ces courbes ſans aucun calcul préalable. Commençons par la combinaiſon des deux premieres figures. Suppoſons que la corde faſſe ſes vibrations pour former le ſon fondamental conformément à la premiere figure ; cette courbure étant cenſée infiniment petite, la corde pourra encore être conſidérée comme une ligne droite, & ſa courbe pourra ſervir d'axe mobile à la courbe de la ſeconde figure, à deux branches ; & de là il réſulte une nouvelle courbe, qui remplira la condition préſcrite. Voici donc la conſtruction de cette nouvelle courbe.

VIII. Soit (Fig. 6.) A*manB* la courbure de la premiere figure : qu'on conſidére cette courbe comme un axe droit, ſur lequel on conſtruiſe A*paq*B, entiérement la même par rapport à ſon axe courbé que celle de la figure ſeconde, par rapport à l'axe parfaitement droit AB ; & cette courbe A*paq*B ſera telle qu'on deſiroit, & la plus ſimple des courbes données par Mrs. d'*Alembert* & *Euler*.

Mém. de l'Acad, Tom. IX. V Comme

Comme la plus grande appliquée *pm* peut avoir un rapport quelconque à la plus grande appliquée *ar*, il eſt clair, que cette courbe A*paq*B contient déjà une infinité d'eſpeces. Voici à préſent les propriétés de cette courbe A*paq*B.

(*a*) Je dis que la courbe idéale A*man*B fera ſes vibrations par rapport à l'axe droit A*rb*, entierement ſuivant la loi des vibrations ſimples de la premiere figure.

(*b*) Enſuite, que chaque point de la courbe A*paq*B aura ſon mouvement rélatif par rapport à chaque point correſpondant de la courbe A*man*B, le même que le mouvement abſolu repréſenté par la ſeconde figure.

(*c*) Or chaque point de la ſeconde figure fait précifément deux vibrations, pendant que le même point en fait une dans les vibrations de la premiere figure. Il faut donc que tous les points de la courbe A*paq*B finiſſent leurs vibrations alternes au même inſtant, que ceux de la figure A*man*B finiſſent chacune des leurs.

(*d*) Lorſque, au commencement, un point de la courbe A*paq*B eſt en dehors de la courbe A*man*B, ce même point au bout de ſes deux vibrations fera en dedans de cette derniere courbe, qui n'aura fait qu'une ſeule vibration; & ainſi la courbe A*man*B ayant pris la ſituation A*m'a'n'*B, il arrivera que la courbe A*paq*B prenne la ſituation A*p'a'q'*B, & que la courbe A*p'a'q'*B ſoit tout à fait la même qu'elle avoit été, en changeant ſimplement l'ordre des côtés, c'eſt à dire, la même que B*qap*A, ce qui fait un cas du beau théoreme de M. *Euler*.

IX. De la même façon que nous avons combiné les vibrations de la premiere, & de la ſeconde figure, on pourra combiner les vibrations de la premiere figure, avec celles de toute autre figure ſans exception

155

exception à l'infini; toutes ces combinaiſons peuvent même ſubſiſter à la fois; ainſi; par exemple, la courbe abſoluë $ApaqB$ de la ſixième figure, pourra encore être conſidérée comme une courbe translatrice, on pourra la partager en trois parties égales, & y appliquer la même courbe qui, dans la troiſième figure, eſt appliquée à l'axe droit AB. Quelle que ſoit la courbe abſoluë réſultante de toutes ces combinaiſons faites à diſcrétion, il arrivera toujours que tous les points de la courbe arrivent dans un même inſtant au point de repos inſtantané du côté oppoſé de l'axe, & la courbe dans cet état ſera toujours la même, en ſituation renverſée, qu'elle avoit été au commencement, comme le dit M. *Euler*.

X. Si l'on ne combine enſemble que les figures, qui ont un nombre de ventres impair, ces courbes auront encore cette propriété, que chaque point de la courbe abſoluë réſultante paſſe dans un même inſtant par l'axe droit AB, ce qui peut par conſéquent ſe faire d'une infinité de façons; mais auſſi-tôt qu'une ſeule courbe à ventres pairs s'y mêle, cela n'arrive plus. Voilà un expoſé phyſique des nouvelles vibrations des cordes données par Mrs. d'*Alembert* & *Euler*; & ſi j'ai bien compris leurs énoncés, toutes les nouvelles courbes qu'ils donnent, ſont compriſes dans notre conſtruction, & ſont un ſimple mélange de pluſieurs eſpeces de vibrations, dont chacune à part ſe fait ſuivant les loix décrites par M. *Taylor*. Mais il me ſemble que ce n'eſt là qu'une eſpece de compoſition de mouvement, qui ne peut donner aucune amplification à la théorie de M. *Taylor*.

XI. Pour mieux ſentir l'incongruïté d'une telle amplification, nous combinerons la courbe fondamentale de M. *Taylor*, qui eſt repréſentée par la premiere figure, avec la figure anguiforme Taylorienne qui auroit 1001 ventres; il en réſultera une courbe du nombre des nouvelles courbes, qui aura cette propriété, que tous les points commençans au même inſtant leur vibration, paſſeront tous dans un même inſtant par l'axe droit, & arriveront dans un même inſtant au

V 2 point

point de repos, de l'autre côté de l'axe, pour recommencer un nouveau mouvement pareil au précedent. Mais qu'arrive-t-il pendant ce mouvement ? Je dis qu'il y aura dans la corde précifément 1000 points à de petites diftances égales, dont chacun fait une vibration, abfolument de la même maniere que fi les vibrations fe faifoient fimplement fuivant la loi de la premiere figure, pendant que tous les autres points feront 1001 allées & venuës, ou 1001 vibrations, & pourront même paffer 1001 fois l'axe droit. Ces 1001 vibrations feront entieres & parfaites ; dans chacune de ces vibrations chaque élément aura un moment de repos abfolu & parfait, & un moment auquel fa viteffe foit la plus grande. Si l'on vouloit confondre ces petites vibrations rapides avec la fimple vibration fondamentale, uniquement parce que la mille & unième petite vibration finit au même inftant dans chaque point, que la vibration fondamentale finit, ce feroit appeller fynchrones deux pendules fimples, dont l'un auroit 1 pied de longueur & l'autre 1002001 pieds, parce que ces deux pendules, commençans leurs vibrations au même inftant, les finiffent auffi dans un même tems ; on pourroit même unir ces deux pendules en fuppofant un corps extrèmement pefant, fufpendu par une très longue corde, & un petit corps attaché au grand par un petit fil, on pourra toujours obtenir que le petit pendule attaché au grand commence la premiere de fes vibrations, & finiffe la derniere, aux mêmes inftans que le grand pendule commence & finit une feule vibration ; mais fera-t-on fondé pour cela d'appeller ces vibrations ifochrones ?

XII. Voyons encore fi toutes les nouvelles courbes trouvées par M. *Euler*, font comprifes dans notre remarque. Pour cet effet il faudra donner une équation pour toutes les courbes Tayloriennes, dont les cinq premieres figures font autant d'exemples. Je me fervirai des dénominations de M. *Euler*. Soit donc la longueur de la corde $AB = a$; $\pi =$ à la demi-circonference du cercle dont le rayon eft exprimé par l'unité, la plus grande appliquée au milieu de chaque ventre

ventre pour la premiere figure $= \alpha$, pour la seconde $= \beta$, pour la troisième $= \gamma$, pour la quatrième $= \delta$; soit enfin x une abscisse quelconque, & y l'appliquée pour cette abscisse, on aura suivant M. *Taylor*,

$$\text{pour la 1. fig. } y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 2. fig. } y = \beta \sin \frac{2\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 3. fig. } y = \gamma \sin \frac{3\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 4. fig. } y = \delta \sin \frac{4\pi x}{a} \quad \&c.$$

En combinant donc toutes ces courbes à l'imitation de la figure sixième, pour laquelle nous n'avons combiné que les deux premieres figures, nous aurons généralement pour la même abscisse x cette équation

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

dans laquelle les quantités α, β, γ, δ, &c sont arbitraires affirmatives ou négatives.

XIII. Voilà donc cette infinité de courbes trouvées sans aucun calcul, & notre équation est la même que celle de M. *Euler*; voyez les Mémoires de l'Académie pour l'Année 1748. page 85. Il est vrai que M. *Euler*, ne traite pas cette multitude infiniment infinie de générale, & qu'il ne la donne au §. 30. que comme des cas particuliers; mais c'est sur quoi je ne suis pas encore assez éclairci : s'il y a encore d'autres courbes, je ne comprens pas dans quel sens on peut les admettre.

XIV. Si dans notre équation on suppose les coëfficiens des termes alternes, savoir β, δ, &c. $= 0$, il arrivera alors non seulement, que

V 3 toutes

toutes les especes de vibrations finissent au même instant que finit la vibration fondamentale, mais encore que tous les points de la corde se rangent au même instant dans la position de la ligne droite AB; cela n'est qu'un corollaire de notre §. 10. Dans cette supposition la courbe obtient un diametre qui passe par le milieu de la corde AB, & qui partage la courbe en deux branches parfaitement égales & semblables. Ce théoreme est donc encore le même que celui de M. *Euler* du §. 28.

XV. Si après toutes nos remarques on vouloit encore confondre les vibrations composées avec les vibrations simples exposées par M. *Taylor*, je ne m'y opposerai pas; mon intention n'a été principalement que d'exposer ce que les nouvelles vibrations de Mrs. d'*Alembert* & *Euler* ont de physique. Si au contraire on trouve que ces nouvelles vibrations ne sauroient être prises pour des vibrations simples, qui seules faisoient l'objet de M. *Taylor*, & qu'étant décomposées en vibrations simples & uniformes, chaque espece se fait simplement suivant la loi de *Taylor*, ces nouvelles courbes ne feront que confirmer la théorie de M. *Taylor*, quand il exclud toutes les autres courbes, & qu'il n'admet que sa trochoïde prolongée. Mais je n'en admirerai pas moins la profonde sagacité avec laquelle nos deux illustres Géometres ont su déterminer analytiquement ces nouvelles courbes. Au reste je crois que quelque courbure initiale qu'on donne à la corde, elle ne manquera pas de faire ses vibrations presque aussitôt suivant la simple uniformité des mouvemens isochrones, & conformément à la nature de la trochoïde prolongée exposée par M. *Taylor*, quoique Mr. *Euler* ne paroisse pas de ce sentiment au §. 27. Voici comment je conçois la chose. L'expérience & la raison nous apprennent, que de deux cordes également grosses & également tenduës, la plus longue conserve plus longtems ses vibrations que la plus petite; dans les petites cordes pincées le son ne dure qu'un instant. Ainsi toutes les vibrations partielles, mêlées avec la vibration totale & fondamentale, finiront bien vîte, pendant que la fondamentale dure encore très sensiblement; & alors la corde

corde ne formera plus que la trochoïde prolongée de M. *Taylor*. C'eſt auſſi ce que nous voyons toujours arriver dans les cordes pincées d'un clavecin, dans leſquelles on reconnoit aſſez par les yeux ladite courbe uniforme, qui ne forme qu'un ſeul ventre.

XVI. On peut encore remarquer ſur cette matiere, qu'il n'y a que les cordes uniformement épaiſſes, qui ſoient ſuſceptibles des propriétés que nous venons d'expoſer; la raiſon en eſt, que lorſque les cordes inégalement épaiſſes ſe replient ſuivant les figures 2. 3. 4. 5. &c. les vibrations n'en deviennent pas préciſement 2. 3. 4. 5. &c. fois plus rapides qu'elles ſont par rapport à la première figure, & qu'ainſi dans le mêlange de ces vibrations elles ne finiſſent jamais dans un même inſtant, quoiqu'elles ayent toutes commencé dans un même inſtant. Il n'y a donc à mon avis qu'une ſeule courbe pour les cordes inégalement épaiſſes, pour un nombre d'interſections donné, qui ſatisfaſſe à notre problème; & ſi cela eſt, pourquoi y en auroit-il une infinité pour les cordes uniformement épaiſſes? Enfin, qu'on choiſiſſe le mélange le plus ſimple, en conſidérant l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi x}{a}$, dans laquelle les coëfficiens α & β peuvent être de petites lignes quelconques. Soit la longueur du pendule ſimple iſochrone, avec les vibrations uniformes qui répondent à la ſimple première figure $= l$; la longueur d'un pareil pendule pour la ſeconde figure $= \frac{1}{4} l$; ou ſuivant Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, le pendule iſochrone pour la figure exprimée par l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi x}{a}$ a toujours pour longueur la quantité l; cependant cette même longueur eſt manifeſtement $= \frac{1}{4} l$ en faiſant $\alpha = 0$; il y auroit donc là dedans une contradiction, ſi ces Géometres ne prenoient le mot d'iſochroniſme dans un autre ſens, qu'on ne lui attache ordinairement.

XVII.

XVII. De notre ſolution ſynthetique du problème de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, on voit auſſi ſans calcul la maniere de déterminer la courbe abſoluë de la corde à chaque inſtant, de même que la viteſſe de chaque point: car, ſoit la courbe initiale exprimée par

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

& qu'il ſoit, par exemple, queſtion de déterminer la courbe au moment que le milieu de la corde paſſe par l'axe droit AB: il eſt clair que la courbe ſera exprimée dans cet inſtant par cette équation

$$y = -\beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} - \&c.$$

dans laquelle les ſignes ſont alternativement négatifs & affirmatifs. Quant aux viteſſes, il eſt de même facile à les déterminer par la ſimple compoſition du mouvement, puiſqu'on détermine dans la Méchanique le rapport des viteſſes de chaque point pour chaque figure à part.

XVIII. J'ai évité juſques ici les calculs, & j'ai fondé tout mon raiſonnement ſur le principe confirmé par l'expérience (§. 6.) qu'il peut ſe faire un mêlange de vibrations dans un ſeul & même corps ſonore, qui ſoient abſolument indépendantes les unes des autres. A bien conſidérer ce principe, il n'eſt pas differant de celui de la compoſition du mouvement; cependant, pour le mettre dans tout ſon jour, j'ai cru devoir ajouter ici les réfléxions méchaniques, & les calculs que cette matiere demande.

XIX. Soit un corps A (fig. 7.) tiré directement vers un point fixe B: ſi l'on demande que le corps arrive au point B dans un tems donné, quelle que ſoit la diſtance initiale AB, on ſait que les gravitations du corps A vers le point fixe B, doivent être dans chaque point proportionelles aux diſtances du corps depuis le point B. On ſait même, qu'il n'y a que cette ſeule loi de gravitation qui ſatisfaſſe à la queſtion;

tion; alors les demi-excurſions deviennent de part & d'autre parfaitement égales. Voilà le vrai iſochroniſme, & le ſeul qu'il faille conſidérer. Suppoſons après cela que, pendant que le corps A eſt pouſſé avec la dite loi vers le point B, les deux points A & B ſouffrent dans chaque inſtant une accéleration égale vers le point C, de ſorte que le ſyſtème AB ſouffre une gravitation commune vers C, qui ſoit encore proportionelle aux diſtances BC; par là on obtiendra un autre iſochroniſme dans les excurſions du ſyſtème AB. Après cela on pourra de nouveau imaginer que les trois points A, B, & C, ſouffrent dans chaque inſtant une accélération égale vers un quatrième point D, & que cette gravitation commune aux trois points A, B, & C, ſoit toujours proportionelle aux diſtances du point C au point D. De cette façon on pourra multiplier à l'infini les gravitations du corps A vers différens points, & ce corps A ſouffrira par là un mêlange de pluſieurs eſpeces de vibrations, qu'il convient d'examiner.

XX. Quelle que ſoit la diſtance initiale, le corps A employera toujours le même tems pour parvenir au point B, & pour faire une demi-vibration; après quoi le corps A fera une autre demi-vibration, du côté oppoſé toujours dans le même tems; il reviendra encore au point B après un troiſième tems, & ainſi de ſuite: en un mot ce mouvement rélatif au point B ſera le même, que ſi ce point demeuroit entiérement en repos. J'appellerai ces mouvemens réciproques, des vibrations iſochrones rélatives; & cette diſtinction des vibrations eſt bien néceſſaire, parce qu'en effet elles ſont bien différentes des vibrations abſoluës du même corps A. Suppoſons que la peſanteur du corps A vers le point B ſoit égale à la peſanteur naturelle, en faiſant ſa diſtance au point B $= a$; dans cette ſuppoſition ces premieres vibrations iſochrones rélatives ſeront iſochrones avec les vibrations abſoluës d'un pendule ſimple de la longueur a.

Après avoir conſidéré ces premieres vibrations rélatives au point B, nous aurons les mêmes réfléxions à faire ſur les vibrations iſochrones

Mém. de l'Acad. Tom. IX. X

nes du point B, rélatives au point C ; & ces vibrations exifteront en même tems dans le corps A, fans troubler en aucune façon les premières vibrations de ce corps. Ces fecondes vibrations feront ifochrones avec celles d'un pendule fimple de la longueur b, en fuppofant que la pefanteur du point B, ou du corps A, vers le point C, devient égale à la pefanteur naturelle, lors qu'on fait $BC = b$.

Si l'on veut ajouter à ces doubles vibrations du corps A une troifième efpece, il faudra fuppofer une troifième vibration commune au fyftème précedent ABC vers un point D, qu'on fera fous de pareilles dénominations ifochrones avec celles d'un pendule fimple de la longueur c. De cette maniere on pourra aller auffi loin qu'on voudra, & produire dans le corps A tant d'efpeces de vibrations ifochrones rélatives qu'on fe fera propofé. Mais n'allons pas plus loin, & fuppofons cette troifième vibration abfoluë, en confidérant le point D comme fixe. De cette façon le feul & même corps A aura en même tems trois efpeces de vibrations indépendantes les unes des autres, dont les centres de force font les points B, C, & D, que nous allons confidérer de plus près.

XXI. Les tems desdites vibrations partielles feront en raifon fous-doublée des quantités arbitraires a, b, & c; fi ces quantités font, par exemple, comme 4, 9, & 36, les tems des vibrations feront comme 2, 3, & 6; ainfi, pendant que le point C fait une vibration entiere rélativement au point fixe D, le point B en fera deux rélativement au point C, & le point A en fera trois rélativement au point B : d'où il eft clair, que tout le fyftème ne fera remis dans fon premier état qu'au bout de fix vibrations rélatives au point B, ou de quatre vibrations rélatives au point C, ou de deux vibrations rélatives au point fixe D. Mais, fuivant la maniere dont Mrs. d'*Alembert* & *Euler* envifagent la chofe, tout ce mêlange de vibrations ne feroit jamais que deux vibrations fimples. Dans cet exemple il n'arrivera point, que les trois points A, B, & C, fe réüniffent au point fixe D. Mais fi l'on fuppofe les trois quanti-

quantités arbitraires $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, & $\sqrt{c}$, être en raiſon de 3, 5, & 15, les tems des vibrations ſeront en même raiſon, & les points A, B, & C ſe trouveront réünis au point D au bout de chaque demi-vibration du point C; de cette maniere les excurſions ſeront parfaitement ſemblables & égales de chaque côté du point fixe D: mais à mon avis le point A n'en doit pas moins être cenſé faire cinq demi-vibrations avant que cela arrive, au lieu que dans l'autre ſens il n'eſt cenſé de faire qu'une ſeule demi-vibration. Pour voir la néceſſité d'enviſager ces mouvemens réciproques conformément à notre théorie, il n'y a qu'à ſuppoſer les diſtances arbitraires initiales BC, & CD, extrêmement petites par rapport à AB; il n'y aura alors que les vibrations AB qui ſoyent ſenſibles, & le corps A fera manifeſtement cinq demi-vibrations avant la réünion parfaite des points A, B, & C, au point D. Mais, ſi on conſidéroit les diſtances AB, & BC, comme extrêmement petites par rapport à CD, il n'y aura que les vibrations CD qui ſoyent ſenſibles, & le corps A ne pourroit plus être cenſé que d'avoir fait une ſeule demi-vibration. Il faut donc éviter ici toute équivoque dans les mots de vibration & d'iſochronisme. Si les quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, & $\sqrt{c}$, ſont incommenſurables, il ne pourra jamais arriver, que le ſyſtème reprenne ſon état initial, ni que le corps A revienne au point dont il étoit parti, parce que les points A, B, & C, n'auront jamais leurs plus longues élongations rélatives dans un même inſtant: cependant chaque eſpece de vibration relative à part ſe fera ſuivant la loi des pendules ſimples cycloïdiques. C'eſt la ſource de la raiſon, qui empêche d'étendre la nouvelle théorie de Mrs. d'*Alembert* & *Euler* à toutes ſortes de cordes, quelque loi d'inégalité qu'il puiſſe y avoir dans leur épaiſſeur.

XXII. Dans l'application de ces réfléxions aux cordes vibrantes, il faudra ſuppoſer $b = \frac{1}{4} c$, $a = \frac{1}{9} c$ &c. de ſorte que les nombres des differentes eſpeces de vibrations ſimples ſoyent en raiſon des nombres naturels 1, 2, 3, &c. en commençant par celle du point C rélati-

X 2 ve

164

ve au point fixe D, ensuite celle du point B rélative à son centre de force mobile C, & puis celle du point A rélative au centre de force mobile B.

XXIII. Supposons à présent la distance initiale $AB = \alpha$, $BC = \beta$, $CD = \gamma$, &c. & qu'au bout d'un tems donné t la distance AB soit devenuë $= x$, la distance $BC = y$, la distance $CD = z$ &c.; soit aussi la vitesse rélative entre les points A & B $= u'$, celle d'entre les points B & C $= u''$, celle d'entre les points C & D $= u'''$ &c. on aura

$$du' = \frac{x}{a}\, dt \quad \& \quad u' = \sqrt{\frac{\alpha\alpha - xx}{a}},$$

$$du'' = \frac{y}{b}\, dt \quad \& \quad u'' = \sqrt{\frac{\beta\beta - yy}{b}},$$

$$du''' = \frac{z}{c}\, dt \quad \& \quad u''' = \sqrt{\frac{\gamma\gamma - zz}{c}}, \quad \&c.$$

Outre ces équations la Géometrie nous enseigne encore des constructions & équations entre le tems t & les distances x, y, z, &c. Car, soit le sinus total exprimé par l'unité, & qu'on dénote par A. cos F un arc de cercle, dont le rayon est un, & dont le cosinus est une quantité quelconque F, on pourra exprimer le tems t par chacune des équations suivantes

$$t = \sqrt{a} \times \mathrm{A.\ cos}\ \frac{x}{\alpha}$$

$$t = \sqrt{b} \times \mathrm{A.\ cos}\ \frac{y}{\beta}$$

$$t = \sqrt{c} \times \mathrm{A.\ cos}\ \frac{z}{\gamma} \quad \&c.$$

Par le moyen de ces équations on pourra déterminer chacune des distances

tances x, y, z, &c. par le même tems t commun, en convertissant les signes; de cette façon on aura

$$x = \alpha \text{ cos A. } \frac{t}{\sqrt{a}}$$

$$y = \beta \text{ cos A. } \frac{t}{\sqrt{b}}$$

$$z = \gamma \text{ cos A. } \frac{t}{\sqrt{c}} \text{ \&c.}$$

Dans ces équations il faut entendre par cos A $\frac{t}{\sqrt{a}}$ le cosinus d'un arc de cercle, qui est égal à $\frac{t}{\sqrt{a}}$ & dont le rayon est égal à l'unité, & ainsi des autres. Outre cela les quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. marquent les tems, qu'un corps animé par la pesanteur naturelle employe pour tomber librement des hauteurs $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, &c.

Nous avons donc déterminé chacune des quantités x, y, z, &c. par le même tems t, & par conséquent la distance absoluë du corps au dernier point fixe, laquelle distance est $= x + y + z +$ &c. Nous avons pareillement déterminé pour chaque instant les vitesses rélatives u', u'', u''', &c. & la vitesse absoluë du point A exprimée par $u' + u'' + u''' +$ &c. de même que les élémens de toutes ces vitesses.

XXIV. On pourra, au lieu des tems exprimés par $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. considérer les tems qui répondent à une vibration simple rélative du point A par rapport au point B; & puis du point B par rapport au point C, ensuite du point C par rapport au point D. Si nous désignons donc ces tems par θ', θ'', θ''' &c. & que π soit la demi-circonférence d'un cercle qui a l'unité pour rayon, il faudra supposer dans

X 3 les

166

les équations du precédent article $\sqrt{a} = \frac{\theta'}{\pi}$, $\sqrt{b} = \frac{\theta''}{\pi}$, $\sqrt{c} = \frac{\theta'''}{\pi}$, après lesquelles substitutions toutes les quantités deviennent manifestement homogenes.

Soit, par exemple, $\theta' = 1''$, $\theta'' = 2''$, $\theta''' = 3''$, & qu'il soit question de déterminer toutes les circonstances du mouvement en faisant $t =$ un quart de seconde; je dis qu'on aura $x = \alpha \operatorname{cos} A \frac{\pi t}{\theta'} = \alpha \operatorname{cos} A \frac{1}{4}\pi = \alpha \sqrt{\frac{1}{2}}$; $y = \beta \operatorname{cos} A \frac{\pi t}{\theta''} = \beta \operatorname{cos} A \frac{1}{8}\pi = \beta \operatorname{cos} 22^\circ 30'$, & $z = \gamma \operatorname{cos} A \frac{\pi}{12} = \gamma \operatorname{cos} 15^\circ$; donc $x + y + z = 0{,}70710\, \alpha + 0{,}92387\, \beta + 0{,}96592\, \gamma$, laquelle quantité marque la distance du corps A au point D après un quart de seconde de tems. On aura ensuite $u' = \sqrt{\frac{\alpha\alpha - xx}{a}} = \frac{\alpha}{\sqrt{a}} \operatorname{sin} A \frac{1}{4}\pi$; $u'' = \sqrt{\frac{\beta\beta - yy}{b}} = \frac{\beta}{\sqrt{b}} \operatorname{sin} A \frac{1}{8}\pi = \frac{\beta}{2\sqrt{a}} \operatorname{sin} A \frac{1}{8}\pi$, & $u''' = \frac{\gamma}{3\sqrt{a}} \operatorname{sin} A \frac{1}{12}\pi$. De là il résulte pour notre exemple la vitesse absoluë $u' + u'' + u''' = \frac{6\,\alpha \operatorname{sin} 45^\circ + 4\,\beta \operatorname{sin} 22^\circ 30' + 2\,\gamma \operatorname{sin} 15^\circ}{6\,\gamma\, a}$

XXV. Mais, sans nous arrêter à cette sorte de déterminations, qui n'ont pas trop de rapport avec ce que je me suis proposé de principal, examinons plutôt sous quelles circonstances la vitesse absoluë $u' + u'' + u'''$ peut devenir $= 0$, en nous bornant aux trois especes de vibrations simples mêlées ensemble. Il faudra pour cet effet, en vertu du §. 23, faire $\sqrt{\frac{\alpha\alpha - xx}{a}} + \sqrt{\frac{\beta\beta - yy}{b}} + \sqrt{\frac{\gamma\gamma - zz}{c}} = 0$ substi-

167

ſubſtituons pour x, y, & z leur valeur en t, & nous aurons $\frac{\alpha}{\sqrt{a}}\,\text{ſin A}\,\frac{t}{\sqrt{a}} + \frac{\beta}{\sqrt{b}}\,\text{ſin A}\,\frac{t}{\sqrt{b}} + \frac{\gamma}{\sqrt{c}}\,\text{ſin A}\,\frac{t}{\sqrt{c}} = 0.$ Je me propoſe de déterminer la valeur de t, qui ſatisfaſſe à cette équation dans quelque exemple particulier. Nous ſuppoſerons donc θ''' ou $\pi\sqrt{c} = 2\,\theta''$ ou $2\pi\sqrt{b} = 3\,\theta'$ ou $3\pi\sqrt{a}$, c'eſt à dire nous ſuppoſerons, que, pendant que le point C fait une vibration pour le point fixe D, le point B en faſſe deux pour le point C, & le point A en faſſe trois pour le point B, laquelle ſuppoſition demande $\sqrt{c} = 2\sqrt{b} = 3\sqrt{a}$. Là deſſus notre équation donnera

$$3\,\alpha\ \text{ſin A}\ \frac{3\,t}{\sqrt{c}} + 2\,\beta\ \text{ſin A}\,\frac{2\,t}{\sqrt{c}} + \gamma\ \text{ſin A}\ \frac{t}{\sqrt{c}} = 0.$$

Soit à préſent ſin $A\frac{t}{\sqrt{c}} = q$, & on aura ſin A $\frac{2\,t}{\sqrt{c}}$, c'eſt à dire le ſinus de l'arc double $= 2\,q\sqrt{(1 - qq)}$ & ſin A $\frac{3\,t}{\sqrt{c}} = 3q - 4q^3$, & là deſſus nous aurons

$$3\,\alpha\,(3q - 4q^3) + 2\,\beta \times 2q\sqrt{(1 - qq)} + \gamma q = 0,$$

ou bien

$$9\,\alpha - 12\,\alpha\,qq + 4\,\beta\sqrt{(1 - qq)} + \gamma = 0.$$

Par la premiere des ces équations on voit déjà, qu'on peut faire $q =$ ſin A $\frac{t}{\sqrt{c}} = 0$, ce qui donne $z = \gamma$ coſ A $\frac{t}{\sqrt{c}} = \pm\gamma$; $y = \beta$ coſ A $\frac{t}{\sqrt{b}} = \beta$ coſ A $\frac{2\,t}{\sqrt{c}} = \beta$, & $x = \pm\alpha$, & par conſéquent $x + y + z = \pm\alpha + \beta \pm \gamma$. C'eſt là le cas qui s'offre de ſoi-même; mais il y en a encore d'autres indiqués par la ſeconde équation, qui peuvent être très réels. Pour abréger le calcul, nous nous bornerons

rons aux cas qui sont $9\alpha + \gamma = 4\beta$; & dans ces cas on trouve le sin A $\frac{t}{\sqrt{c}}$ ou bien

$$q = \pm \frac{\sqrt{(6\alpha\beta - \beta\beta)}}{3\alpha};$$

& ensuite le cos A $\frac{t}{\sqrt{c}}$ ou bien

$$\sqrt{(1-qq)} = \pm \frac{\sqrt{(9\alpha\alpha - 6\alpha\beta + \beta\beta)}}{3\alpha} = \pm\left(1 - \frac{\beta}{3\alpha}\right).$$

De là on obtient $z = \pm\gamma\left(1 - \frac{\beta}{3\alpha}\right)$,

cette valeur de z marque déjà la position du point C; on trouvera ensuite la valeur de y, & enfin celle de x, & par là on aura déterminé les positions des trois points C, B, & A.

On voit donc que notre question est le plus souvent susceptible de plusieurs solutions très réelles, quoiqu'elles ne le soyent pas toujours: car dans le cas présent il faut que la quantité $\frac{\beta}{3\alpha}$ soit toujours un nombre affirmatif, & que β soit plus petit que 6α.

Descendons ici à un exemple tout particulier: supposons $\beta = 4\alpha$ & par conséquent $\gamma = 7\alpha$. Dans ce cas il faut prendre $\sqrt{(1-qq)}$ négativement, & faire $\sqrt{(1-qq)} = -\frac{1}{3}$, ce qui donne l'arc $\frac{t}{\sqrt{c}}$ de $109^d, 28'$, dont le cosinus est $= -\frac{1}{3}$; l'arc $\frac{2t}{\sqrt{c}}$ de $218^d, 56'$, dont le cosinus est $= -0,77787$; & l'arc $\frac{3t}{\sqrt{c}}$ de $328^d, 24'$, dont le cosinus est $= 0,83172$. Ces valeurs donnent $z = -\frac{1}{3}\gamma = -\frac{7}{3}\alpha$;

$y =$

169

$y = -0,77787\,\beta = -3,11148\,\alpha$; & $x = 0,85172\,\alpha$, & par conſéquent $x + y + z = -4,59309\,\alpha$. Ainſi la diſtance initiale du corps A depuis le point D étant exprimée par 12, il y aura encore deux poſitions du corps A, dans leſquelles ſa viteſſe abſoluë ſoit nulle, & ſes diſtances au point D ſeront alors -4 & $-4,59309$.

XXVI. Voici à preſent la nature du mouvement abſolu du corps A par rapport au point fixe D; la figure 8 marque les points capitaux avec la juſte proportion des diſtances. Je dis donc que le corps partant du point A ſera d'abord accéléré & enſuite retardé, après quoi il ſera arrêté pour un moment au point B; il rebrouſſera de là jusques au point C, où il repoſera encore un inſtant; du point C il retournera vers le point B en s'y arrêtant de nouveau pendant un inſtant, & du point B enfin il retournera au point A dont il étoit parti, où ſa viteſſe ſera encore nulle, & alors tout ſera réduit à ſon premier état. Outre cela le tems employé pour faire la premiere vibration A B eſt exprimé par l'arc $109^{d}.\,28'$, le tems pour faire la ſeconde petite vibration B C par l'arc $70^{d}.\,32'$; ce ſecond tems ſera encore employé pour faire la troiſième vibration C B, & le premier tems pour faire la quatrième vibration B A. Si on exprime donc tout le tems, que le corps employe avant que de ſe remettre en ſon premier état, par 21600, la premiere vibration employera 6568 de même que la quatrième, pendant que chacune des deux moyennes employera 4232. Comme dans cet exemple la ſeconde & la troiſième excurſion ſont très petites, le mouvement du corps paroitra comme presque en repos pendant preſque la moitié du tems entier. Mais on auroit pu choiſir d'autres exemples, où les excurſions partielles ſeroient devenuës comme égales & comme iſochrones, & alors c'eſt une queſtion, ſi le corps doit être cenſé avoir fait quatre vibrations, ou deux; dans le ſens de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, il faudroit toujours dire, qu'il n'en auroit fait que deux, quoiqu'on put lui faire faire cent allées & venuës toutes preſque égales, & preſque iſochrones, & dont les mouvemens ſe feroient preſque entierement ſelon les loix des mouvemens iſochrones ſimples & ordinaires.

Mém. de l'Acad. Tom. IX. Y XXVII.

XXVII. Ce que je viens de dire du mouvement du corps A, arrive parfaitement à chaque point dans les nouvelles vibrations des cordes: je me contenterai, pour faire voir cette entiere conformité, d'expliquer le mêlange des deux premieres especes de vibrations les plus simples, exprimées par les deux premieres figures. J'ai représenté ce mêlange par la figure sixième, dont j'ai donné la construction au §. 8. Soit dans cette courbe absoluë A p a q B la plus grande appliquée rélative $pm = \rho$, la plus grande appliquée ar de la courbe idéale A m a n B $= \sigma$; & soit encore la longueur de la corde entiere A B $= a$; qu'on prenne une abscisse quelconque A $b = x$ avec son appliquée $b\,d$; là-dessus on aura en vertu de la Théorie de M. *Taylor* $c\,d = \rho \sin \frac{2\pi x}{a}$ & $b\,c = \sigma \sin \frac{\pi x}{a}$, & par conséquent l'appliquée $b\,d = \rho \sin \frac{2\pi x}{a} + \sigma \sin \frac{\pi x}{a}$. Soit $b\,d = y$, on aura, en supposant dx constante, $ddy = \left(\frac{4\pi\pi}{aa}\rho \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{\pi\pi}{aa}\sigma \sin \frac{\pi x}{a}\right) dx^2$; or, nommant P le poids qui tend la corde, & p le poids de la corde tenduë & uniforme, on sait que la force accélératrice absoluë du point d est exprimée par $\frac{P}{p} \cdot \frac{a\,ddy}{dx^2}$; cette force accélératrice sera donc ici $\frac{P}{p} a \left(\frac{4\pi\pi}{aa}\rho \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{\pi\pi}{aa}\sigma \sin \frac{\pi x}{a}\right)$ ou bien $=$ $\frac{4P}{p} \cdot \frac{\pi\pi\rho}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi\sigma}{a} \sin \frac{\pi x}{a}$, ce qui fait la force accélératrice entiere du point $d = \frac{4P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot cd + \frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot bc$. Nous voyons donc, que la force accélératrice entiere est composée de deux parties, dont la premiere est proportionelle à la distance dc, & qui fait faire au point d des vibrations isochrones rélatives au point c, qui fait

171

fait ici un centre de force mobile : la seconde partie de la force accélératrice du point d est $= \frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot bc$: or, par la nature de la courbe A can B, le point c est animé vers le point immobile b avec la même force accélératrice $\frac{P}{p} \cdot \frac{\pi\pi}{a} \cdot bc$; ainsi la seconde force produit constamment la même accélération aux points d & c, & ne fera que transporter la petite distance dc sans la changer aucunement. Nous sommes donc entierement dans le même cas que celui des §§. 19. & 20. Pour obtenir une entiere identité il faudra supposer dans la septième figure C D $= o$, A B $= dc$ & B C $= cb$, ou bien $\alpha = \rho$ sin $\frac{2\pi x}{a}$, $\beta = \sigma$ sin $\frac{\pi x}{a}$ & $\gamma = o$, & dans ces expressions la quantité x est constante par rapport au mouvement du même point d. Ainsi le mouvement de chaque point dans la courbe A daq B, sera par rapport à la courbe idéale A can B, le même que le mouvement absolu de la seconde figure, & le mouvement absolu de la courbe idéale A can B sera le même que celui de la premiere figure ; ainsi la vibration suivant la figure A daq B n'est absolument qu'un mêlange des vibrations suivant la premiere & la seconde figure combinées ensemble, dont chaque espece se fait indépendamment l'une de l'autre. Ce mouvement absolu du point d renferme réellement deux mouvemens périodiques, l'un par rapport au point c, & l'autre par rapport au point b ; le nombre des premiers retours périodiques sera toujours double de celui des seconds. L'esprit s'apperçoit de l'une & de l'autre espece de ces retours périodiques, & remarque par là un double son, dont l'un est l'octave de l'autre. Comme les petites quantités pm & ar désignées par ρ & σ peuvent avoir un rapport quelconque, on ne remarquera que la première espece de mouvemens périodiques en faisant pm beaucoup plus grande que ar, pendant qu'on ne sentira que la seconde espece en faisant ar beaucoup plus grande que pm ; dans le premier

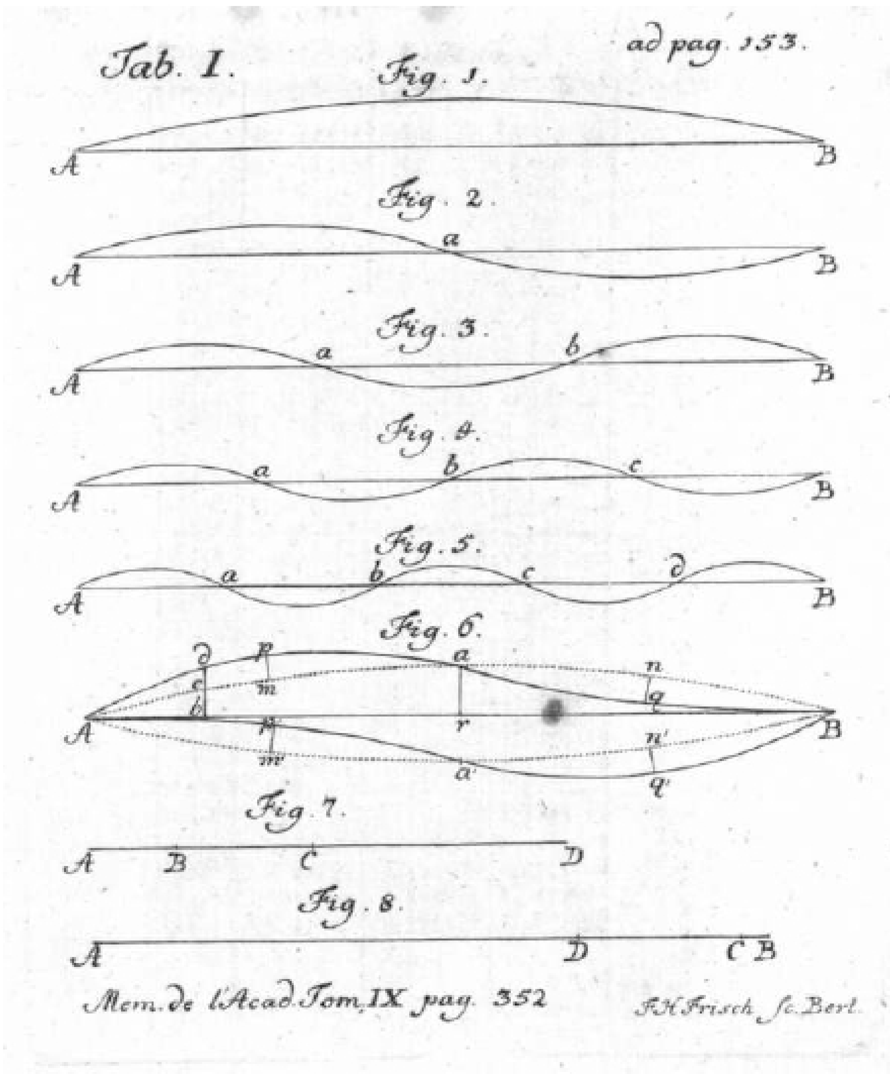
Y 2 cas

cas le tems d'une vibration eſt manifeſtement de la moitié plus petit que dans le ſecond, pendant que, ſelon la maniere d'enviſager ces vibrations de Mrs. d'*Alembert* & *Euler*, le tems de chaque période eſt toujours le même, quelque rapport qu'il y ait entre ϱ & σ, ce qui ne me paroit pas conforme au principe de continuité. Car ſi le tems d'une vibration eſt ſelon eux toujours t, quelque rapport qu'il y ait entre ϱ & σ, pourquoi devient-il manifeſtement $\frac{1}{2}\,t$ en faiſant $\sigma = 0$? Pour répondre à cette difficulté, il me ſemble qu'il faut néceſſairement dire, qu'il ſe fait en même tems une double eſpece de vibrations dans la corde, & que le mélange de ces deux eſpeces forme ce, que ces Géometres appellent vibrations ſimples; que la ſeconde eſpece diminuë à meſure qu'on diminuë la quantité σ, & qu'elle devient nulle en faiſant $\sigma = 0$; & alors il n'y aura aucune diſcontinuité.

XXVIII. J'eſpère que ce que je viens de dire dans ce Mémoire pourra ſervir à répandre plus de jour ſur la nature des nouvelles vibrations des cordes, trouvées avec tant de ſagacité par Mrs. d'*Alembert* & *Euler*; & c'étoit là tout mon but. Si la méthode dont ils ſe ſont ſervis pour réſoudre leurs problèmes eſt beaucoup plus difficile que la mienne, je n'en admire que d'avantage la ſupériorité de leur génie. Quant à la queſtion, ſi les nouvelles vibrations ſont réellement des vibrations ſimples & ſynchrones pour tous les points, ou ſi elles ne ſont pas plutôt un mélange de pluſieurs différentes vibrations coëxiſtantes dans une même corde, & toutes de différente durée, je n'en ai parlé que pour mieux expliquer la nature de ces vibrations, étant bien éloigné de faire une querelle à d'auſſi grands hommes ſur la ſignification de certains termes.

Je traiterai dans un ſecond Mémoire quelques nouveaux problèmes, dont la ſolution découle aſſez facilement de nos principes, & qui en même tems mettront cette matiere dans un nouveau jour.

SUR


Tab. I.
ad pag. 353.
Fig. 1.
A
B
Fig. 2.
a
A
B
Fig. 3.
a
b
A
B
Fig. 4.
a
b
c
A
B
Fig. 5.
a
b
c
d
A
B
Fig. 6.
d
p
a
n
c
m
q
b
A
r
B
p
n'
m'
a'
q'
Fig. 7.
A
B
C
D
Fig. 8.
A
D
C B
Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 352
J.H. Frisch sc. Berl.