Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 372–420
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

"DEMONSTRAÇÃO PURAMENTE ANALÍTICA DO TEOREMA QUE ENTRE DOIS VALORES QUAISQUER QUE FORNECEM RESULTADOS DE SINAIS OPOSTOS EXISTE PELO MENOS UMA RAIZ REAL DA EQUAÇÃO", DE BERNARD BOLZANO

João Bosco Pitombeira de Carvalho
Programa PROFMAT- Departamento de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de janeiro, Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2023)

Resumo

Apresentamos uma tradução do trabalho acima mencionado de Bernard Bolzano. Assim, o leitor brasileiro poderá ter acesso mais direto a um texto importante para a fundamentação da análise matemática sobre bases puramente aritméticas. Não analisaremos em profundidade o trabalho de Bolzano, reservando isso para oportunidades posteriores.

Palavras-chave: Matemática, História, Análise Matemática, Teorema de Bolzano-Weierstrass.

["PURELY ANALYTIC PROOF OF THE THEOREM THAT BETWEEN ANY TWO VALUES WHICH GIVE RESULTS OPPOSITE SIGN THERE LIES AT LEAST ONE REAL ROOT OF THE EQUATION" BY BERNARD BOLZANO.]

Abstract

We present a translation into Portuguese of the above mentioned paper by Bernard Bolzano so that Brazilian readers may have a more direct access to this important work in establishing the foundations of mathematical analysis upon a strictly arithmetical basis. We do not analyse in detail Bolzano's work, postponing this to later publications.

Keywords: Mathematics, History, Mathematical Analysis, Bolzano-Weierstras theorem.

1. Apresentação

O trabalho "demonstração puramente analítica do teorema que entre dois valores quaisquer que fornecem resultados de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação", de Bernard Bolzano (1781–1848) é de fundamental importância na história da matemática. Embora as contribuições de Cauchy e Weierstrass tenham se difundido amplamente como passos decisivos na consolidação da análise matemática, o texto de Bolzano, publicado em Praga, em 1817, é anterior ao *Cours d'Analyse* de Cauchy, de 1821. Encontramos no trabalho de Bolzano a definição de continuidade de uma função, o "critério de convergência de Cauchy", a noção de *supremum* de um conjunto limitado de números reais. Sinaceur ressalta a diferença profunda entre "o estilo analítico de Bolzano, com suas tendências lógicas profundas que caracterizam o que será mais tarde chamado rigor weierstrassiano, e a maneira de Cauchy que permanece, malgrado inovações técnicas importantes, impregnada da geometrização tradicional" (SINACEUR, 1973, p. 97).

Pelo que sabemos, esta é a primeira tradução em lingua portuguesa do citado trabalho de Bolzano. Conhecemos uma tradução para o inglês por S. B. Russ (1980) e para o francês por J. Sebestik (1964b).

O texto de Bolzano, de 1817, foi reimpresso, em edição facsímile, em 1894 (BOLZANO, 1894). Outra edição é de 1905, na coleção *Ostwald's Klassiner der exakten Wissenschaften*.

Para nosso trabalho, cotejamos os textos de Bolzano (1905), Sebestik (1964b) e Russ (1980). Russ usou Sebestik, copiando o hábito de empregar excesso de palavras em itálico. Tentamos seguir a notação original de Bolzano, por exemplo fx em vez de $f(x)$, mas reproduzimos algumas modificações feitas por Sebestik ao lidar com séries e sequências. Além de reproduzir as notas de rodapé de Bolzano, repetimos, por achá-las importantes, algumas de Sebestik. A divisão de parágrafos nas várias traduções de Bolzano varia. Seguimos consistentemente a da edição (BOLZANO, 1894).

Bibliografia

BOLZANO, Bernard. 1894. *Rein analytischer beweis des Lehrsatzes das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Berlin: Mayer & Müller. Facsimile von Prag: Gottlieb Haase, 1817,

BOLZANO, Bernard. 1905. *Rein analytischer beweis des Lehrsatzes das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, 1817. Reimpressão facsimile em Leipzig: W. Engelmann, 1905. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, nr. 153.

GAUSS, Karl Friedrich. 1856. *Werke. Dritte Band*. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenchaften.

RUSS, S. B. 1980. A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem. *Historia Mathematica* 7, pp. 156 – 185.

SEBESTIK, J.. 1964a. Bernard Bolzano et son Mémoire sur le théorème fundamental de l'Analyse. *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications* 17(2), pp. 129–135.

SEBESTIK, J.. 1964b. Traduction du "Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation" de Bolzano. *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications* 17(2), pp. 136 – 164.

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho

Programa PROFMAT – Departamento de Matemática e Estatística – UERJ – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

ORCID: 0000-0002-0411-9565

E-mail: jbpfcarvalho@gmail.com

2. A tradução do trabalho de Bolzano.

DEMONSTRAÇÃO PURAMENTE ANALÍTICA DO TEOREMA QUE ENTRE DOIS VALORES QUAISQUER QUE FORNECEM RESULTADOS DE SINAIS OPOSTOS EXISTE PELO MENOS UMA RAIZ REAL DA EQUAÇÃO POR BERNARD BOLZANO

PREFÁCIO

Há duas proposições na teoria das equações de que se poderia ainda dizer, até há pouco tempo, que uma demonstração completamente correta era desconhecida. Uma delas é a proposição: *que entre dois valores quaisquer da grandeza desconhecida que fornecem resultados de sinais opostos haverá sempre pelo menos uma raiz real da equação*. A outra é: *qualquer função algébrica racional inteira de uma grandeza variável pode ser decomposta em fatores reais do primeiro ou do segundo grau*. Após várias tentativas fracassadas para demonstrar a segunda proposição por D'Alembert, Euler, de Foncenex, Lagrange, Laplace, Klüge, e outros, Gauss finalmente forneceu, no ano passado, duas demonstrações que pouco deixam a desejar. Com efeito, este renomado matemático[1] já nos tinha apresentado uma demonstração dessa proposição em 1799,[2] a qual contudo tinha, como admitido por ele, o defeito de que demonstrava uma verdade analítica baseando-se em uma consideração geométrica. Mas suas duas demonstrações mais recentes[3,4] não têm esse defeito; as funções trigonométricas que são usadas podem, e devem, ser compreendidas em um sentido puramente analítico.

A outra proposição mencionada acima é daquelas que até hoje não preocuparam muito os estudiosos. Contudo, existem matemáticos de excelente reputação que se dedicaram à proposição, e já foram tentadas demonstrações de diferentes tipos. Para se convencer disso, é suficiente comparar os vários tratamento da proposição como os feitos por Kästner,[5] Clairaut,[6] Lacroix,[7] Metternich,[8] Klügel,[9] Lagrange,[10] Rösling,[11] e muitos outros.

Contudo, um exame mais cuidadoso mostra rapidamente que nenhuma dessas demonstrações pode ser considerada adequada.

---

[1] Russ usa o termo "scholar" para designar Gauss. Na versão original em alemão, Bolzano usa simplesmente "Herr Gauss". Sebestik (1964b) traduz corretamente Herr por M. (Monsieur).

[2] *Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadii. 4º 1799. Nota do autor.

[3] *Demonstratio nova altera, etc.,* e *Demonstratio nova tertia*: ambos de 1816. Nota do autor.

[4] Segundo as obras completas de Gauss (1856), o *Demonstratio nova altera, etc.,* é de fato de 1815 e o *Demonstratio nova tertia*... é de 1816. Nota do autor.

[5] *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen.* 3rd ed., Sect. *316.* Nota do autor.

[6] *Élémens d'algèbre.* 5th ed., *Supplemens,* Chap. I, Nº. 16. Nota do autor.

[7] *Élémens d'algèbre.* 7th ed. Nota do autor.

[8] Em sua tradução do trabalho citado de Lacroix. Mains, 1811. Sect. 211. Nota do autor.

[9] Em seu *Mathematisches Wörterbuch.* vol. 2, p. 447 ff. Nota do autor.

[10] *Traité de la résolution des équations numériques de tous les dégrés.* Paris, 1808. Nota do autor.

[11] *Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Functionen.* Teil I, Sect. 49. Nota do autor.

I. As pessoas apoiam-se, no tipo mais comum de demonstração, em uma verdade tomada de empréstimo à geometria: especificamente, que qualquer linha continua com curvatura simples cujas ordenadas são inicialmente positivas e depois negativas (ou inversamente) tem que necessariamente cortar o eixo dos x em algum ponto que está situado entre essas ordenadas. Certamente não pairam dúvidas sobre a verdade e mesmo também sobre a obviedade desta proposição geométrica. Mas é claramente uma ofensa intolerável ao método correto de querer fazer deduções em matemática pura (ou geral) (i.e. aritmética, álgebra e análise) a partir de considerações de uma parte aplicada (ou especial) da mesma, ou seja, a geometria. Com efeito, há muito tempo que é sentida e reconhecida a incongruência de tais $\mu\varepsilon\tau\alpha\beta\alpha\sigma\ is\ \varepsilon\ is\ '\alpha\ \lambda\lambda o\ \gamma\varepsilon\nu\ os$. Já se tem evitado isso sempre que possível em centenas de outros casos e considerado tais eliminações como mérito.[12] Assim, se quisermos ser consistentes não se deve esforçar-se para fazer o mesmo aqui? Em verdade, se considerarmos que as demonstrações científicas não deveriam ser meras confirmações [Gewissmachungen] mas sim justificações [Begründungen], ou seja, apresentações da razão objetiva da verdade considerada, então é auto evidente que o método estritamente científico, ou a razão objetiva de uma verdade válida para todas as grandezas, espaciais ou não, não pode basear-se em uma verdade que válida somente para as grandezas espaciais. Ao adotar-se firmemente essa concepção percebe-se realmente no presente caso, como em muitos outros, que uma demonstração geométrica desse tipo é realmente circular. Pois enquanto que a verdade geométrica mencionada aqui é (como já foi dito) extremamente evidente e portanto embora não necessite de demonstração no sentido de confirmação,[13] necessita contudo de justificação.[14] Pois os conceitos que a compõem são combinados de maneira tão óbvia que não se pode hesitar nem por um momento em afirmar que não se trata de uma dessas verdade simples que são chamadas de proposições básicas [Grundsätze], ou verdades básicas pois são somente a razão de outras verdades, e não consequência delas. Ao contrário, trata-se de um teorema ou verdade consequente [Folgewahrheit]; ou seja, uma verdade que se baseia em outras verdades e, portanto, na ciência, tem que ser deduzida dessas outras verdades.[15] Considere, quem assim desejar, a razão objetiva do porque uma linha nas circunstâncias mencionadas intercepta o eixo dos x. Sem nenhuma dúvida, qualquer um perceberá rapidamente que essa razão reside somente naquela verdade geral, da qual decorre o fato que qualquer função contínua fxque é positiva para um valor de x e negativa para outro tem que se anular para algum valor intermediário de x. E essa é exatamente a verdade que tem que ser demonstrada. É portanto completamente errado permitir que a ultima fosse deduzida da primeira (como acontece na demonstração que estamos examinando). Em verdade, trata-se da situação oposta, a

[12] Os trabalhos do professor Gauss já citados são um exemplo. Nota do autor.

[13] *Gewissmachung* (*Nota deste tradutor*).

[14] *Begründung* (*Nota do tradutor*).

[15] Compare meu *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* [lª edição (Praga, 18101, Seç. II, subseções 2, 10, 20, 21], na qual os conceitos lógicos que aqui supus conhecidos são mais extensamente desenvolvidos.

primeira tem que ser deduzida da segunda, se desejarmos descrever as verdades na ciência exatamente da maneira como se relacionam entre si em sua coerência objetiva.

II. Igualmente sujeita a crítica é a demonstração que algumas pessoas construíram usando o conceito de continuidade das funções de uma maneira que envolve os conceitos de tempo e movimento. “Se duas funções fx e φx, dizem, “variam de acordo com a lei da continuidade, e se para $x=\alpha\; fa<\varphi a$, mas para $x=\beta$, $fx>f\beta$, então deve existir algum valor μ, entre α e β para o qual $f\mu=\varphi\mu$. Porque se imaginarmos que a grandeza variável *x*, em ambas as funções, assume gradualmente todos os valores entre α e β e o mesmo valor é assumido por ambas exatamente nos mesmos instantes, então no início dessa mudança contínua de x, $fx<\varphi x$, e no término, $fx>\varphi x$. Mas como ambas as funções, devido às suas continuidades, devem primeiro percorrer todos os valores intermediários antes de poderem atingir um valor maior, tem que haver algum momento intermediário em que elas têm valores iguais.” Isso é ilustrado pelo movimento de dois corpos, um dos quais inicialmente está atrás do outro e mais tarde à sua frente. Segue-se necessariamente que em algum momento os dois têm que estar emparelhados.

Ninguém duvidará que os conceitos de tempo e movimento são tão estranhos à matemática geral quanto o conceito de espaço. No entanto, se esses conceitos forem introduzidos aqui somente para fins de tornar as coisas mais claras, não teríamos nenhuma objeção. Pois de maneira nenhuma defendemos tal purismo exagerado que exige, a fim de não introduzir na ciência qualquer coisa estranha a ela, que em sua exposição nunca se pode empregar uma expressão de outra área, mesmo simplesmente em sentido metafórico e com a finalidade de descrever um fato mais resumida e claramente do que poderia ser feito por uma descrição estritamente literal, nem mesmo para evitar a repetição irritante da mesma palavra, ou para relembrar, simplesmente pelo nome dado a uma coisa, um exemplo que serviria para confirmar a asserção. Assim deve-se mencionar que não achamos que exemplos e aplicações prejudicam a perfeição de um texto científico. Por outro lado, exigimos somente o seguinte: que exemplos nunca substituam demonstrações e que a essência [Wesenheit] de uma dedução nunca se baseie simplesmente no uso metafórico de frases ou ideias relacionadas com elas de tal maneira que a própria dedução se tornaria vazia se essas frases ou ideias fossem mudadas.

Desse ponto de vista, a inclusão do conceito de tempo na demonstração apresentada acima pode talvez ser desculpada, pois nenhuma conclusão se baseia em frases que o contém e que não se verificariam sem ele. Mas de nenhuma maneira essa exemplificação, que usa o movimento de um corpo, pode ser considerada nada mais do que um mero exemplo que não demonstra a proposição, e que em verdade tem que ser demonstrada por ela.

(a) Assim, abandonemos este exemplo e examinemos o restante do raciocínio. Observemos em primeiro lugar que ele se fundamenta em um conceito errado de continuidade. De acordo com uma definição correta, compreende-se com esta expressão precisamente que *se uma função* fx varia *de acordo com a lei da continuidade para todos os valores de x entre certos limites, ou além deles*,[16] significa simplesmente que: *caso x for*

[16] Há funções que variam continuamente para todos os valores de suas raízes, por exemplo $\alpha+\beta x$. Mas há outras que são contínuas somente para os valores de suas raízes dentro ou fora de certos limites. Assim

um desses valores, a diferença $f(x+\omega)-fx$ *pode ser tornada menor do que qualquer grandeza se tomarmos* ω *suficientemente pequeno*. Ou seja, com a notação que introduzimos na Seção 14 do *Binomische Lehrsatz*, etc. Praga, 1816), isso significa que $f(x+w)=fx+\Omega$.# Mas, como suposto nessa demonstração, uma função contínua nunca atinge um valor maior sem primeiro ter assumido todos os valores menores, i.e., Δx pode assumir qualquer valor entre fx e $f(x+n\,\Delta x)$ quando n assume valores entre 0 e 1. Ora, isso é certamente absolutamente correto, mas não pode ser considerado uma definição do conceito de continuidade mas, ao contrário, um teorema sobre continuidade. Com efeito, é um teorema que somente pode ser demonstrado se for aceita a proposição que deve em verdade ser demonstrada por ele. Com efeito, se M representa alguma grandeza entre fx e $f(x+\Delta x)$, então a afirmação de que existe um valor de n entre 0 e 1 para o qual $f(x+n\,\Delta x)=M$ é somente um caso especial da verdade geral que se $fx<\phi x$, e $f(x+\Delta x)>\phi(x+\Delta x)$, então deve existir algum valor intermediário $x+n\,\Delta x$ para o qual $f(x+n\,\Delta x)=\phi(x+n\,\Delta x)$. A primeira afirmativa é consequência dessa verdade geral no caso especial em que a função ϕ tem o valor constante M

(b) Mas mesmo que seja suposto que se poderia demonstrar essa proposição de outra maneira, a demonstração que estamos examinando conteria outro erro. Ou seja, do fato de que $fa>\phi\,a$ mas $f\,\beta<\phi\beta$, decorreria somente que, se u for algum valor entre α e β para o qual $\phi\,u$ é $>\phi\,a$ mas $<\phi\beta$, então fx se tornaria igual a $\phi\,u$ quando varia de $f\,\alpha$ a $f\,\beta$; ou seja, para algum x que está entre α e β, decorre que $fx=\phi\,u$. Mesmo caso isso acontecesse para os valores de x que são iguais a *u*; ou seja (pois *u* pode representar um valor arbitrário entre α e β que faz com que $\phi\,u>\phi\alpha$e < $\phi\beta$), mesmo se existisse algum valor de *x* entre entre α e β para o qual as duas funções fx e $\phi\,x$ se tornassem iguais então mesmo assim isso ainda não seria uma consequência.

(c) A falacidade da demonstração reside principalmente na inclusão do conceito de tempo. Se ele fosse omitido seria visto imediatamente que a demonstração nada mais é do que uma repetição, com palavras diferentes, da proposição que deve ser demonstrada. De fato, afirmar que a função fx antes que passe da situação de ser menor do que $\phi\,x$ à de ser maior deve em primeiro lugar passar pela situação de ser igual a $\phi\,x$ é afirmar, sem o conceito de tempo, que entre os valores assumidos por fx, se considerarmos todos os valores de x entre α e β, há um que torna $fx=\phi\,x$. Isso é exatamente a proposição que se deve demonstração.

III. Algumas outras pessoas demonstram nossa proposição baseando-se no seguinte (sem nenhuma prova ou simplesmente apoiadas em exemplos pedidos emprestados à geometria): “Qualquer grandeza variável pode passar de um estado positivo a um estado negativo somente se passar pelo estado de ser zero ou infinito”. Como o valor de uma equação não pode ser infinitamente grande para qualquer valor finito da raiz, se conclui que qualquer transição tem que passar por zero.

$x+\sqrt{(1-x)(2-x)}$ é continua somente para valores de $x>+1$ ou >+2 mas não para valores entre +l e +2.

Bolzano define a continuidade de uma função real usando o valor absoluto da diferença $|f(x+\omega)-f(x)|$. Isso será feito em seu Funktionenlehre (cf. ed. de Praga, 1930, p. 14). A definição de Cauchy data de 1821. (Sebestik, 1964b)

(a) Caso se queira retirar da proposição acima a ideia imprópria de uma transição, a qual contém o conceito de uma mudança no tempo e no espaço, para omitir, desse modo, a expressão sem sentido de um estado de não-existência, chega-se por fim à seguinte proposição: “Se for encontrada uma grandeza variável que depende de outra grandeza x e que é positiva quando $x=\alpha$ e negativa quando $x=\beta$, existe sempre um valor de x situado entre α e β para o qual a grandeza é zero ou um valor para o qual ela é infinita.” Certamente todos percebem que uma tal afirmação composta não é uma verdade básica, mas teria quer ser demonstrada, e que sua demonstração dificilmente seria mais fácil do que a proposição que desejamos estabelecer.

(b) Com efeito, um exame mais detalhado mostra que a afirmativa é fundamentalmente idêntica à proposição. De fato, não deve ser esquecido que essa afirmativa é realmente verdadeira somente se ela se refere a grandezas *que variam continuamente*. Assim, por exemplo, a função $x+\sqrt{(x-2)(x+1)}$é positiva quando $x=+2$ e negativa quando $x=-1$; no entanto entre esses limites não varia seguindo a lei de continuidade, não há nenhum valor entre 2 e -1 para o qual a função seja igual a zero ou infinita. Contudo, se limitarmos a asserção exclusivamente a grandezas que variam continuamente devemos também excluir as funções que se tornam infinitas para um certo valor de suas raízes. De fato, uma função como $a/(b-x)$ em verdade não varia continuamente para todos os valores de x, mas somente para todos os valores que são maiores ou iguais a b. Isso acontece pois a função não tem um valor determinado quando $x=b$, mas se torna o que chamamos de infinitamente grande. Assim não se pode dizer que os valores que ela assume para $x=b+\omega$ que forem todos determinados podem ser tão próximos quanto desejarmos de seu valor quando $x=b$. E isso é uma parte do conceito de continuidade (IIa). Adicione-se o conceito de continuidade à afirmação acima, omitindo o caso em que a função se torna infinita. Tem-se então, ao pé da letra, a proposição original que devia-se demonstrae: exatamente que qualquer função continuamente variável de x que é positiva para $x=\alpha$ e negativa para $x=\beta$ tem que ser igual a zero para algum valor entre α e β.

IV. Em alguns trabalhos pode-se encontrar a seguinte argumentação: “Como fx é positiva para $x=\alpha$ e negativa quando $x=\beta$, tem que haver duas grandezas *a* e *b* entre α e β para as quais a transição do valor positivo para o valor negativo de fx ocorre, e assim entre *a* e *b* não podem ocorrer valores de x para os quais fx ainda seria positiva ou negativa," etc. Este erro mal vale a pena ser refutado e não seria mencionado aqui se isso não servisse para demonstrar quão pouco claros são os conceitos de alguns matemáticos bem reputados sobre esse assunto. É bem conhecido que entre quaisquer dois valores próximos de uma variável independente, como a raiz x de uma função, há sempre infinitamente muitos valores intermediários. E da mesma maneira que dada uma função continua, não há um último x que a torne positiva e nem um primeiro x que a torne negativa, segue-se que não há números como a e b aqui descritos!

V. O fracasso dessas tentativas de demonstrar diretamente a proposição com que nos ocupamos leva à ideia de deduzi-la da segunda proposição que mencionamos no início, ou seja, usar a decomposição de qualquer função em certos fatores. Também não há dúvida de que se aceitarmos este último fato, pode-se chegar à conclusão do segundo. Mas em verdade uma tal dedução não poderia ser chamada uma justificação estritamente cientifica, pois a segunda proposição expressa claramente uma verdade muito mais complexa do que a primeira. Assim, a segunda pode seguramente se basear na primeira, mas não a primeira na segunda. Em verdade, ninguém conseguiu realmente provar até hoje a segunda sem aceitar a primeira. No que diz respeito às demonstrações, cuja inaceitabilidade já tinha sido mostrada por Gauss em seu trabalho de 1799, é porque, como já foi mostrado serem elas inaceitáveis, torna-se desnecessário investigar se elas se baseiam ou não em nossa proposição. Da mesma maneira, a demonstração de Laplace[17] tem seus defeitos que não necessitamos mencionar aqui, pois ela se baseia explicitamente sobre nossa proposição. Também não precisamos considerar a primeira demonstração de Gauss, pois ela se baseia em considerações geométricas. Além do mais, seria fácil mostrar que mesmo naquela demonstração nossa proposição é implicitamente aceita, devido ao fato que as considerações geométricas utilizadas são bem semelhantes às que mencionei em I. De maneira que tudo depende das *Demonstratio nova altera* et *Demonstratio nova tertia* de Gauss. A primeira se refere explicitamente à nossa proposição quando pressupões na página 30: *aequationem ordinis imparis certo solubilem esse* – uma asserção que, como se conhece bem, é simplesmente uma consequência fácil de nossa proposição. Não é tão óbvio que o *Demonstratio nova tertia* depende de nossa proposição. Ela se baseia, entre outras coisas, no seguinte teorema: se uma função permanece positiva para todos os valores de sua grandeza variável x que estão situados entre α e β, então sua integral de $x=\alpha$ a $x=\beta$ tem um valor positivo. Mas, na demonstração desse teorema feita por Lagrange[18] não é feita referência explícita à nossa proposição. No entanto, essa demonstração de Lagrange ainda contém uma falha. É exigido que a grandeza i seja tomada suficientemente pequena de tal maneira que

$$\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x<\frac{f'x+f'(x+i)+f'(x+2i)+\cdots+f'(x+(n-l)i)}{n},$$

enquanto que o produto $i \bullet n$ deve permanecer igual a uma grandeza dada, e a notação bem conhecida $f'x$ representa a primeira função derivada de fx. Surge agora o problema de saber se essa exigência pode ser satisfeita? Não importa quão pequeno se tome i, de maneira a diminuir a diferença

$$\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x,$$

o divisor, n, do lado direito tem que ser feito convenientemente grande, a fim de que $i \bullet n$ permaneça constante. E mais, o conjunto de termos no numerador aumenta; mas falta ainda mostrar se, devido à diminuição de *i*, que o valor de toda a fração não diminui tanto quanto ou mesmo mais rapidamente que a expressão

$$\frac{f(x+i)-fx}{i}-f'x.$$

[17] No *Journal de l'École Normale,* ou também S. F. Lacroix*, Traité du calcul différentiel et intégral.* T. I. Nos. 162,163.

[18]*Leçons sur le calcul des fonctions.* Paris, 1806. Nouvelle ed., Let. 9, p. 89.

Ora, caso se deseje sanar essa falha, seguramente isso só poderá ser feito com uma referência à nossa proposição já vista, pois tivemos que nos referir a essa última para a demonstração de um teorema[19] que, embora muito mais simples, está relacionado com essa demonstração de Lagrange.

Desta maneira, todas as demonstrações da proposição que forma o título desse trabalho são imperfeitas. Agora, a que apresento aqui para o julgamento dos estudiosos, contém, como eu ouso congratular-me, não uma simples confirmação, mas a justificação objetiva da verdade a ser demonstrada, ou seja, ela é estritamente científica.[20]

O seguinte é um pequeno resumo do método adotado.

A verdade que deve ser demonstrada, que entre dois valores α e β que fornecem resultados de sinal oposto sempre há pelo menos uma raiz real, se baseia claramente na verdade mais geral que, se duas funções de x, fx e $\phi\, x$, gozam da propriedade que, para $x=\alpha$,$fa<\phi\alpha$ e quando $x=\beta$, $f\ \beta>\phi\beta$, deve existir algum valor de x situado entre α e β para o qual $fx=\phi\ x$. Contudo, se $fa<\phi\alpha$, então pela lei da continuidade $f\left(\alpha+i\right)<\phi\left(\alpha+i\right)$, se $i$for escolhido suficientemente pequeno deve haver sempre algum valor de *x* entre α e β para o qual $fx=\phi\ x$. Se $f\ \alpha<\phi\alpha$, então, pela lei da continuidade é possível que $f\left(\alpha+i\right)<\phi\left(\alpha+i\right)$, se i for tomado suficientemente pequeno. Portanto, a propriedade de ser menor é satisfeita pela função de $i$representada pela expressão $f\left(\alpha+i\right)$, para todos os valores menores do que um certo valor. No entanto, essa propriedade não se verifica para todos os valores de i sem restrição; mais precisamente, ela não se verifica se $i=\beta-\alpha$, pois $f\ \beta$ já é > do que $\phi\beta$. Ora, é válido o teorema que afirma que sempre que uma certa propriedade M é satisfeita todos os valores de uma grandeza variável i que são menores do que um valor dado e no entanto não para todos os valores em geral, então sempre existe algum maior valor de u, para o qual pode ser afirmado que todos os $i<u$ gozam da referida propriedade *M*. Para este valor de i, $f\left(\alpha+u\right)$ não pode ser $<\phi\left(\alpha+u\right)$, porque, pela lei da continuidade, $f\left(\alpha+u+\omega\right)<\phi\left(\alpha+u+\omega\right)$ se ω for tomado suficientemente pequeno. E consequentemente não seria verdadeiro que n é o maior dos valores para os quais podemos afirmar que todos os valores de *i* inferiores a *u* tornam $f\left(\alpha+i\right)<\phi\left(\alpha+i\right)$; pois $u+\omega$ seria um valor maior para o qual isso se verifica. Mas menos ainda pode ser verdade que $f\left(\alpha+u\right)>\phi\left(\alpha+u\right)$, pois então $f\left(\alpha+u-\omega\right)>\phi\left(\alpha+u-\omega\right)$ também seria verdade se $\omega$for escolhido suficientemente pequeno, e por consequência não seria verdadeiro que $f\left(\alpha+i\right)<\phi\left(\alpha+i\right)$ para todos os valores de $i<u$. Portanto, deve acontecer que $f\left(\alpha+u\right)=<\phi\left(\alpha+u\right)$; i.e., existe um valor de *x* entre α e β, exatamente, $\alpha+u$, para o qual fx e $\phi\ x$ são iguais entre si. Agora trata-se somente do problema da demonstração do teorema mencionado. Ele é demonstrado mostrando que os valores de i para os quais pode-se assegurar que todos os valores menores gozam da propriedade M e aqueles para os quais isso não pode ser afirmado podem ser tornados tão próximos um do

[19] Precisamente a proposição da Seção 29 do trabalho *Der Binomische Lehrsatz*, etc.

[20] No entanto não se deve esperar que eu obedeço aqui a todos as regras do *Beyträge zu einer begründeteren*, etc. (Pt.II) para a construção de uma teoria científica que eu me impus. Embora eu esteja completamente convencido da correção dessas regras, segui-las ao pé da letra somente é possível quando se começa a exposição de uma ciência desde suas primeiras proposições e conceitos, mas não quando se está somente lidando com algumas teorias fora do contexto global. Essa observação obviamente se aplica ao trabalho sobre o teorema do binômio.

outro quanto desejado. Disso decorre, para quem tenha um conceito correto de grandeza, que a ideia de um maior valor de i para o qual pode ser afirmado que todos os números menores do que ele gozam da propriedade M é a ideia de uma grandeza real, ou seja, que existe verdadeiramente.

Antes de terminar este prefácio, seja-me permitido fazer uma confissão e um pedido relacionados não somente ao presente trabalho, mas também, se Deus assim o quiser, a todos os futuros.

Um leitor cuidadoso pode ter percebido nos meus poucos escritos que já foram publicados, mais especificamente no esboço de uma nova lógica que foi apresentado na primeira edição do *Beyträge zu einer begründetere Darstellung der Mathematik*, em sua segunda seção, intitulada "Über die mathematische Methode," que eu defendo certos pontos de vista que, se não forem considerados completamente incorretos, levarão a uma reorganização completa de todas as ciências a priori e puras. A maior e mais importante parte desses pontos de vista já vem sendo examinada por mim por tanto tempo e com tanta imparcialidade que não me é prematuro ousar falar abertamente dela. Pontos de vista que abarcam todo o domínio de uma ou de várias ciências podem ser tornados conhecidos de duas maneiras. Eles podem ser completa e definitivamente formulados em um trabalho composto, ou gradualmente em artigos individuais. A primeira tem sido, de longe, a mais frequente, até agora, e certamente é o processo que alguém deveria adotar se deseja simplesmente adquirir boa reputação entre os acadêmicos contemporâneos o mais rápido possível. Mas para a perfeição das ciências considero que o segundo processo é muito mais vantajoso devido às seguintes razões.

Em primeiro lugar, porque, dessa maneira, o descobridor das novas opiniões corre menos risco de se precipitar. Com efeito, a apresentação gradual de suas opiniões permite-lhe adiar sua explicação de detalhes sobre os quais ele próprio inicialmente tinha dúvidas. Ele pode aprender com as críticas a seus trabalhos já publicados e corrigir algumas coisas erradas.

Em segundo lugar, com um desenvolvimento gradual de seus pontos de vista, ele pode esperar um exame bem mais estrito pelo leitor. Pois o autor que apresenta um sistema já completo oferece-nos, para exame imediato, muitas novas asserções em relação às quais ele não pode esperar que sejam examinadas com tanto cuidado como se tivessem sido apresentadas individualmente. O autor que fornece uma teoria completa mostra, ou pelo menos deveria mostrar, como essas irrefutáveis verdades de senso comum podem ser deduzidas de suas *premissas inusitadas.* Mas isso nos reconcilia imediatamente com essas premissas, e concordamos com elas muito mais rapidamente do que se as mesmas tivessem sido apresentadas individualmente e tivéssemos tido a permissão de examinar se, e até que ponto, elas coincidem com o resto do que acreditamos ser verdadeiro. Finalmente, não se pode negar que um livro de muitas páginas que promete um sistema completo dessa ou daquela ciência nos instila uma espécie de reverência mesmo antes de lê-lo. Então, se descobrimos, ao lê-lo, coerência em suas afirmativas, se a estrutura do conhecimento humano que ele esboça tem forma agradável, e se tudo é disposto com tamanho, grandeza e simetria conveniente, então nosso julgamento é influenciado e começamos a desejar que nele, por fim, possa ser encontrado aquele único sistema verdadeiro que vínhamos procurando há tanto tempo. E o mínimo que acontece é que, devido à coerência observada, julgamos que ou devemos aceitar ou rejeitar todo o sistema, quando na verdade nenhuma das duas possibilidades deveria ocorrer!

Estas foram as razões principais porque decidi, em 1804, que, em nenhuma ciência eu começaria com a publicação de um compêndio completo, mas tornaria conhecidos meus conceitos discordantes dos usuais em primeiro lugar por meio de artigos individuais. E somente se, após muitas correções, eles tivessem a aceitação do público, deveria ser considerada a preparação de um sistema completo. Isso se a morte não nos obrigar a deixar esta tarefa a outros.

Iniciei minhas publicações com um artigo sobre matemática, cujo título é *Betrachtungen über einige* Gegenstände *der Elementargeometrie* (Praga: C. Barth, 1804). Nele, expus, uma nova teoria das paralelas[21] além de alguns outros pontos de vista. Alguns anos depois decidi publicar todos meus pontos de vista na área de matemática de forma sequencial, sob o título geral *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Mas a primeira das publicações dessa série (Praga: C. Widtmann, 1810) teve o infortúnio de não ser mencionada ou analisada em alguns periódicos acadêmicos ou em poucos outros de maneira muito superficial. Isso me obrigou a adiar essas publicações para épocas posteriores, e no intervalo contentar-me em fazer com que eu fosse mais conhecido pelo mundo acadêmico devido à publicação de alguns artigos que, devido a seus títulos, pudessem gerar mais curiosidade. Devido a isso, o artigo já mencionado, Der *binomische Lehrsatz*, etc., foi publicado em 1816 (Praga: Enders). Minha esperança é que este trabalho também desempenhará o mesmo papel; além disso, sua publicação é necessária pois no artigo anterior mencionei a proposição demonstrada aqui. Alguns outros artigos já estão escritos e prontos para publicação, e.g. um intitulado *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation, und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzunq gelöst*. Eles ainda aguardam edição.

Caso eu continue a comportar-me dessa maneira, que me parece a melhor, então o único reconhecimento que devo pedir ao público é que este trabalho não deveria ser ignorado devido à sua brevidade, mas, ao contrário, examinado minuciosamente, e que os resultados desse exame fossem tornados públicos. Dessa maneira, o que talvez seja pouco claro pode ser claramente explicado e o que é de fato errado será desdito. Quanto mais cedo a verdade e a correção forem amplamente aceitos, melhor.

1

Convenção.[*] Suponha que em uma série de grandezas não ocorre o caso especial de que a partir de um certo termo, todos os seguintes sejam nulos, como acontece, por exemplo, com o $(n+1)$-enésimo na série do binômio para qualquer expoente inteiro positivo n. É então óbvio que o valor dessa série, ou seja, a grandeza que resulta da soma

[21] Essa teoria deveria ser bem considerada devido a pelo menos dois motivos: em primeiro lugar, é a única em que nenhum erro óbvio foi encontrado. Em segundo lugar, o maior geômetra francês vivo, Legendre, independentemente de mim, chegou ao mesmo ponto de vista na décima edição dos *Eléments de géométrie* (Paris, 1813).

[*] Bolzano utiliza “willkkürlicher Satz”, uma convenção ou definição (Sebestik 1964b)

de seus termos, nunca pode ser sempre o mesmo quando o número de termos for arbitrariamente aumentado. Ao contrário, esse valor deve seguramente alterar-se sempre que o número de termos for aumentado, mesmo de somente um, desde que não seja nulo. Assim, o valor de uma série depende não somente da regra que determina a construção de cada termo, mas também de quantos termos forem tomados. Então o valor representa uma grandeza variável embora a forma e a grandeza de cada termo permaneça inalterada. Levando isso em conta, representamos por $F_{(r)}\,x$ ou $F_r\,x$. uma função de x que consiste em uma série arbitrariamente longa de termos e cujos valores dependem portanto, além de x, do número de termos, r. Assim, por exemplo, , $A+Bx+C\,x^2+\cdots+R\,x^r=F_r\,x$,e, por outro lado,

$$A+Bx+C\,x^2+\cdots+R\,x^r+\cdots+S\,x^{r+s}=F_{(r+s)}\,x\ .$$

2

1. Lema. A mudança de valor, ou seja, aumento ou diminuição de valor que ocorre em uma série pelo aumento de seus termos por um conjunto determinado de termos (e.g. por um) pode ser, dependendo das circunstâncias, uma grandeza constante (mais precisamente se os termos da série são todos iguais) mas pode também ser variável. No último caso, a variação pode ser uma grandeza que aumenta algum tempo e decresce por algum tempo, ou uma que sempre aumenta. Assim, a variação na série

$$1+1+1+1+\cdots,$$

se ela for aumentada de *um* termo, é uma grandeza constante. A variação na série

$$a+ae+a\,e^2+a\;e^3+\cdots$$

pela adição de um termo é uma grandeza variável, desde que $e\neq 1$. Ela se torna mesmo menor se $e<\pm 1$.

3

2. Lema. Se a variação (aumento ou diminuição) de uma série devido ao aumento do número de termos por um conjunto determinado de termos (e.g. por um) sempre permanece o mesmo ou até mesmo sempre aumenta – e se em ambos os casos ela mantém o mesmo sinal – é então claro que o valor dessa série se tornará maior do que qualquer grandeza dada, se for suficientemente continuado. De fato, suponha que o aumento da série quando são adicionados n termos é $\geq d$ e se pede que a série se torne maior do que um valor dado D. É então suficiente escolher um número inteiro r que seja $\geq \frac{D}{d}$ e prolongar a série com mais $r\bullet n$ termos, obtendo desta maneira um aumento que é

$$\geq \left(r \bullet d \geq \frac{D}{d} \bullet d = D\right).$$

4

3. Lema. Mas existem também séries cujos valores, não importa quantos termos sejam tomados, nunca ultrapassam uma certa grandeza. A série

$$a - a + a - a \cdots ,$$

é deste tipo; seu valor, não importa quantos termos tomarmos, é sempre 0 ou a e portanto nunca excede a.

5

4. Lema. Particularmente interessante entre tais series é a classe das séries em que a mudança de valor (aumento ou diminuição) devida a qualquer adicionamento de termos sempre se mantém menor do que uma certa grandeza, a qual pode ser escolhida tão pequena quanto se queira, desde que a série já tenha sido prolongada suficientemente. A existência de tais séries é demonstrada não somente pelas séries em que os termos após um certo ponto são todos nulos (e elas portanto realmente não têm continuação após esse termo e são tão incapazes de mudar de valor, como a série do binômio da Seção 1), mas também pelas séries em que os termos diminuem com a mesma razão, ou mais rapidamente, que uma progressão geométrica cuja razão é uma fração própria. De fato, é bem conhecido que o valor da série geométrica $a + ae + a\,e^2 + \cdots + a\,e^r$ é $= \frac{a\left(l - er^{r+1}\right)}{1-e} / \left(l - e\right)$. E se acrescentarmos s termos à série, então o acréscimo é $a\,e^{r+1} + a\,e^{r+2} + a\,e^{r+3} + \cdots + a\,e^{r+s} = a\,e^{r+1}\left(1 - e^s\right)/\left(1 - e\right)$. Ora, se $e < \pm 1$ e r for escolhido suficientemente grande, esse acréscimo permanece menor do que qualquer grandeza dada, não importa quão grande seja s. De fato, como e^s sempre permanece $< \pm 1$, então $a\,e^{r+1}\left(1 - e^s\right)/\left(1 - e\right)$ é obviamente sempre menor do que $a\,e^{r+1}\,2/\left(1 - e\right)$. Mas esta última grandeza pode ser tornada menor do que qualquer grandeza dada se aumentarmos r, pois seu valor quando r aumenta de uma unidade é simplesmente o valor anterior multiplicado por e, uma fração própria constante. (Veja o *Der binomische Lehrsatz*, Section 22). Desta maneira, qualquer progressão geométrica cuja razão é uma fração própria pode ser continuada suficientemente até que o acréscimo causado por cada continuação adicional tem que permanecer menor do que uma certa grandeza dada. E isso deve valer ainda com maior razão no caso das séries cujos termos decrescem mais rapidamente que os termos de uma progressão geométrica decrescente.

6

5. Lema. Se os valores das somas dos primeiros n , $n+1$, $n+2$, . . . , $n+r$ termos de uma série[&] como a da Seção 5 forem representados (Seção 1) por $F_{n+1}\,x$, $F_{n+2}\,x,\cdots$, $F_{n+r}\,x$, respectivamente, então as grandezas representam

$$F_1\,x,\, F_2\,x\,,\, F_3\,x,\,\cdots,\, F_n\,x\,,\cdots,\, F_{n+r}\,x\,,\cdots$$

uma nova série (chamada de série das somas da série anterior). Estamos supondo aqui a propriedade especial que a diferença entre o n-ésimo termo $F_n\,x$ e cada termo posterior por $F_{n+r}\,x$ (não interessa quão distante do n-ésimo termo) permanece menor do que qualquer grandeza dada se n tiver sido escolhido suficientemente grande.[+]

7

Teorema. Se uma série de grandezas

$$F_1\,x,\, F_2\,x\,,\, F_3\,x,\,\cdots,\, F_n\,x\,,\cdots,\, F_{n+r}\,x\,,\cdots$$

tem a propriedade de que a diferença entre o *n*-ésimo termo $F_n\,x$ e qualquer termo posterior $F_{n+r}\,x$, não interessa quão distante daquele, permanece menor do que qualquer grandeza dada se *n* for escolhido suficientemente grande, então existe sempre uma certa grandeza constante, e em verdade somente uma, de que se aproximam os termos da série e do qual eles podem ficar tão próximos quanto desejado se prolongarmos a série suficientemente.[@]

Demonstração. É claro, pela Seção 6, que uma série como a descrita no teorema é possível. Além disso, supor a existência da grandeza X de que os termos da série se tornam arbitrariamente próximos, desde que não seja suposto que a grandeza seja única e invariável, não contém certamente nada impossível. De fato, se ela for uma grandeza que pode variar, então ela pode, naturalmente ser escolhida convenientemente próxima do termo $F_n\,x$ com que está sendo comparada, ou ser mesmo exatamente igual a ele. Mas a hipótese de uma grandeza invariável com a propriedade de estar próxima aos termos de nossa série não é impossível, pois com esta hipótese é possível determinar a grandeza com qualquer exatidão pedida. Com efeito, suponha que é exigido que X seja determinada com uma tal exatidão que a diferença do valor verdadeiro de X não exceda uma pequena grandeza dada d. Então, é suficiente procurar na série dada um termo $F_n\,x$ com a propriedade de que qualquer termo $F_{n+r}\,x$ que lhe seja posterior difira dele por menos de $\pm\,d$. Por hipótese, deve existir um tal termo. Afirmo que o valor de $F_n\,x$ difere do valor verdadeiro de X por no máximo $\pm\,d$. Pois se r for arbitrariamente aumentado, com o

---

[&] Bolzano não distinguia uma série e uma sequência. Aqui, se trata de uma sequência (Sebestik, 1964b)

[+] Trata-se da primeira definição do critério de Cauchy para a convergência de uma sequência (Sebestik, 1964b)

[@] O teorema do § 7 introduz a noção de limite. Quanto à demonstração do teorema, Bolzano demonstra somente a possibilidade do limite *X*, mas não sua existência O que lhe falta é uma teoria dos números reais, a qual Bolzano se esforçará para construir em torno de 1830–1834 em seu "Teoria da Grandeza"(ver o artigo de M. Rychlik indicado em nossa introdução). Cf. N. Bourbaki *Eléments d'Histoire des Mathématiques* ", ele [Bolzano] procura justifica-la por um argumento que, na ausência de qualquer definição aritmética dos números reais, era, e não poderia deixar de ser, um círculo vicioso; mas, aceito isso, seu trabalho é totalmente correto e notável..." (p. 164) (Sebestik, 1964b).

mesmo n, a diferença $X - F_{n+r}\,x = \pm\,\omega$ pode ser feita tão pequena quanto queiramos; mas a diferença $F_n\,x - F_{n+r}\,x$ sempre se mantém $< \pm\,d$, não importa quão grande r for tomado. Portanto a diferença

$$X - F_n\,x \;.= (X - F_{n+r}\,x) - (F_n\,x - F_{n+r}\,x),$$

deve sempre manter-se $< \pm\,(d + \omega)$. Mas como para o mesmo n isso é uma grandeza constante e pode ser feito tão pequeno quanto exigido aumentando r, então $X - F_n\,x$ tem que ser $\leq \pm\,d$. Pois se fosse maior e, e.g., igual a $\pm\,(d + e)$ seria impossível que a relação $d + e < d + \omega$, i.e., $e < \omega$, se verificasse se ωfosse mais e mais diminuído. Portanto, o valor verdadeiro de X difere do valor do termo $F_n\,x$ no máximo por d, e pode assim ser determinada com a exatidão exigida pois d pode ser tomado arbitrariamente pequeno. Desta maneira, existe realmente uma grandeza da qual os termos da série, se ela for suficientemente continuada, se aproximam tanto quanto quisermos. Mas existe somente uma tal grandeza. Com efeito, suponha-se que além X existe outra grandeza constante Y de que os termos da série, se forem tomados em número suficientemente grande, se aproximam tanto quanto desejado; então as diferenças $X - F_{n+r}\,x = \omega$ e $Y - F_{n+r}\,x = \omega_1$ podem ser feitas tão pequenas quanto desejado se r for tomado suficientemente grande. Portanto isso também se verifica para sua própria diferença, isto é, para $X - Y = \omega - \omega_1$, que, se X e Y são grandezas constantes é impossível se não supusermos que $X = Y$.

8

Observação. Caso seja tentado determinar o valor da grandeza X da maneira descrita na seção anterior, usando um dos termos de que a série é composta, então nunca se determinará X com exatidão total a não ser que os termos da série sejam todos iguais a partir de um certo ponto. Mas não se deve concluir disso que a grandeza X é sempre irracional. Por exemplo, considere a série

$$0{,}1\,;\,0{,}11\,;\,0{,}111\,;\,0{,}1111\,;\,\cdots$$

(que é a série da soma dos termos da progressão geométrica $1/10\,;\,1/100\,;\,1/1000\,;\,1/10000\,;\,\cdots$,

então a grandeza de que os termos da série se aproximam tanto quanto se queira não é irracional, mas a sim a fração $1/9$. Assim, do fato de que uma grandeza não pode ser determinada com exatidão de uma certa maneira não decorre que ela não possa ser completamente determinada de alguma outra maneira, e que, portanto seja irracional.

9

Lema. Portanto se uma série dada tem a propriedade de que cada termo é finito, mas a variação que sofre com qualquer acréscimo de termos é menor do que qualquer grandeza, desde que o número de termos inicialmente tomados seja suficientemente grande, há sempre uma e somente uma grandeza constante que se torna tão próxima do valor da série quanto desejado, se forem tomados um número suficiente de termos. Com efeito, uma tal série é do tipo descrito na Seção 5; e portanto, os valores que são as somas dos n, $n+1$, $n+2$, … termos formam uma série como as das Seções 6 e 7. Assim, uma tal série tem a propriedade demonstrada na Seção 7.

10

Observação. Não se deve pensar que na proposição da Seção 9 a condição – "que a variação (aumento ou diminuição) que ocorre na série em qualquer de seus prolongamentos tem que permanecer menor do que qualquer grandeza dada se ela inicialmente foi suficiente prolongada" – é supérflua, e que a proposição poderia ser expressa mais geralmente: "Se é possível tornar os termos de uma série, quando prolongada, progressivamente menores, e tão pequenos quanto desejado, então existe sempre uma grandeza constante de que o valor da série, quando prolongada, se aproxima tanto quanto queiramos". Essa asserção pode ser imediatamente refutada pelo seguinte exemplo. Os termos da série

$$1/2+1/3+1/4+1/5+\cdots$$

podem ser tornados tão pequenos quanto se queira, mas contudo é um fato bem conhecido, que usa as propriedades de uma hipérbole retangular (mas também dedutível por meio de considerações puramente aritméticas), que o valor da série pode se tornar maior do que qualquer grandeza dada.

11

Observação preliminar. Em investigações de matemática aplicada, acontece frequentemente a situação em que todos os valores de uma grandeza variável x que são menores do que um certo u gozam de uma apropriedade específica M, sem que se saiba se isso se verifica para todos os valores que são maiores do que u. Nesses casos, pode existir algum $u_1 > u$ para o qual, da mesma maneira que ela se verifica para u, todos os valores de x menores do que u gozam da propriedade M. Essa propriedade M pode mesmo ser satisfeita por todos os valores de x sem exceção. Mas se isso é conhecido, ou seja, que M não é satisfeita por todos os x em geral, então se combinarmos essas duas condições será correto concluir que existe uma certa grandeza U que é a maior das que para as quais é verdade que todos os valores menores de x gozam da propriedade M. Isso será demonstrado no seguinte teorema.

12

Teorema. Se uma propriedade M não se verifica para todos os valores de uma variável x, mas é verificada para todos os valores que são menores do que um certo u, então existe sempre uma grandeza *U* que é a maior daquelas de que se pode afirmar que todos os x menores gozam de M.[*]"

Demonstração. 1. Como a propriedade M se verifica para todos os x *menores* do que u, mas não para *todos os* x *em geral*, existe alguma grandeza $V=u+D$ (em que D representa uma grandeza positiva) de que se pode afirmar que todos os $x<V=u+D$ não gozem de M. Então, eu pergunte se M é satisfeito por todos os $x<u+\frac{D}{2^m}$, em que o expoente m é primeiro 0, depois 1, depois 3, etc. – tenho certeza de que a primeira das *perguntas terá resposta negativa.* Pois a pergunta se *M* é satisfeita por todos os $x<u+\frac{D}{2^0}$, é equivalente a saber se M é satisfeita por todos os $x<u+D$, o que é respondido negativamente, por hipótese. Assim, trata-se de saber se todas as perguntas subsequentes, quando *m* se torna cada vez maior, terão respostas negativas. Se isso acontecer, fica claro que o próprio u é o maior valor para o qual a assertiva de que todos os x menores gozam da propriedade *M* se verifica. De fato, se houvesse um maior, e.g. $u+d$, a afirmação de que todos os $x<u+d$ gozam da propriedade *M*; mas então claramente se tomarmos *m* suficientemente grande, $u+\frac{D}{2^M}$ se tornará $<u+d$, e portanto se *M* é satisfeita por todos os $x<u+d$ será também satisfeita por todos os $x<u+\frac{D}{2^M}$; portanto a pergunta, não foi respondida negativamente, mas sim afirmativamente. Fica assim demonstraçãodo que neste caso (quando todas as perguntas acima teriam tido resposta negativa) existe uma certa grandeza *U* (exatamente o próprio *u*) que é a maior para a qual a afirmativa de que todos os x menores do que ela gozam da propriedade *M*.

2. Ao contrário, se eu tiver resposta afirmativa para uma das perguntas acima, e m for o valor do expoente bem determinado para o qual é afirmado pela primeira vez (m pode ser 1, como acabamos de ver, mas não 0), então a propriedade *M* é satisfeita por todos $x<u+\frac{D}{2^m}$ mas não por todos os $x<u+\frac{D}{2^{m-1}}$ · Mas a diferença entre $u+\frac{D}{2^m}$ e $u+\frac{D}{2^{m-1}}$ é igual a $\frac{D}{2^m}$. Portanto, como aconteceu acima com a diferença *D*, pergunto se *M* e satisfeita por todos os $x<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}$ e aqui o expoente *n* é primeiramente 0, depois 1, depois 2, etc.; mais uma vez tenho certeza de que pelo menos a primeira pergunta terá que ser respondida negativamente. De fato, perguntar se M é satisfeita por todos os $x<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+0}}$ é a mesma coisa que perguntar se M é satisfeita por todos os $x<u+\frac{D}{2^{m-1}}$, mas já sabemos que isso não é verdade. Mas se todas minhas perguntas subsequentes forem negativamente respondidas quando n torna-se cada vez maior, então, como

[*] Trata-se do Teorema de Bolzano-Weierstrass: Um conjunto limitado de números reais tem um *supremo* bem definido, noção introduzida por Bolzano. (Sebestik, 1964b)

anteriormente, $u+\frac{D}{2^m}$ é o maior valor, ou seja, U, para o qual é verdadeira a asserção de que todos os x menores satisfazem a propriedade M.

3. No entanto, se uma dessas perguntas me for respondida afirmativamente, e isso acontece primeiramente para o valor determinado de n, então sei agora que M é satisfeita por todos os $x<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}$, mas não por todos $x<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n-1}}$. A diferença entre essas duas grandezas é igual a $\frac{D}{2^{m+n}}$ e repetirei o processo como anteriormente, agora com $\frac{D}{2^m}$, etc.

4. Se eu continuar dessa maneira tantas vezes quanto for desejado, vê-se que o resultado a que finalmente se chega tem que ser uma das alternativas a seguir.

(a) Ou posso achar um valor da forma $u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$ que é o maior que satisfaz a propriedade de que todos os x menores do que ele é verdadeira. Isso acontece no caso em que as perguntas se M é satisfeita por todos os

$$x<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$$

são respondidas negativamente para todos os s.

(b) Ou posso achar que todos os

$$x<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$$

gozem da propriedade M, mas isso não aconteça para todos os

$$x<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}.$$

Neste caso, podemos sempre tornar o número de termos nessas duas grandezas sempre maiores fazendo novas perguntas.

5. Ora, se o primeiro caso ocorre, a validade do teorema já foi demonstrada. No segundo caso, pode-se observar que a grandeza

$$u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$$

representa uma série cujo número de termos pode ser aumentado arbitrariamente e que pertence à classe descrita na Seção 5. De fato, se $m, n, \ldots, r$ são todos iguais a 1 ou alguns são maiores do que $\frac{1}{2}$, a série diminui com a mesma razão uma progressão geométrica cuja razão é a fração própria $\frac{1}{2}$, ou mais rapidamente que uma tal progressão. Segue-se disso que ela goza da propriedade da Seção 9, i.e. existe uma certa grandeza constante de que ela pode se aproximar tanto quanto quisermos se o número de termos for suficientemente aumentado. Seja V esta grandeza; Afirmamos que a propriedade M se verifica para todos os $x < U$ .Pois se isso não acontecesse para algum $x < U$, e.g., para $U - \delta$, então a grandeza

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots \frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$$

deve sempre permanecer a uma distância igual a δ de U, pois todos os x que são menores do que ela devem gozar da propriedade M. Isso acontece porque todo

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots \frac{D}{2^{m+n+\cdots r}} - \omega,$$

não importa quão pequeno seja ω, goza da propriedade M. Por outro lado, isso não acontece com $x = U - \delta$; portanto,

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots \frac{D}{2^{m+n+\cdots r}} - \omega,$$

ou

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots \frac{D}{2^{m+n+\cdots r}} > \delta - \omega$$

Assim a diferença entre U e a série não pode tornar-se tão pequena quanto desejado, pois $\delta - \omega$ não pode ser menor do que qualquer grandeza dada. Mas M também não se verifica para todos os $x < U + \varepsilon$ pois a série

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots \frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}$$

pode ser tornada tão próxima do valor da série quanto quisermos, pois a diferença entre as duas é somente $\frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}$. Além disso, como o valor da última série podem ser tornado tão próximo de U quanto desejado, o valor da série pode se aproximar de U como desejado. Portanto,

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \cdots \frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}$$

pode certamente tornar-se $< U+\varepsilon$. Mas, por hipótese, M não se verifica para todos os $u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}$; muito menos, portanto, isso acontece para todos os $x< U+\varepsilon$. Portanto, U é o maior valor da grandeza para o qual a asserção de que todos os x menores do que ele gozam da propriedade M é verdadeira.

13

Primeira observação. O último teorema é da maior importância e é usado em todas as áreas da matemática, tanto em análise quanto nas partes aplicadas, geometria, cronometria e mecânica. A proposição falsa a seguir tem sido usada de maneira bem frequente: "Se uma propriedade M se verifica para todos os x menores do que um certo valor, sempre há um maior valor de x que goza da propriedade M." Afirmo que isso é falso devido ao teorema que acabamos de demonstrar. De fato, se existe alguma grandeza U que é a maior das quais se pode afirmar que todos os x menores do que ela gozam da propriedade M, então não há um maior x que satisfaz essa propriedade, desde que x seja uma grandeza livremente ou continuamente variável. Com efeito, é bem conhecido que dada uma grandeza que varia livremente ou sujeita à lei de continuidade,[#] nunca há um maior valor que seja menor do que um certo limite U, pois não importa quão próxima desse limite ela possa estar, pode sempre aproximar-se mais. A fim de mostrar isso com um exemplo, considere uma hipérbole retangular, escolha uma de suas assíntotas como eixo dos x e como origem das abscissas não o centro c, mas qualquer outro ponto a sobre esta assíntota e cuja distância de c é D.

Definamos ac como a direção positiva das abcissas e a direção ab da ordenada retangular do ponto a como direção positiva das ordenadas. Então, qualquer abcissa x que é menor do que um certo valor, por exemplo menor do que $\frac{D}{2}$, a propriedade que lhe corresponde uma ordenada positiva se verifica. Contudo, esta propriedade (M) não será verificada para todas as abcissas positivas, por exemplo as que são maiores do que D. Ora, existe uma maior abcissa x ou um maior valor de x que goza da propriedade M? Não, mas certamente existe algum U, ou seja, uma abcissa x que é a maior entre aquelas de que podemos afirmar que todas as outras menores do que ela têm ordenadas positivas, ou seja, gozam da propriedade M. essa abcissa x é $+D$.

14

Segunda Observação. Talvez alguém sinta-se tentado a concluir que a demonstração do teorema da Seção 12 poderia ter sido feita bem rapidamente da seguinte maneira: "Se não houvesse um maior U para o qual fosse verdadeira a afirmativa que todos os x menores do que ele gozam da propriedade M, seria sempre possível escolher u cada

[#] Bolzano distingue entre uma variável livre (= variável que pode assumir todos os valores entre dois valores dados; hoje, seria o que chamamos de variável contínua) e uma variável contínua (= variável que, na vizinhança de qualquer ponto dado, pode assumir valores que diferem deste valor dado tão pouco quanto quisermos; elas são designadas hoje, seguindo Caantor, por conjuntos densos em toda parte (Sebestik, 1964b).

vez maior, tão grande quanto se desejar, e consequentemente *M* deve ser satisfeita para todos os x, sem exceção.” Que isso é falso pode ser mostrado, por exemplo, pela série bem conhecida

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots,$$

cujo valor pode sempre ser tornado maior do que já é e no entanto sempre permanece <1! Nem mencionaríamos este erro facilmente perceptível se os matemáticos não o cometessem de tempos em tempos – como feito por um deles em sua “teoria completa das paralelas”.

15

Teorema: Se duas funções de x, fx e $\varphi\,x$ variam seguindo a lei da continuidade, para todos os valores de x ou somente para os que estão entre α e β, e se $f\alpha<\varphi\alpha$ e $f\,\beta>\varphi\beta$, então sempre existe um certo valor de x entre α e β para o qual $fx=\varphi x$.

Demonstração: Relembremos que neste teorema os valores das funções fx e φx devem ser comparados entre si somente em valores absolutos, i.e., sem levar em conta seus sinais, como se fossem grandezas incapazes de terem sinais opostos. Mas os sinais de α e β serão importantes.

1. Em primeiro lugar, suponha que α e β são ambos positivos e que (sem perda de generalidade), β é o maior deles; dessa maneira, $\beta=\alpha+i$, em que i representa uma grandeza positiva. Ora, como $f\alpha<\varphi\alpha$, se ω representa uma grandeza positiva que pode ser tomada arbitrariamente pequena, então $f\left(\alpha+\omega\right)<\varphi\left(\alpha+\omega\right)$. Com efeito, como fx e φx variam continuamente para todos os x entre α e β, e $\alpha+\omega$ está entre α e β sempre que $\omega<i$, deve ser possível fazer com que $f\left(\alpha+\omega\right)-f\,\alpha$ e $\varphi\left(\alpha+\omega\right)-\phi\alpha$ sejam como desejado e ω for tomado suficientemente pequeno. Assim, se Ω e $\Omega\,'$ representam grandezas que podem ser tornadas tão pequenas quanto desejado, $f\left(\alpha+\omega\right)-f\,\alpha=\Omega$, e $\varphi\left(\alpha+\omega\right)-\varphi\alpha=\Omega\,'$. Portanto,

$$\varphi\left(\alpha+w\right)-f\left(\alpha+w\right)=\varphi\alpha-f\alpha+\Omega\,'-\Omega\,.$$

Mas $\phi a-f\alpha$ é igual, por hipótese, a alguma constante positive fixa. Portanto

$$\varphi\left(\alpha+w\right)-f\left(\alpha+w\right)=A+\Omega\,'-\Omega,$$

que permanece positiva se Ω andΩ' forem escolhidos suficientemente pequenos, i.e., se ω tiver um valor muito pequeno, e isso sempre se verifica para todos os valores menores. Assim, para todos os valores de ω que são menores do que um certo ω, pode ser afirmado que as duas funções $f\left(\alpha+\omega\right)$ e $\varphi\left(\alpha+\omega\right)$ são tais que a primeira grandeza é menor do que a segunda. Designemos por *M* esta propriedade da variável ω. Podemos então afirmar que todos os ω que são menores do que um certo ω gozam da propriedade *M*. No entanto, é claro que esta propriedade *M* não é satisfeita por todos os valores de ω, explicitamente para os valor $\omega = i$ pois $f\,(\alpha+i) = f\,\beta$ que por hipótese não é menor, e de fato é maior, do que $\varphi\,(\alpha+i) = \phi\beta$. Consequentemente, o teorema da Seção 12 fornece um certo U que é o maior dos valores para os quais se pode afirmar que todos os $\omega < U$ gozam da propriedade *M*.

2. Este *U* deve estar entre 0 e i. Em primeiro lugar, não pode ser igual a i pois isso significaria que $f\,(\alpha+\omega) < \varphi\,(\alpha+\omega)$ sempre que $\omega < i$, não importa quão perto esteja do valor *i*. Mas exatamente da mesma maneira que acabamos de demonstrar que, da hipótese que $f\,\alpha < \varphi\alpha$, decorre $f\,(\alpha+\omega) < \varphi\,(\alpha+\omega)$ se tomarmos ω suficientemente pequeno, poderemos também concluir que de $f\,(\alpha+i) > \varphi\,(\alpha+i)$, segue-se a consequência $f\,(\alpha+i-\omega) > \varphi\,(\alpha+i-\omega)$ se ω for tomado suficientemente pequeno. Portanto, não é verdade que as funções fx e $\varphi\,x$ não podem satisfazer a propriedade de serem sempre uma grandeza menor do que a outra para todos os valores de x tais que $x < \alpha - i$. Em segundo lugar, ainda menos pode ser verdade que $U > i$, pois caso contrário i seria um dos valores de $\omega < U$, e portanto também $f\,(\alpha+i) < \varphi\,(\alpha+i)$, o que contradiz diretamente a hipótese do teorema. Portanto, como *U* é positivo, certamente está entre 0 e i e assim $\alpha + U$ está entre α e β.

3. Pode-se agora perguntar qual relação existe entre fx e $\varphi\,x$ para o valor $x = \alpha + U$? Em primeiro lugar, não pode ser verdade que $f\,(\alpha+U) < \varphi\,(\alpha+U)$, pois isso acarretaria $f\,(\alpha+U+\omega) < \varphi\,(\alpha+U+\omega)$ se ω for escolhido suficientemente pequeno, e dessa maneira $\alpha + U$ não seria o maior valor de que pode ser afirmado que todos os x menores do ele gozam da propriedade *M*. Em *segundo* lugar, também não pode ser verdade que $f\,(\alpha+U) > \varphi\,(\alpha+U)$, pois isso acarretaria que $f\,(\alpha+U-\omega) > \varphi\,(\alpha+U-\omega)$ se ω for escolhido suficientemente pequeno e portanto seria contra a hipótese de que a condição *M* é satisfeita por todos os x menores do que $\alpha + U$. Assim, só restaria a possibilidade $f\,(\alpha+U) = \varphi\,(\alpha+U)$, e assim fica demonstrado que existe um valor de x entre α e β, $\alpha + U$, para o qual $fx = \varphi x$.

II. A mesma demonstração vale também quando α e β, são ambos negativos se escolhermos ω, i, e U grandezas negativas, pois então, da mesma maneira, $\alpha+\omega$, $\alpha+i$, $\alpha+U$, e $\alpha+U-\omega$ representam grandezas entre α e β.

III. Se $\alpha = 0$ e β forem positivos, tome-se simplesmente $i\,(=B)$, ω, e U positivos; e se β é negativo, escolham-se os outros negativos e a demonstração I pode ser repetida exatamente.

IV. Finalmente, se α e β têm sinais opostos e por exemplo (por que isso é indiferente) α é negativo e β positivo, então a hipótese do teorema sobre a continuidade das funções fx e φx afirma, que esta continuidade se estende a todos os valores de x que, se forem negativos, são $<\alpha$ e, se positivos são $>\beta$. Então, entre esses valores, tem-se $x = 0$. Assim, deve-se investigar a relação que existe entre $f\,(0)$ e $\varphi\,(0)$. Se $f\,(0) = \varphi\,(0)$, então o teorema já está demonstrado. Mas se $f\,(0) > \varphi\,(0)$, então como $f\,\alpha < \varphi\alpha$ temos, pela demonstração III, um valor entre 0 e α, e se $f\,(0) < \varphi\,(0)$, um valor entre 0 e β, para o qual $fx = \varphi x$. Assim, em cada caso há um valor de *x* entre α e β que torna $fx = \varphi x$.

16

Observação. Não está de nenhuma maneira afirmado aqui que existe somente um único valor de x que torna $fx=\varphi x$. De fato, se $f\alpha<\varphi\alpha$ e $f(\alpha+U)=\varphi(+U)$devemos realmente ter $f(\alpha+U+\omega)>\varphi(\alpha+U+\omega)$se ω for escolhido suficientemente pequeno, i.e., se a função fx que era menor do que φx deve, após elas terem se tornado iguais entre si, ser logo depois maior do que φx. Contudo, com acréscimos sempre maiores de ω é certamente possível que antes que $\alpha+U+\omega$ seja feito igual a β haja um valor para o qual novamente $fx<\varphi x$. Em tal caso, segue-se diretamente de nosso teorema que devem existir outros dois valores de x entre α e β, distintos de U, para os quais $fx=\varphi x$. Com efeito, seja $f(\alpha+U+\chi)<\varphi(\alpha+U+\chi)$; então, como já se verificava que $f(\alpha+U+\omega)>\chi(\alpha+U+\omega)$, deve haver, entre $\alpha+U+\omega$ e $\alpha+U+\chi$, ou seja, também entre α e β, um valor de x para o qual $fx=\varphi x$. Desta maneira, fica claro que em geral deve sempre um número impar de valores de x que tornam $fx=\varphi x$.

17

Teorema. Toda função da forma $a+b\,x^m+c\,x^n+\cdots+p\,x^r$ em que $m, n, \ldots, r$ designam expoentes positivos inteiros é, para todo valor de x, uma grandeza que varia de acordo com a lei da continuidade.
Demonstração. se x se torna $x+\omega$, a variação na função é claramente igual a

$$b\left[(x+\omega)^m-x^m\right]+c\left[(x+\omega)^n-x^n\right]+\cdots+p\left[(x+\omega)^r-x^r\right],$$

uma grandeza que se pode muito facilmente mostrar ser capaz de tornar-se tão pequena quanto desejado se ω for tomado suficientemente pequeno. De fato, pelo teorema do binômio, cuja validade no caso de potências inteiros positivas (Seção 8 do *Der binom. Lehrs*.) é independente da investigação com a qual o presente trabalho se ocupa, esta grandeza é igual a

$$\omega\left\{\begin{array}{c} mb\,x^{m-1}+m\bullet\dfrac{m-1}{2}\,b\,x^{m-2}\,\omega+\cdots+b\,\omega^{m-1} \\ nc\,x^{n-1}+n\bullet\dfrac{n-1}{2}\,c\,x^{n-2}\,\omega+\cdots+c\,\omega^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ rp\,x^{r-1}+r\bullet\dfrac{r-1}{2}\,p\,x^{r-2}+\cdots+p\,\omega^{r-1} \end{array}\right\}$$

Sabemos que o conjunto de termos que consiste no fator entre chaves é sempre finito e independente dos valores das grandezas x e ω. Como ele contém somente potências positivas, para qualquer valor de x (também para $x=0$) o valor de cada termo, e consequentemente de toda a expressão será sempre finito. Mas se para o mesmo x o valor de ω for diminuido, então os termos em que consta ω diminuem de valor, enquanto os outros permanecem inalterados. Designemos portanto por *S* a grandeza resultante da soma dos valores assumidos um a um por todos os termos para um certo ω digamos ω_1, e somando-os como se todos tivessem o mesmo sinal. Então o valor desta expressão para o mesmo ω_1 certamente não é $>S$; mas o valor assumido para qualquer ω menor é seguramente $<S$. Assim, se for exigido que a variação da função $a+b\ x^m+c\ x^n+\cdots+p\ x^r$ seja feita $<D$, é suficiente tomar um $\omega<\omega_1$ e que seja também $<D/S$. Então $\omega\bullet S$, e mais seguramente o produto de ω por uma grandeza que é $<S$, deve ser $<D$.

18

Teorema. Se uma função da forma

$$x^n+a\ x^{n-1}+b\ x^{n-2}\cdots+px+q,$$

em que *n* representa um número inteiro positivo, for positiva para $x=\alpha$ e negativa para $x=\beta$então a equação

$$x^n+a\ x^{n-1}+b\ x^{n-2}\cdots+px+q=0$$

tem pelo menos uma raiz real entre α e β.

Demonstração. 1. Se α e β têm o mesmo sinal (ambos positivos ou ambos negativos), é claro que os termos das funções que são positivos ou negativos para $x=\alpha$ serão positivos ou negativos, respectivamente, para $x=\beta$ e também para todos os valores de *x* entre α e β. Suponha agora que o valor da função é positivo para $x=\alpha$ mas negativo para $x=\beta$. Esta mudança pode ocorrer somente porque a soma de seus termos positivos resulta ser maior do que a dos termos negativos quando $x=\alpha$, mas menor do que os termos negativos quando $x=\beta$ .Mas a soma dos primeiros e igualmente a dos segundos é da forma

$$a+b\ x^m+c\ x^n+\cdots+p\ x^r$$

da Seção 17, i.e. uma função contínua. Portanto, designemos uma por φx e a outra por fx. Então, como $f\alpha<\varphi\alpha$ e $f\beta>\varphi\beta$, pela Seção 15 deve existir algum valor de x entre α e β para o qual $fx=\varphi x$. Mas para este valor $fx-\varphi x$, i.e. a função dada, se anula; portanto, este valor é uma raiz da equação

$$x^n+a\ x^{n-1}+b\ x^{n-2}\cdots+px+q=0.$$

2. Mas se α e β têm sinais opostos, considere o valor da função quando $x=0$. Se ele for zero, então sabe-se que a equação dada tem uma raiz real entre α e β, que é $x=0$. Mas se este valor (a grandeza *q*) é positivo, então sabe-se que que a função dada é positiva quando $x=0$ mas negativa quando $x=\beta$, e, como os mesmos termos que são positivos ou negativos quando $x=\beta$ conservam seus sinais em todos os valores entre 0 e β, pode-se demonstrar, com a mesma argumentação da parte 1 da demonstração, que deve existir um valor de x situado entre 0 e β que torna a função igual a zero. Finalmente, se *q* for negativo, o que acabamos de afirmar ainda é válido, desde que β seja substituído por α. Ora, como

um valor situado entre 0 e β ou entre 0 e α está também entre α e β, caso estes tenham sinais opostos, então a verdade de nosso teorema está demonstrada em todos os casos.

3. Texto original

Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes da zwischen je zwey Werthen, die einentgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege

Zwey Sätze in der Lehre von den Gleichungen gibt es, in Betreff deren man noch vor Kurzem sagen konnte, daß ein völlig richtiger Beweis derselben unbekannt sey. Der eine ist der Satz: daß zwischen je zwey Werthen der unbekannten Größe, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, allemahl wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegen masse. Der andere lautet: daß jede algebraische rationale ganze Function einer veränderlichen Größe sich in reale Factoren des ersten oder zweyten Grades zerlegen lasse. - Von dem letzteren Satze hat uns, nach mehrerenmißlungenen Versuchen eines d'Alembert, Euler, de Foncenex, La Grange, La Place, Klügel u. A., im vorigen Jahre endlich Hr. Gauß ein paar Beweise geliefert, die kaum mehr etwas zu wünschen übrig lassen dürften. Es beschenkte uns zwar dieser vortreffliche Gelehrte schon in dem Jahre 1799 mit einem Beweise für diesen Satz,[22] der aber noch den von ihm selbst eingestandenen Fehler hatte, daß er die rein analytische Wahrheit auf eine geometrische Betrachtung gründete. Seine zwey neuesten Beweise[23] aber sind auch von diesem Fehler ganz frei; indem die trigonometrischen Functionen, die in dem letzten vorkommen, in einer rein analytischen Bedeutung aufgefaßt werden können und sollen.

Der andere Satz, dessen wir oben erwähnt, gehört zwar eben nicht zu denjenigen Sätzen, welche das Nachdenken der Gelehrten bisher auf eine ganz vorzügliche Weise beschäftigt hätten. Inzwischen finden wir doch, daß Mathematiker von großem Ansehen sich mit diesem Satze befaßt, und schon verschiedene Beweisarten für ihn versucht haben. Wer sich hievon überzeugen will, vergleiche nur die verschiedenen Darstellungen, welche von diesem Satze z. B. Kästner,[24] Clairaut,[25] Lacroix,[26] Metternich,[27] Klügel,[28] La Grange,[29] Rösling[30] u. m. A. gegeben haben.

Daß aber keine dieser Beweisarten als genügend angesehen werden könne, zeigt sich bei einer genaueren Prüfung derselben sehr bald.

I. Bei der gewöhnlichsten Beweisart stützt man sich auf eine aus der Geometrie entlehnte Wahrheit: daß nämlich eine jede kontinuierliche Linie von einfacher Krümmung, deren Ordinaten erst positiv, dann negativ sind (oder umgekehrt), die Abscissenlinie nothwendig irgendwo in einem Punkte, der zwischen jenen Ordinaten liegt, durchschneiden

---

[22] *Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii.* 4°. 1799.

[23] *Demonstratio nova altera* etc., und *Demonstratio nova tertia*; beyde vom Jahre 1816.

[24] *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*. 3. Aufl. § 316.

[25] *Elémens d'Algèbre*. 5ème Edit. Supplemens. Chap. I. no. 16.

[26] *Elémens d'Algèbre*. 7ème Edit.

[27] In seiner Übersetzung des eben angeführten Werkes von Lacroix. Mainz. 1811. § 211.

[28] In seinem *Mathematischen Wörterbuche*. 2. Band S. 447 ff.

[29] *Traité de la résolution des équations numeriques de tous les degrés*. Paris. 1808.

[30] *Grundlehren von den Formen, Differenzen. Differentialien und Integralien der Functionen*. I. Teil. § 49.

müsse. Gegen die Richtigkeit sowohl, als auch gegen die Evidenz dieses geometrischen Satzes ist gar nichts einzuwenden. Aber eben so offenbar ist auch, daß es ein nicht zu duldender Verstoß gegen die gute Methode sei, Wahrheiten der reinen (oder allgemeinen) Mathematik (d. h. der Arithmetik. Algebra oder Analysis) aus Betrachtungen herleiten zu wollen, welche in einen bloß angewandten (oder speciellen) Teil derselben, namentlich in die Geometrie gehören. Und hat man die Unschicklichkeit einer dergleichen *metabasis eis allo genos* nicht längst schon gefühlt und anerkannt? Hat man sie nicht schon in hundert andern Fällen, wo man ein Mittel gewußt, vermieden, und diese Vermeidung sich zum Verdienste angerechnet?[31] Muß man sich also nicht, wenn man anders folgerecht sein will, dieses auch hier zu thun bestreben?

Denn in der That, wer immer bedenket, daß die Beweise in der Wissenschaft keineswegs bloße Gewißmachungen, sondern vielmehr Begründungen d. h. Darstellungen jenes objective Grundes, den die zu beweisende Wahrheit hat, seyn sollen: dem leuchtet von selbst ein, daß der echt wissenschaftliche Beweis, oder der objective Grund einer Wahrheit, welche von allen Größen gilt, gleich viel, ob sie im Raume oder nicht im Raume sind, unmöglich in einer Wahrheit liegen könne, die bloß von Größen, welche im Raume sind, gilt. Bey Festhaltung dieser Ansicht begreift man vielmehr, daß ein dergleichen geometrischer Beweis, wie in den meisten Fällen, so auch in dem gegenwärtigen, ein wirklicher Zirkel sey. Denn ist gleich die geometrische Wahrheit, auf die man sich hier beruft, (wie wir schon eingestanden haben) höchst evident, und bedarf sie also keines Beweises als Gewißmachung; so bedarf sie nichts desto weniger doch einer Begründung. Denn sichtbar sind die Begriffe, aus denen sie besteht, so zusammengesetzt, daß man nicht einen Augenblick anstehen kann, zu sagen, sie gehöre keineswegs zu jenen einfachen Wahrheiten, welche man eben deßhalb, weil sie nur Grund von andern, selbst keine Folgen sind, Grundsätze oder Grundwahrheiten nennet; sie sey vielmehr ein Lehrsatz oder eine Folgewahrheit, d. h. eine solche Wahrheit, die ihren Grund in gewissen andern hat, und daher auch in der Wissenschaft durch Herleitung aus denselben, dargethan werden muß. [32] Nun denke, wer da will, dem objectiven Grunde nach, warum eine Linie unter den vorhin erwähnten Umständen ihre Abscissenlinie durchschneide: so wird gewiß jeder sehr bald gewahr werden, daß dieser Grund in nichts Anderm liege, als in jener allgemeinen Wahrheit, zufolge deren jede stetige Function von x, welche für einen Werth von x positiv, für einen andern negativ wird, für irgend einen dazwischen liegenden Werth von x zu Null werden muß. Und dieß ist eben die Wahrheit, die hier bewiesen werden soll. Weit gefehlt also, daß diese letztere aus jener hergeleitet werden dürfte (wie dieß in der Beweisart, die wir jetzt prüfen, geschieht): muß vielmehr umgekehrt diese von jener abgeleitet werden, wenn man die Wahrheiten in der Wissenschaft eben so darstellen will, wie sie nach ihrem objectiven Zusammenhange mit einander verbunden sind.

II. Nicht minder verwerflich ist der Beweis, den Einige aus dem Begriffe Stetigkeit einer Function, mit Einmengung der Begriffe von Zeit und Bewegung, führten. “Wenn sich zwey Functionen fx und φx”, sagen sie, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, und wenn

[31] Ein Beyspiel geben die vorhin angeführten Abhandlungen des Hrn. Prof. Gauß.

[32] Man vergleiche über dieß Alles meine *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Iste Lieferung. Prag 1810. II. Abth. §§. 2.10. 20. 21, wo man die logischen Begriffe, welche ich hier als bekannt voraussetze, entwickelt findet.

für $x=\alpha$, $fa<\varphi a$, aber für $x=\beta$, $fx>f\beta$ ist: so muß es irgend einen zwischen α und β liegenden Werth μ geben, für welchen $f\mu=\varphi\mu$ ist. Denn wenn man sich vorstellt, daß die veränderliche Größe x, in diesen beyden Functionen nach und nach alle zwischen α und β liegende Werthe, und in demselben Augenblicke immer beyderseits denselben Werth annimmt: so ist im Anfange dieser stetigen Werthveränderung von x, $fx<\varphi x$, und am Ende $fx>\varphi x$. Da aber beyde Functionen vermöge ihrer Stetigkeit erst alle mittleren Werthe durchgehen müssen, bevor sie zu einem höheren gelangen können; so muß es irgend einen mittleren Augenblick geben, in welchem beyde einander gleich waren. Dieses versinnlicht man noch durch das Beyspiel der Bewegung zweyer Körper, deren der eine anfangs hinter dem andern war, zuletzt ihm vorgeeilt ist, und folglich nothwendig einmahl bey ihm vorbey gegangen seyn muß.

Niemand wird wohl in Abrede stellen, daß der Begriff der Zeit, und vollends jener der Bewegung in der allgemeinen Mathematik eben so fremdartig sey, als der des Raumes. Gleichwohl, wenn diese zwey Begriffe hier nur der Erläuterung wegen eingemengt waren, hätten wir nichts dagegen zu erinnern.

Denn auch wir sind keineswegs einem so übertriebenen Purismus zugethan, der, um die Wissenschaft von allem Fremdartigen rein zu erhalten, verlangt, daß man in ihrem Vortrage nicht einmahl einen aus fremdem Gebiethe entlehnten Ausdruck, auch nur in uneigentlicher Bedeutung und in der Absicht aufnehme, um eine Sache so kürzer und klärer zu bezeichnen, als es durch eine in lauter eigenthümlichen Benennungen abgefaßte Beschreibung geschehen kann, oder nur, um den Übelklang der steten Wiederholung der nähmlichen Worte zu meiden, oder um durch den bloßen Nahmen, den man der Sache beylegt, schon an ein Beyspiel zu erinnern, das zur Bestätigung der Behauptung dienen kann. Hieraus ersieht man zugleich, daß wir auch Beyspiele und Anwendungen nicht im Geringsten für etwas Solches halten, das der Vollkommenheit des wissenschaftlichen Vortrages Abbruch thue. Nur dieses fordern wir dagegen strenge: daß man die Beyspiele nie statt der Beweise aufstelle, und auf bloß uneigentlich gebrauchte Redensarten, und auf die Nebenvorstellungen, die sie mit sich führen, niemahls die Wesenheit des Schlusses selbst gründe, so daß der letztere wegfällt, sobald man jene ändert. Nach diesen Ansichten dürfte sich also noch allenfalls die Einmengung des Begriffes der Zeit in obigem Beweise entschuldigen lassen; weil auf die Redensarten, die von ihm hergenommen sind, kein Schluß gegründet wird, der nicht auch ohne ihn gälte. Keineswegs aber kann die zuletzt gegebene Versinnlichung durch die Bewegung eines Körpers für etwas Mehreres angesehn werden, als für ein bloßes Beyspiel, das den Satz selbst nicht beweist, vielmehr durch ihn erst bewiesen werden muß.

a. Halten wir uns also mit Weglassung dieses Beyspiels nur an das übrige Raisonnement. Bemerken wir zuvörderst, daß in demselben ein unrichtiger Begriff der Stetigkeit zu Grunde gelegt sey. Nach einer richtigen Erklärung nähmlich versteht man unter der Redensart, daß *eine Function fx für alle Werthe von x, die inner- oder außerhalb gewisser Grenzen liegen,*[33] *nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel, daß,*

[33] Es gibt Functionen, welche für alle Werthe ihrer Wurzel stetig veränderlich sind, z. B. *ax* + *bx*. Allein es gibt auch andere, die sich nur inner- oder außerhalb gewisser Grenzwerthe ihrer Wurzel nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern. So ändert sich $x+$.

wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man wo so klein, als man nur immer will, annehmen kann; oder es sey (nach den Bezeichnungen, die wir im §. 14. des binomischen Lehrsatzes u. s. w. Prag 1816. eingeführt) $f(x+w)=fx+\Omega$. Daß aber, wie man in diesem Beweise annimmt, die stetige Function niemahls zu einem höheren Werthe gelange, ohne erst alle niedrigeren durchgegangen zu seyn, d.h. daß $f(x-n\,\Delta\,x)$ jeden zwischen fx und $f(x+\Delta\,x)$ liegenden Werth annehmen könne, wenn man n nach Belieben zwischen 0 und +1 nimmt: das ist wohl eine sehr wahre Behauptung, aber sie kann nicht als Erklärung des Begriffes der Stetigkeit angesehn werden, sondern ist vielmehr ein Lehrsatz über denselben; und zwar ein solcher, der sich nur erst nach Voraussetzung des Satzes selbst beweisen läßt, zu dessen Beweise man ihn hier anwenden will. Denn wenn *M* irgend eine zwischen fx und $f(x+\Delta\,x)$, liegende Größe bedeutet; so ist die Behauptung, daß es irgend einen zwischen 0 und +1 liegenden Werth von n gebe, fir welchen $f(x+n\,\Delta\,x)=M$ ist, nur ein besonderer Fall von der allgemeinen Wahrheit, daß, $fx<\varphi x$, und $f(x+\Delta\,x)>\varphi(x+\Delta\,x)$, ist, es irgend einen mittleren Werth $x+n\,\Delta\,x$ geben müsse, für welchen $f(x+n\,\Delta\,x)=\varphi(x+n\,\Delta\,x)$ ist. Aus dieser allgemeinen Wahrheit nähmlich ergibt sich jene erstere Behauptung in dem besondern Falle, wo die Function φ in eine constante Größe *M* übergehet.

b. Aber gesetzt auch, man könnte diesen Satz auf einem andern Wege darthun: doch würde der Beweis, den wir prüfen, noch einen andern Fehler haben. Daraus nähmlich, daß $f\alpha>\varphi\alpha$, und $f\beta<\varphi\beta$, würde nur folgen, daß wenn u irgend ein zwischen α und β liegender Werth ist, bei welchem $\varphi u>\varphi\alpha$ aber $<\varphi\beta$ ist; so werde fx bevor es aus $f\alpha$ zu $f\beta$ übergeht, d. h. bey irgend einem x, das zwischen α und β liegt, ebenfalls $=\varphi u$. Ob aber dieses bey eben demselben Werthe von x, der $=u$ ist, geschehe; d. h. (weil u jeden beliebigen Werth zwischen α und β bedeuten kann, der $\varphi u>\varphi\alpha$ und $<\varphi\beta$ macht) ob es irgend einen zwischen α und β liegenden Werth von x gibt, bey welchem beyde Functionen fx und φx einander gleich werden: das würde noch immer nicht folgen.

c. Das Täuschende des ganzen Beweises beruhet überhaupt nur auf der Einmengung des Begriffes der Zeit. Denn wenn man diesen wegläßt, so zeigt sich alsbald, daß der Beweis nichts anders, als eine Wiederholung des zu beweisenden Satzes selbst mit andern Worten ist. Denn sagen, daß die Function fx, bevor sie aus ihrem Zustande des Kleinerseyns in den des Größerseyns übergeht, erst durch den des Gleichseyns mit φx hindurch gehen müsse; heißt ohne Zeitbegriffe sagen, daß unter den Werthen, die fx annimmt, wenn man für x jeden beliebigen Werth zwischen α und β setzt, auch einer sey, der $fx>\varphi x$ macht; was der zu beweisende Satz selbst ist.

III. Andere beweisen unsern Satz, indem sie folgenden, entweder ganz ohne Beweis, oder doch nur gestützt auf einige aus der Geometrie entlehnte Beyspiele, zum Grunde legen: "Jede veränderliche Größe kann ans einem bejahten Zustande im einen verneinten nur durch den Zustand des Nullseyns oder den der Unendlichkeit übergehen." — Da nun das Resultat einer Gleichung bey keinem endlichen Werthe der Wurzel unendlich groß werden kann: so muß, wie sie schließen, jener Übergang hier durch Null geschehen.

a. Wenn man in obigem Satze die uneigentliche Vorstellung eines Überganges, die den Begriff einer Veränderung in Zeit und Raum enthält, absondern will; wodurch von selbst auch schon der ungereimte Ausdruck eines Zustandes des Nichtvorhandenseyns wegfällt: so bekömmt man am Ende folgenden Satz: "Wenn eine veränderliche Größe, die von einer andern x abhängig ist, für $x=\alpha$ bejaht, für $x=\beta$, verneint befunden wird: so gibt es jedesmahl einen zwischen α und β gelegenen Werth von x, für den sie Null, oder aber einen, für den sie unendlich wird. Und nun bemerkt gewiß ein Jeder, daß eine so zusammengesetzte Behauptung keine Grundwahrheit sey, sondern bewiesen werden müsse; daß aber ihr Beweis kaum leichter seyn dürfte, als der des Satzes selbst, zu dessen Behufe man sie aufstellen will.

b. Ja bey genauerer Betrachtung zeigt sich, daß sie im Grunde sogar identisch mit ihm sey. Denn es ist nicht zu vergessen, daß diese Behauptung eigentlich nur dann erst wahr ist, wenn sie von bloß stetig veränderlichen Größen verstanden wird. So hat z. B. die Function $x+\sqrt{(1-x)(2-x)}$ für $x=+2$ wohl allerdings einen bejahten, für $x=-1$ einen verneinten Werth; dennoch, weil sie sich innerhalb dieser Grenzen nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert: so gibt es auch keinen innerhalb $+2$ und -1 liegenden Werth von x, für welchen sie Null oder unendlich würde. Schränkt man aber die Behauptung auf bloß stetig veränderliche Größen ein; so muß man auch diejenigen Functionen, die für einen gewissen Werth ihrer Wurzel unendlich werden, ausschließen. Denn eine solche Function, wie $a/(b-x)$, ist eigentlich nicht für alle Werthe von x, sondern nur für alle, die $>$ oder $<$ b sind, stetig veränderlich. Denn für den Werth $x=b$ erhält sie gar keinen bestimmten Werth, sondern wird das, was man unendlich groß nennt. Also kann man auch nicht sagen, daß die Werthe, die sie für $x=b+\omega$ annimmt, die alle bestimmt sind, dem Werthe, den sie für $x=b$ erhält, so nahe kommen können, als man nur immer will. Und dieß gehört doch zu dem Begriffe der Stetigkeit (II. a). Setzt man nun zu der obigen Behauptung den Begriff der Stetigkeit noch hinzu und läßt dagegen den Fall des Unendlichwerdens hinweg: so geht sie wörtlich in den Satz, der erst bewiesen werden sollte, über; nähmlich, daß jede stetig veränderliche Function von x, welche für $x=\alpha$ bejaht, für $x=\beta$ verneint ist, für irgend einen zwischen α und β liegenden Werth zu Null werden müsse.

IV. Irgendwo liest man folgenden Schluß: "Weil fx für $x=\alpha$ bejaht, für $x=\beta$ verneint ist: so muß es zwischen α und β zwey Größen a und b geben, bey denen der Übergang aus den bejahten Werthen der fx in die verneinten geschieht; so zwar, daß zwischen a und b kein Werth von x mehr fällt, für den fx noch bejaht oder verneint wäre." U. s. w. Dieser Irrthum bedarf kaum einer Widerlegung und würde hier gar nicht angeführt werden, wenn er nicht zum Beweise diente, wie undeutlich noch die Begriffe mancher selbst angesehener Mathematiker über diesen Gegenstand sind. Es ist doch bekannt genug, daß es zwischen je zwey einander auch noch so nahe stehenden Werthen einer unabhängig veränderlichen Größe, dergleichen die Wurzel x einer Function ist, immer noch unendlich viele mittlere Werthe gebe; und eben so, daß eine jede stetige Function kein letztes x, das sie bejaht, und kein erstes x, das sie verneint macht, also kein solches a und b, wie hier beschrieben wird, besitze!

V. Das Mißlingen dieser Versuche, den Satz, von dem wir handeln, unmittelbar zu beweisen, leitete auf den Gedanken, ihn aus dem zweyten Satze, dessen wir anfangs erwähnt, nähmlich aus dem von der Zerlegbarkeit jeder Function in gewisse Factoren abzuleiten. Es ist auch kein Zweifel, daß, wenn dieser zugegeben wird, jener aus ihm geschlossen werden könne. Aber der Umstand ist nur, daß eine solche Herleitung desselben keine echt wissenschaftliche Begründung heissen könnte, indem der zweyte Satz offenbar eine viel zusammengesetztere Wahrheit ausspricht, als unser gegenwärtiger; daher sich jener wohl auf diesen, nicht aber umgekehrt dieser auf jenen gründen kann. Wirklich ist es auch noch Niemand gelungen, jenen ohne Voraussetzung von diesem zu beweisen. Betreffend die Beweise, deren Unstatthaftig-keit schon Hr. Gauß in seiner Abhandlung vom Jahre 1799 gezeigt hat; so ist es eben darum, weil sie bereits als unstatthaft erwiesen worden sind, nicht nöthig, zu untersuchen, ob sie auf unsern Satz sich gründen oder nicht. Der Beweis des Herrn La Place[34] hat gleichfalls seine Fehler, die wir jedoch schon darum hier nicht auseinander zu setzen brauchen, weil derselbe ausdrücklich auf unsern gegenwärtigen Satz gegründet ist. Und eben so brauchen wir auch auf den zuerst erschienenen Beweis des Hrn. Gauß keine Rücksicht zu nehmen, weil dieser sich auf geometrische Betrachtungen stützet. Inzwischen wäre es leicht darzuthun, daß auch in ihm unser Satz stillschweigend angenommen wird, indem die geometrischen Betrachtungen, die in ihm angestelit werden, ganz jenen ähnlich sind, deren wir n°. I. erwähnet. — Alles kömmt also nur noch auf des Herrn Gauß *Demonstratio nova altera und tertia* an. Jene beruft sich auf unsern Satz ausdrücklich; indem sie S. 30 voraussetzt: *aequationem ordinis imparis certo solubilem esse*; eine Behauptung, die bekanntlich nichts anders, als eine leichte Folgerung aus unserm Satze ist. Nicht so offenbar ist es bey der *Demonstratio nova tertia* daß sie von unserm Satze abhängt. Sie gründet sich unter Anderm auf folgenden Lehrsatz: Wenn eine Function für alle Werthe ihrer veränderlichen Größe x, die zwischen α und β liegen, stets positiv verbleibt; Nun findet man zwar in dem Beweise, den uns La Grange[35] für diesen Lehrsatz geliefert, keine ausdrückliche Berufung auf den unsrigen. Allein dieser La Grangesche Beweis hat auch noch eine Lücke. Er fordert nähmlich, die Größe *i* so klein zu nehmen, daß

$$(f(x+i)-f\,x)/i-f'x<(f'x+f'(x+i)+f'(x+2\,i)+...+f'(x+(n-1)\,i))/n$$

werde, wobey das Product $i \bullet n$ einer gegebenen Größe gleich bleiben soll, und die bekannte Bezeichnung $f'x$ die erste abgeleitete Function von fx vorstellt. Hier entsteht nun die Frage, ob die Erfüllung dieser Forderung auch möglich sey? Je kleiner man i nimmt, um den Unterschied $(f(x+i)-fx)/i-f'x$ zu vermindern, desto größer muß man auch n, den Divisor in dem Ausdrucke rechter Hand annehmen, wenn $i \bullet n$ stets der gegebenen Größe gleich bleiben soll. Nun vermehret sich zwar auch die Menge der Glieder in dem Zähler: ob aber diese Vermehrung den Zähler neben dem Verhältnisse, wie der Nenner wächst, vergrößere, ob sich der Werth des ganzen Bruches durch die Verminderung von i, nicht vielleicht eben so stark oder noch starker vermindere, als der Ausdruck

$$(f(x+i)-fx)/i-f'x,$$

[34] In dem *Journal de l'école normale*, oder auch in des la Croix *Traité du calcul diff. et int.* T. I. n°. 162, 163.

[35] *Leçons sur le calcul des fonctions.* Paris, 1806. Nouvelle ed., Let. 9, p. 89.

das ist noch zu erweisen. Soll diese Lücke nun ausgefüllt werden; so wird dieß wohl nur durch Berufung auf unsern gegenwärtigen Satz geschehen können; da wir uns schon bey dem Beweise eines mit diesem La Grangeschen verwandten, obgleich viel einfacheren Lehrsatzes[36] auf ihn beziehen mußten.

So mangelhaft also sind alle bisherigen Beweise des Satzes, der auf dem Titel dieser Abhandlung genannt ist. Derjenige nun, den ich hier der Beurtheilung der Gelehrten vorlege, enthält, wie ich mir schmeichle, nicht eine bloße Gewißmachung, sondern die objective Begründung der zu beweisenden Wahrheit; d. h. er ist echt wissenschaftlich.[37]

Folgendes ist eine kurze Übersicht des Ganges, den er nimmt.

Die zu beweisende Wahrheit, daß zwischen den zwey Werthen α und β, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, jederzeit wenigstens eine reelle Wurzel liege, beruhet offenbar auf jener allgemeineren, daß, wenn zwey stetige Functionen von x, fx und φx, daß für $x=\alpha, f\alpha<\varphi\alpha$, für $x=\beta$, $f\beta>\varphi\beta$, ausfällt, allemahl irgend ein zwischen α und β liegender Werth von x vorhanden seyn müsse, für welchen $fx=\varphi x$ wird. Allein wenn $f\alpha<\varphi\alpha$ ist; so ist vermöge des Gesetzes der Stetigkeit auch noch $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$, wenn man nur i klein genug annimmt. Die Eigenschaft des Kleinerseyns also kömmt der Function von i, die der Ausdruck $f(\alpha+i)$ darstellt, für alle Werthe von i zu, die kleiner sind, als ein gewisser. Gleichwohl kömmt diese Eigenschaft ihr nicht, für alle Werthe von i ohne Einschränkung zu; nahmentlieh nicht für ein i, daß $=\beta-\alpha$ wäre; indem $f\beta$ schon $>\varphi\beta$ ist. Nun gilt der Lehrsatz, daß so oft eine gewisse Eigenschaft *M* allen Werthen einer veränderlichen Größe i, die kleiner als ein gegebener sind, und doch nicht allen überhaupt zukömmt: so gibt es jederzeit irgend einen größten Werth u, von dem behauptet werden kann, daß alle i, die $<u$ sind, die Eigenschaft *M* besitzen. Für diesen Werth von i selbst kann nun $f(\alpha+u)$ nicht $<\varphi(\alpha+u)$ seyn; weil sonst nach dem Gesetze der Stetigkeit auch noch $f(\alpha+u+\omega)<\varphi(\alpha+u+\omega)$ wäre, wenn man ω nur klein genug annähme. Und folglich wäre es nicht wahr, daß u der größte von den Werthen ist, von welchen die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende Werthe von i, $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$ machen; sondern $u+\omega$ wäre ein noch größerer Werth, von dem dasselbe gilt. Noch weniger aber kann $f(\alpha+u)>\varphi(\alpha+u)$ seyn; indem sonst auch $f(\alpha+u-\omega)>\varphi(\alpha+u-\omega)$ seyn müßte, wenn man ω klein genug nimmt; und folglich wäre es nicht wahr, daß für alle Werthe von i, die $<i$ sind, $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$ sey. So muß denn also $f(\alpha+u)=\varphi(\alpha+u)$ seyn; d. h. es gibt einen zwischen α und β liegenden Werth von x, nähmlich $\alpha+u$, für welchen die Functionen *fx* und φx einander gleich werden. Es handelt sich nur noch um den Beweis des erwähnten Lehrsatzes. Diesen erweisen wir nun, indem wir zeigen, daß jene Werthe von i, von welchen behauptet werden kann, daß alle kleineren die Eigenschaft M besitzen, und jene, von denen sich dieß nicht mehr behaupten läßt, einander so nahe gebracht warden

[36] Nähmlich des Satzes § 29 in der Abhandlung: *der binomische Lehrsatz* u. s. w.

[37] Doch erwarte man nicht, daß ich hier etwa schon alle Regeln befolge, die in den *Beyträgen zu einer begründeteren* u. s. w. (II. A.bth.) für die Construction eines echt wissenschaftlichen Vortrags von mir selbst aufgestellt worden sind. Denn bin ich gleich von der Richtigkeit dieser Regeln noch immer vollkommen überzeuget; so ist doch eine genaue Befolgung derselben nur dort allein möglich, wo man den Vortrag einer Wissenschaft von ihren ersten Sätzen und Begriffen anfängt; nicht aber dort, wo man nur einige Lehren derselben, herausgehoben aus dem Zusammenhange des Ganzen abhandelt; wie dieses hier geschieht. Diese Bemerkung ist denn, wie sich von selbst versteht, auch auf die Abhandlung über den binomischen Lehrsatz zu beziehen.

können, als man nur immer will; woraus sich für Jeden, der einen richtigen Begriff von Größe hat, ergibt, daß der Gedanke eines i, welches das größte derjenigen ist, von denen gesagt warden mag, daß alle unter ihm stehende die Eigenschaft M besitzen, der Gedanke einer reellen d. h.wirklichen Größe sei.

Bevor ich noch diese Vorrede schließe, mögen mir ein Geständniß und eine Bitte erlaubt seyn, welche sich nicht bloß auf diese gegenwärtige, sondern auf meine sämmtlichen, auch, so Gott will, künftigen Schriften beziehen. Schon aus dem Wenigen, so bisher erschienen ist, vornehmlich aber aus jenem Grundrisse einer neuen Logik, den die erste Lieferung der Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik in ihrer zweyten Abtheilung unter der Überschrift: über die mathematische Methode, liefert, konnte ein aufmerksamer Leser entnehmen, daß ich gewisse Ansichten hege, die, werden sie anders nicht als durchaus unrichtig befunden werden, eine gänzliche Umstaltung aller rein apriorischen Wissenschaften zur Folge haben müssen. Den größten und wichtigsten Theil dieser Ansichten habe ich bereits durch eine so lange Zeit und mit so vieler Unbefangenheit geprüfet; daß es wohl nicht mehr zu frühe ist, wenn ich jetzt etwas lauter davon zu sprechen wage. Es können aber Ansichten, welche das ganze Gebiet einer oder mehrerer Wissenschaften umfassen, auf eine doppelte Art bekannt gemacht werden; indem man sie entweder auf einmahl und im Zusammenhange, oder auch theilweise und in einzelnen Abhandlungen vorträgt. Die erste Art ist bisher bey weitem die gewöhnlichste gewesen; und ohne Zweifel auch der Weg, den jeder einschlagen muß, dem es nur darum zu thun ist, um in der kürzesten Zeit zu großem Ansehen bei dem gelehrten Theile seiner Zeitgenossen zu gelangen. Für die Vervollkommnung der Wissenschaften aber däucht mir die zweyte Verfahrungsart viel zuträglicher zu seyn; und zwar aus folgenden Gründen:

Erstlich, weil der Entdecker der neuen Ansichten auf diese Art viel weniger Gefahr läuft, sich zu übereilen; indem der theilweise Vortrag seiner Meinungen ihm gestattet, seine Erklärung über Puncte, worüber er anfangs noch selbst im Zweifel steht, auf eine spätere Zeit zu verschieben; aus den Beurtheilungen aber, die das schon Vorgetragene erfährt, zu lernen, und manches unrichtig Gegebene noch zu berichtigen.

Zweytens läßt sich bey einer solchen bloß theilweise vor sich gehenden Entfaltung seiner Ansichten auch eine weit strengere Prüfung derselben von Seite der Leser erwarten. Denn wer mit einem schon vollendeten Systeme auftritt, bietet der Aufmerksamkeit unseres Geistes auf einmahl eine zu große Anzahl neuer Behauptungen dar, als daß zu hoffen wäre, wir werden jede derselben mit eben der Genauigkeit prüfen, als wenn sie uns einzeln vorgelegt worden wäre. Wer einen vollständigen Lehrbegriff liefert, zeigt, oder soll wenigstens zeigen, wie auch aus seinen abweichenden Vorder-sätzen sich jene Wahrheiten, die der gesunde Menschen-verstand mit unläugbarer Sicherheit erkennt, herleiten lassen. Gerade dieses aber söhnt uns mit jenen Vordersätzen aus, und macht, daß wir sie ihm viel unbedenklicher zugeben werden, als wenn er sie einzeln aufgestellt, und uns in Zweifel gelassen hätte, ob und in wie fern sie sich mit allem Übrigen, was für uns Wahrheit ist, vertragen. Endlich ist wohl auch nicht zu läugnen, daß schon der bloße Anblick eines dickleibigen Buches, das ein vollständiges System dieser oder jener Wissenschaft verspricht, uns eine Art von Achtung einflöße, bevor wir es noch gelesen haben. Entdecken wir nun beym Lesen selbst einen gewissen Zusammen-hang in den Behauptungen desselben; hat das Gebäude des menschlichen Wissens, das man uns hier im Grundrisse darstellt, eine gefällige Form; ist alles angelegt nach Maß und und Zahl und Symmetrie: so wird unser Urtheil bestochen; so fangen wir selbst an zu winschen, hier endlich möchte doch jenes einzig richtige System, das wir so lange schon gesucht, vorhanden seyn! Und das Ge ingste, was erfolgt, ist, daß wir uns einbilden, um des bemerkten Zusammenhanges willen stehe uns höchstens Eines von Beydem frey, entweder das Ganze anzunehmen, oder das Ganze zu verwerfen; während doch in der That weder das Eine, noch das Andere geschehen sollte!

Dieß ungefähr waren die Gründe, aus welchen ich schon im Jahre 1804 beschloß, in keener Wissenschaft je mit der Herausgabe eines vollständigen Lehrbuchs anzufangen; sondern in jeder meine von den gewöhnlichen abweichenden Begriffe nur erst in einzelnen Abhandlungen bekannt zu machen. Und, wenn diese nach vielfältiger Berichtigung bey einem Theile des Publicums Beyfall gefunden haben, dann erst soll an die Ausfertigung ganzer Systeme gedacht werden, wird anders nicht dieß letztere Geschäft der Tod Andern zu iberlassen gebieten.

Ich fing denn meine schriftstellerische Laufbahn mit einer die Mathematik betreffendenAbhandlung an und trug unter dem Titel: Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie (Prag, bey C. Barth. 1804), nebst mehreren andern Ansichten, eine neue Theorie der Parallelen vor.[38] Einige Jahre hierauf faßte ich den Entschluß, meine gesammten in das Gebiet der Mathematik gehörigen Ansichten unter dem Titel: Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, lieferungsweise herauszugeben. Allein gleich die erste dieser Lieferungen (Prag, bey C. Widtmann, 1810) hatte bey aller Wichtigkeit ihres Inhaltes das Unglück, in einigen gelehrten Zeitschriften gar nicht, in andern nur sehr oberflächlich angezeigt und beurtheilt zu werden. Dieß nöthigte mich, die Fortsetzung dieser Beyträge auf eine spätere Zeit zu verschieben, und mittlerweile erst zu versuchen, ob es mir nicht vielleicht gelänge, mich durch die Herausgabe einiger Abhandlungen, welche durch ihren Titel geeigneter wären, Aufmerksamkeit zu erregen, der gelehrten Welt etwas bekannter zu machen. Zu diesem Zwecke erschien im J. 1816 der schon vorhin erwähnte binomische Lehrsatz u. s. w. (Prag, bey Enders). Zu diesem Zwecke soll, meinem Wunsche nach, auch die gegenwärtige Abhandlung dienen, deren Herausgabe überdieß noch dadurch nöthig wurde, weil ich mich auf den Satz, den sie beweiset, in jener früheren schon berufen hatte. Einige andre Abhandlungen, welche schon gleichfalls druckfertig ausgearbeitet sind, z. B. eine, welche den Titel fihren soll: Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, erwarten noch ihre Verleger.

Soll ich nun ferner auf diesem Wege, der mir der zuträglichste scheint, fortfahren können: so bestehet die einzige Gunst des Publicums, um die ich bitten muß, darin, daß man diese einzelne Abhandlung ihres geringeren Umfanges wegen nicht übersehe, sondern sie vielmehr prüfe mit aller nur möglichen Strenge, die Resultate dieser Prtifung aber

[38] Diese Theorie dürfte wenigstens des doppelten Umstandes wegen Aufmerksamkeit verdienen: erstlich, weil sie die einzige ist, der man doch keinen offenbaren Fehler nachzuweisen vermochte; dann weil der größte jetzt lebende Geometer Frankreichs, Legendre, in der zehnten Ausgabe seiner *Elémens de Geometrie*. Paris. 1813 gewiß ganz unabhängig von mir, auf eben dieselbe Ansicht der Dinge verfallen ist.

öffentlich kund machen wolle, damit, was vielleicht undeutlich gesagt ist, deutlicher erkläret, was ganz unrichtig ist, widerrufen werde, das Wahre und Richtige aber je eher je lieber zur allgemeinen Annahme gelange.

1.

Willkürlicher Satz. Wenn bei einer Reihe von Größen nicht etwa der besondere Fall obwaltet, daß anzufangen von einem gewissen Gliede die folgenden alle, jedes fir sich, Null sind, wie dieses Letztere z. B. bey der Binomialreihe für jeden positiven und ganz zähligen Exponenten n, nach dem $(n=1\text{ten})$ Gliede geschieht: so ist es offenbar, daß der Werth dieser Reihe, d. h. die Größe, die durch Summirung ihrer Glieder entsteht, nicht immer einerley verbleiben könne, wenn man die Menge der Glieder nach Belieben vermehret. Insonderheit muß sich dieser Werth gewiß jedesmahl ändern, wenn man die Anzahl der Glieder nur um ein einzelnes, welches nicht Null ist, vermehret. Der Werth einer Reihe ist daher nebst dem Gesetze, welches die Bildung ihrer einzelnen Glieder bestimmt, auch noch von ihrer Anzahl abhängig; so daß derselbe auch bey unveränderter Gestalt und Größe der einzelnen Glieder eine veränderliche Größe vorstellt. In dieser Rücksicht bezeichnen wir eine Function von x, welche aus einer beliebig zu vermehrenden Reihe von Gliedern bestehet, und deren Werth sonach nebst x auch noch von ihrer Gliederzahl r abhängig ist, durch $F(r)(x)$, oder $F(x)$. So ist z. B.

$$A+Bx+C\,x^2+\cdots+R\,x^r=F_r\,x;$$

dagegen

$$A+Bx+C\,x^2+\cdots+R\,x^r+\cdots+S\,x^{r+s}=F_{(r+s)}\,x\ 2.$$

1. Zusatz. Die Werthveränderung, d. h. die Zu oder Abnahme des Werthes, die eine Reihe durch die Vermehrung ihrer Gliederzahl um eine bestimmte Menge, z. B. um eines, erfährt, kann nach Beschaffenheit der Umstände bald eine beständige Größe (wenn nähmlich die Glieder der Reihe einander alle gleich sind), bald aber auch eine veränderliche seyn; und in diesem Falle bald eine Größe, die zuweilen wächst zuweilen abnimmt, bald eine, die beständig wächst, bald eine, die beständig abnimmt. So ist die Aenderung, welche die Reihe

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

erfährt, wenn sie um ein Glied vermehret wird, eine beständige Größe; die Aenderung, welehe die Reihe

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots$$

durch die Vermehrung um ein Glied erfährt, eine veränderliche Größe, wenn anders nicht etwa $e \neq 1$ ist, wird immer größer, wenn $e > \pm 1$, und immer kleiner, wenn $e < \pm 1$.

3

2. Zusatz. Wenn die Werthänderung (Zu- oder Abnahme), die eine Reihe durch Vermehrung ihrer Gliedermenge um eine bestimmte Anzahl (z. B. um eines) erleidet, immer gleich groß verbleibt, oder gar immer größer wird; in beyden Fällen auch noch einerley Vorzeichen behält: so ist es einleuchtend, daß der Werth dieser Reihe größer als jede gegebene Größe zu warden vermag, wenn man dieselbe weit genug fortsetzen darf. Denn gesetzt der Zuwachs, den die Reihe durch eine Vermehrung von je n Gliedern erfährt, sey = oder > d, und man begehre die Reihe so groß zu machen, daß sie die gegebene Größe D überschreitet: so nehme man nur eine ganze Zahl r, die = oder > D/d, und verlängere die Reihe um $r \bullet n$ Glieder; so hat dieselbe hiedurch einen Zuwachs erhalten, der

$$\geq \left(r \bullet d \geq \frac{D}{d} \bullet d = D \right).$$

ist.

4.

3. Zusatz. Dagegen gibt es auch Reihen, deren Werth, so weit man sie fortsetzen mag, eine gewisse Größe nie überschreitet. Von dieser Art ist gleich die Reihe:

$$a - a + a - a + \ldots,$$

deren Werth, so weit man sie fortsetzen mag, immer entweder 0 oder a ist, also die Größe a nie überschreitet.

5.

4. Zusatz. Unter diesen ist besonders merkwürdig die Classe derjenigen Reihen, welche die Eigenschaft besitzen, daß die Veränderung (Zu- oder Abnahme), welche ihr Werth durch eine auch noch so weit getriebene Fortsetzung ihrer Glieder erleidet, immer kleiner verbleibt, als eine gewisse Größe, die wieder selbst so klein, als man nur immer will, angenommen werden, kann, wenn man die Reihe schon vorher weit genug fortgesetzt hat. Daß es dergleichen Reihen gebe, beweiset uns nicht nur das Beyspiel aller derjenigen, deren Glieder, hinter einem gewissen, alle der Null gleich sind, die also eigentlich iber dieß Glied hinaus gar keiner Fortsetzung, noch Werthveränderung mehr fähig sind, wie die Binomialreihe des §. 1: sondern von dieser Art sind auch alle Reihen, deren Glieder entweder eben so oder noch stärker abnehmen, als die einer geometrischen Progression. deren Exponent ein echter Bruch ist. Denn der Werth der geometrischen Reihe

$a+ae+ae^2+ae^r+\dots$ ist bekanntlich = $\dfrac{a\left(l-er^{r+1}\right)}{1-e}/(l-e)$. Wird aber diese Reihe noch um s Glieder verlängert, so ist der Zuwachs

$$a\,e^{r+1}+a\,e^{r+2}+a\,e^{r+3}+\cdots+a\,e^{r+s}=\frac{a\,e^{r+1}\left(1-e^{s}\right)}{1-e}.$$

Wenn nun $e<\pm 1$; so verbleibt dieser Zuwachs, wenn man erst r hinlänglich groß genommen hat, kleiner als jede gegebene Größe, wie groß auch s hinterher anwachsen mag. Denn weil e^s immer $<\pm 1$ verbleibt, so ist $\dfrac{a\,e^{r+1}\left(1-e^{s}\right)}{1-e}$offenbar immer kleiner als $\dfrac{a\,e^{r+1}2}{1-e}$. Letztere Größe aber kann durch Vermehrung von r kleiner als jede gegebene werden; indem derjenige Werth, den sie für ein nächst größeres r annimmt, aus dem nächst vorhergehenden durch die Multiplication mit c, einem echten und unveränderlichen Bruche entstehet. (S. den binomischen Lehrsatz §. 22.) Es läßt sich also jede geometrische Progression, deren Exponent ein echter Bruch ist, erst so weit fortsetzen, daß der Zuwachs, der ihr hierauf durch jede noch fernere Fortsetzung zu Theil werden kann, kleiner als irgend eine gegebene Größe verbleiben muß. Um desto mehr muß dieses von einer Reihe gelten, deren Glieder noch stärker abnehmen, als die einer fallenden geometrischen Progression.

6.

5. Zusatz. Wenn man den Werth, welchen die Summe der ersten n , $n+1$, $n+2$, … , $n+r$ Glieder einer wie § 5 beschaffenen Reihe hat, der Ordnung nach durch $F_{n+1}\,x$, $F_{n+2}\,x$, …, $F_{n+r}\,x$ bezeichnet (§. 1.): so stellen die Größen

$$F_1\,x,\,F_2\,x\,,\,F_3\,x,\,\cdots\,,\,F_n\,x\,,\cdots\,,\,F_{n+r}\,x\,,\cdots$$

nun eine neue Reihe vor (die summatorische der vorigen genannt). Diese hat der gemachten Voraussetzung nach die besondre Eigenschaft, daß der Unterschied, der zwischen ihrem *n*ten Gliede $F_n\,x$ und jedem späteren $F_{n+r}\,x$ es sey auch noch so weit von jedem nten entfernt, kleiner als jede gegebene Größe bleibt, wenn man erst n groß genug angenommen hat. Dieser Unterschied ist nähmlich der Zuwachs, den die ursprüngliche Reihe durch eine Fortsetzung über ihr ntes Glied hinaus erfährt; und dieser Zuwachs soll der Voraussetzung nach so klein verbleiben können, als man nur immer will, wenn man erst n groß genug angenommen hat.

7.

Lehrsatz. Wenn eine Reihe von Größen

$$F_1\,x,\,F_2\,x\,,\,F_3\,x,\,\cdots\,,\,F_n\,x\,,\cdots\,,\,F_{n+r}\,x\,,\cdots$$

von der Beschaffenheit ist, daß der Unterschied zwischen ihrem *n*ten Gliede $F_n\, x$ und jedem späteren $F_{n+r}\, x$, sey dieses von jenem auch noch so weit entfernt, kleiner als jede gegebene Größe verbleibt, wenn man n groß genug angenommen hat: so gibt es jedesmahl eine gewisse beständige Größe, und zwar nur eine, der sich die Glieder dieser Reihe immer mehr nähern, und der sie so nahe kommen können, als man nur will, wenn man die Reihe weit genug fortsetzt.

Beweis. Daß eine solche Reihe, wie sie der Lehrsatz beschreibt, möglich sey, erhellet aus § 6. Die Annahme aber, daß eine Größe X vorhanden sey, der sich die Glieder dieser Reihe bey immer weiterer. Fortsetzung so sehr, als man nur immer will, nähern, enthält auch gewiß nichts Unmögliches, wenn man noch nicht voraussetzt, daß diese Größe nur eine einzige und unveränderliche sey.

Denn wenn es eine Größe, welche sich ändern darf, seyn soll; so wird man sie freylich jederzeit so annehmen können, daß sie dem Gliede $F_n\, x$, welches man eben jetzt mit ihr vergleicht, recht nahe kommt, ja mit ihm völlig einerley ist. Daß aber die Voraussetzung auch einer unveränderlichen Größe, die diese Eigenschaft der Annäherung an die Glieder unsrer Reihe hat, keine Unmöglichkeit enthalte; folgt daraus, weil es bey dieser Voraussetzung möglich wird, diese Größe so genau, als man nur immer will, zu bestimmen. Denn gesetzt, man wollte X so genau bestimmen, daß der Unterschied zwischen dem ang nommenen und dem wahren Werthe von X eine auch noch so kleine gegebene Größe d nicht überschreitet: so suche man nur in der gegebenen Reihe ein Glied $F_n\, x$ von der Beschaffenheit aus, daß jedes folgende $F_{n+r}\, x$ von ihm um weniger als $\pm d$ verschieden sey. Ein solches $F_n\, x$ muß es nach der Voraussetzung geben. Ich sage nun, der Werth von $F_n\, x$ sey von dem wahren Werthe der Größe X höchstens um $\pm d$ verschieden. Denn wenn man bey einerley n, r nach Belieben vergrößert, so muß der Unterschied $X - F_{n+r}\, x = \pm\, \omega$ so klein werden können, als man nur immer will. Der Unterschied $F_n\, x - F_{n+r}\, x$ bleibt aber jederzeit, so groß man auch r nehme, $< \pm d$. Also muß auch der Unterschied

$$X - F_n\, x \;.= (X - F_{n+r}\, x) - (F_n\, x - F_{n+r}\, x)$$

jederzeit $< \pm d\, (d + \omega)$ verbleiben. Da aber derselbe bey einerley n eine beständige Größe ist, ω dagegen durch die Vergrößerung von r so klein gemacht werden kann, als man nur immer will: so muß $X - F_n x \;=\;$ oder $< \pm d$ seyn. Denn wäre es größer und z. B. $= \pm (d + e)$; so könnte unmöglich das Verhältniß $d + e < d + \omega$, d. h. e $< \omega$ bestehen, wenn man ω immer mehr verkleinert. Der wahre Werth von X ist also von dem Werthe, den das Glied $F_n\, x$ hat, höchstens um d verschieden und läßt sich daher, da man d nach Belieben klein annehmen kann, so genau, als man nur immer will, bestimmen. Es gibt also eine reelle Größe, der sich die Glieder der von uns besprochenen Reihe so sehr, als man nur immer will, nähern, wenn man sie weit genug fortsetzt. Aber nur eine einzige dergleichen Größe gibt es. Denn nähmen wir an, daß es nebst *X* noch eine andre beständige Größe *Y* gäbe, der sich die Glieder der Reihe so sehr, als man nur immer will, inähern, wenn man sie weit genug fortsetzt: so müßten die Unterschiede $X - F_{n+r}\, x = \omega$, und $Y - F_{n+r}\, x = \omega_1$ so klein werden können, als man nur immer will, wenn man *r* groß genug warden ließe. Dasselbe müßte also auch von ihrem eigenen Unterschiede, d. h. von $X - Y = \omega - \omega_1$ gelten; welches, wenn X und Y beständige Größen seyn sollen, unmöglich ist, falls man nicht $X = Y$ voraussetzt.

8.

Anmerkung. Wenn man den Werth der Größe X auf die Art, wie es im vorigen § geschehen, nämlich durch irgend eines der Glieder selbst, aus welchem die gegebene Reihe zusammengesetzt ist, zu bestimmen sucht: so wird man, wenn anders die Glieder dieser Reihe nicht, anzufangen von einem gewissen, einander alle gleich sind, X niemahls ganz genau bestimmen. Man hüthe sich aber, hieraus zu schließen, daß die Größe X allemahl irrational seyn müsse. Denn wenn uns z. B. die Reihe

0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; …

(welche die summatorische der geometrischen 1/10, 1/100, 1/1000, 1,10000, …ist)

vorgelegt wäre: so wäre die Größe, der sich ihre Glieder so sehr, als man nur immer will, nähern, keineswegs irrational, sondern der Bruch 1/9. Daraus nähmlich, daß eine Größe sich auf einem gewissen Wege nicht genau bestimmen läßt, folget noch nicht, daß sie auf keinem andern völlig bestimmbar, und also irrational sey.

9.

Zusatz. Wenn also irgend eine gegebene Reihe von der Beschaffenheit ist, daß jedes einzelne ihrer Glieder endlich, die Veränderung aber, die sie durch eine auch noch so weit getriebene Fortsetzung erfährt, kleiner als jede gegebene Größe ausfällt, sobald man nur die Anzahl ihrer bisherigen Glieder groß genug genommen hat: so gibt es jederzeit eine, aber auch nur eine beständige Größe, welcher der Werth dieser Reihe so nahe tritt, als man nur immer will, wenn man sie weit genug fortsetzt. Denn eine solche Reihe ist von der Art der § 5 beschriebenen, und folglich bilden die Werthe, welche die Summe ihrer n, $n+1$, … Glieder ersteigt, eine Reihe, wie die der §§. 6 und 7; mithin kömmt ihnen auch die §. 7 erwiesene Eigenschaft zu.

10.

Anmerkung. Man glaube ja nicht, daß in dem obigen Satze §. 9 die Bedingung, "daß die Veränderung (Zu- oder Abnahme), welche die Reihe durch jede Fortsetzung erfährt, kleiner als jede gegebene Größe müsse bleiben können, wenn man sie vorhin schon weit genug fortgesetzt hat", – überflüssig sey; und daß der Satz vielleicht mit einer größeren Allgemeinheit auch so ausgedrückt werden könnte: "Wenn die Glieder einer Reihe durch ihre Fortsetzung stets kleiner und so klein zu werden vermögen, als man nur immer will: so gibt es jedesmahl auch eine beständige Größe, der sich der Werth der Reihe bey ihrer Fortsetzung so sehr, als man nur immer will, nähert." Diese Behauptung würde gleich folgendes Beyspiel widerlegen. Die Glieder der Reihe

$$1/2+ 1/3 + 1/4 +1/5 + \dots$$

können so klein werden, als man nur immer will; und doch ist es eine aus den Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel bekannte (aber auch aus rein arithmetischen Betrachtnngen herleitbare) Wahrheit, daß dieser Reihe Werth größer, als jede gegebene Größe zu werden vermag, wenn man sie weit genug fortsetzt.

11.

Vorerinnerung. In Untersuchungen der angewandten Mathematik ereignet sich öfters der Fall, daß man von einer veränderlichen Größe x erfährt, es komme allen ihren Werthen, die kleiner als ein gewisser u sind, eine bestimmte Eigenschaft M zu; ohne zu gleicher Zeit zu erfahren, daß diese Eigenschaft Werthen, die größer sind als u, nicht mehr zukomme. In solchen Fällen kann es vielleicht noch manches $u1$, das $> u$ ist, geben, von dem es gleicher Weise wie von ul gilt, daß alle unter ihm stehende Werthe von x die Eigenschaft M besitzen, ja diese Eigenschaft kann vielleicht allen x ohne Ausnahme zukommen. Wenn man dagegen nur noch dieß Eine erfährt, daß M nicht allen x überhaupt eigen sey: so wird man aus der Vereinigung von diesen beyden Angaben nun schon berechtigt seyn zu schließen, es gebe eine gewisse Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen es wahr seyn kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft MI besitzen. Dieses beweiset der folgende Lehrsatz.

12.

Lehrsatz. Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werthen einer veränderlichen Größe x, wohl aber allen, die kleiner sind, als ein gewisser u, zukömmt: so gibt es allemahl eine Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.

Beweis. 1. Weil die Eigenschaft M von allen x, die kleiner sind als u, und gleichwohl nicht von allen überhaupt gilt; so gibt es sicher irgend eine Größe $V = u + D$ (wobey D etwas positives vorstellt), von der sich behaupten läßt, daß M nicht allen x, die $< V = u + d$ sind, zukomme. Wenn ich daher die Frage aufwerfe, ob M wohl allen x, die $< u + D/2m$ sind, zukomme? und den Exponenten m der Ordnung nach, erst 0, dann 1, dann 2, dann 3, u. s. w. bedeuten lasse: so bin ich gewiß, daß man die erste meiner Fragen mir wird verneinen müssen. Denn die Frage, ob M wohl allen x, die $< u + D/20$ sind, zukomme, ist einerley mit der, ob M allen x, die $< u + D$ sind, zukomme; welches nach der Voraussetzung zu verneinen ist. Es kömmt nur darauf an, ob man mir auch alle folgenden Fragen, welche entstehen, indem ich m nach und nach immer größer ansetze, verneinen wird. Sollte dieses der Fall seyn; so ist einleuchtend, daß u selbst der größte der Werthe ist, von welchen die Behauptung gilt, daß alle x, die kleiner als er sind. Die Eigenschaft M besitzen. Denn gäbe es noch einen größeren z. B. $u + d$; d. h. gälte die Behauptung, daß auch noch alle x, die $< u + d$ sind, die Eigenschaft M haben: so ist doch offenbar, daß wenn ich m groß genug annehme, $u + D/2m$ einmahl $=$ oder $< u + d$ wird; und folglich müßte, wenn M allen x, die $< u + d$ sind, zukömmt, dasselbe auch allen, die $u + D/2m$ sind, zukommen; also hätte mir diese Frage nicht verneint, sondern bejahet werden müssen. Es ist daher erwiesen, daß es in diesem Falle (wo man mir alle obigen Fragen verneint) eine gewisse Größe U (nähmlich u selbst) gebe, welche die größte derjenigen ist, von denen die Behauptung gilt, daß alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M besitzen.

2. Wird mir dagegen die obige Frage einmahl bejahet, und ist m der bestimmte Werth des Exponenten, bey dem man sie mir zuerst bejahet (m kann auch 1 bedeuten; aber, wie wir gesehen, nicht 0): so weiß ich nun, daß die Eigenschaft M allen x, die $u+D/2m$ sind, aber schon nicht mehr allen, die $<u+D/2m-1$ sind, zukomme. Der Unterschied zwischen $u+D/2m-1$ und $D/2m$ ist aber $=D/2m$. Wenn ich daher mit diesem wieder, wie vorhin mit dem Unterschiede D verfahre; d. h. wenn ich die Frage aufwerfe, ob M wohl allen x, die $<u+D/2m+D/2m+n$ sind, zukomme; und hier den Exponenten n erst 0, dann 1, dann 2, u. s. w. bedeuten lasse: so bin ich abermahl gewiß, daß man mir wenigstens die erste dieser Fragen wird verneinen missen. Denn fragen, ob M allen x, die $<u+D/2m+D/2m+0$ sind, zukomme, heißt eben D so viel, als fragen, ob M allen x, die $<u+D/2m-1$ sind, eigen sey; was man schon vorhin verneinet hatte. Sollte man aber auch alle meine folgenden Fragen verneinen, so groß ich auch n nach und nach mache: so würde, wie vorhin, erhellen, $u+D/2m$ sey jener größte Werth, oder das U, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M besitzen.

3. Wird mir dagegen eine dieser Fragen bejahet, und geschieht dieß zuerst bey dem bestimmten Werthe n: so weiß ich nun, daß M allen x, die $<u+D/2m+D/2m+n$ sind, zukomme, aber schon nicht mehr allen, die $<u+D/2m+D/2m+n-1$ sind. Der Unterschied zwischen diesen beyden Größen ist $=D/2m+n$; und ich verfahre mit ihm wieder, wie vorhin mit $D/2m$. U.s.w. 4. Wenn ich auf diese Art so lange fortfahre, als man nur immer will; so sieht man, daß das Resultat, das ich zuletzt erhalte, eines von Beydem seyn muß.

a. Entweder ich finde einen Werth von der Form $u+D/2m+D/2m+n+D/2m+\ldots+r$, der sich mir als der größte darstellt, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehenden x die Eigenschaft M besitzen. Dieß geschieht in dem Falle, wenn mir die Fragen, ob M allen x, die $<u+D/2m+D/2m+n+\ldots+D/2m+\ldots+r+s$, sind, zukomme, für jeden Werth von s verneinet werden.

b. Oder ich finde wenigstens, daß M zwar allen x, die $<u+D/2m+D/2m+n+D/2m+\ldots+r$ sind, zukomme, aber schon nicht mehr allen, die $<u+D/2m+D/2m+n+D/2m+\ldots+r-1$, sind. Hiebey steht es mir frey, die Anzahl der Glieder in diesen beyden Größen durch neue Fragen immer noch größer zu machen.

5. Ist nun der erste Fall vorhanden, so ist die Wahrheit des Lehrsatzes bereits erwiesen. Im zweyten Falle lasset uns bemerken, daß die Größe $u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$, eine Reihe vorstelle, deren Gliederzahl ich nach Belieben vermehren kann, und die zur Classe der §. 5 beschriebenen gehöret; weil sie, je nachdem $m, n, \ldots, r$ entweder alle $=1$, oder zum Theile noch größer sind, entweder eben so, oder noch stärker abnimmt, als eine geometrische Progression, deren Exponent der echte Bruch 1/2 ist. Daraus ergibt sich, daß sie die Eigenschaft des § 9 habe; d. h. daß es eine gewisse beständige Größe gebe, der sie so nahe kommen kann, als man nur immer will, wenn man die Menge ihrer Glieder hinlänglich vermehret. Sey diese Größe U; so behaupte ich, die

Eigenschaft *M* gelte von allen x, die $<U$ sind. Denn gälte sie von irgend einem x; das $<U$ ist, z. B. von $U-\delta$ nicht; so müßte die Größe $u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$, weil für alle x, die kleiner als sie sind, die Eigenschaft M Statt finden soll, immer den Abstand δ von U behalten. Denn jedes x, das

$$=u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}-\omega$$

ist, so klein auch ω sey, besitzt die Eigenschaft *M*; dagegen dem $x=U-\delta$ soll sie nicht zukommen: also muß

$$u-\delta>\frac{+D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}-\omega \text{ oder}$$

$$U-\left(u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}\right)>\delta-\omega \text{ seyn.}$$

Mithin könnte der Unterschied zwischen *U* und der Reihe nicht so klein werden, als man nur immer will; da $\delta-\omega$ nicht so klein werden kann, als man nur immer will, indem sich δ nicht ändert, während ω kleiner als jede gegebene Größe zu werden vermag. – Eben so wenig kann aber *M* von allen x, die $<U+\varepsilon$ sind, gelten. Denn weil der Werth der Reihe

$$u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}$$

dem Werthe der Reihe

$$u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}$$

nur immer will, in dem der Unterschied beyder nur $\frac{D}{2^{m+n+\cdots r}}\cdot$ ist; weil ferner der Werth der letzteren Reihe der Größe *U* so nahe treten kann, als man nur immer will:so können auch der Werth der ersteren Reihe und *U* einander so nahe kommen, als man nur will. Also kann

$$u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}$$

gewiß $<U+\varepsilon$ werden. Nun aber gilt der Voraussetzung nach *M* nicht von allen x, die

$$<u+\frac{D}{2^m}+\frac{D}{2^{m+n}}+\cdots\frac{D}{2^{m+n+\cdots r-1}}$$

sind; um desto weniger also von allen x, die $< U + \varepsilon$ sind. Also ist *U* der größte Werth, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft *M* besitzen.

13.

1. Anmerkung. Vorstehender Lehrsatz ist von der größten Wichtigkeit und wird in allen Zweigen der Mathematik, in der Analysis sowohl, als in den angewandten Theilen, in der Geometrie, Chronometrie und Mechanik gebraucht. Statt seiner hatte man sich bisher nicht selten des falschen Satzes bedient: "Wenn eine Eigenschaft *M* nicht von allen x, wohl aber von allen, die kleiner als ein gewisses sind, gilt: so gibt es jederzeit irgend ein größtes x, welchem die Eigenschaft *M* zukömmt." Dieß, sage ich, ist zu Folge des so eben Erwiesenen falsch. Denn gibt es irgend eine Größe *U*, welche die größte unter denjenigen ist, von denen gesagt warden kann, daß alle unter ihr stehende x die Eigenschaft M an sich haben: so gibt es eben darum sicher kein größtes x, dem diese Eigenschaft zukömmt, wenn anders x eine entweder frey oder doch stetig veränderliche Größe ist. Denn für eine jede frey oder nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderliche Größe gibt es bekanntlich nie einen größten Werth, der kleiner als eine gewisse Grenze *U* ist; indem, so nahe sie auch schon an dieser Grenze stehen mag, sie ihr doch immer noch näher gebracht werden kann. – Man denke sich, um dieß durch ein Beyspiel zu erläutern, eine rechtwinkelige Hyperbel, und nehme eine ihrer Asymptoten zur Abscissenlinie, und nicht den Mittelpunet c, sondern was immer für einen andern Punet a in dieser Asymptote, der die Entfernung *D* von cc hat, zum Anfangspuncte der Abscissen an. Erklären wir nun die Richtung ac für die positive der Abscissen, und die Richtung ab, welche die rechtwinkelige Ordinate des Punctes a hat, für die positive der Ordinaten: so wird von jeder Abscisse x, die kleiner als eine gewisse z. B. kleiner als *D*/2 ist, die Eigenschaft gelten, daß ihr eine positive Ordinate entspricht. Gleichwohl wird diese Eigenschaft (*M*) nicht von allen positiven Abscissen gelten, nahmentlich nicht von solchen, die größer als *D* sind. Gibt es nun wohl hier eine größte Abscisse, einen größten Werth von x, welchem die Eigenschaft *M* zukömmt? Keineswegs; wohl aber gibt es ein *U*, d. h. eine Abscisse, welche die größte unter denjenigen ist, von denen gesagt werden kann, daß alle kleineren als sie positive Ordinaten haben, d. h. die Eigenschaft *M* besitzen. Diese Abscisse nähmlich ist $+D$.

14.

2. Anmerkung. Es dürfte Jemand vielleicht auf den Gedanken kommen, daß der Beweis des Lehrsatzes § 12 ganz kurz auf folgende Art hätte gefaßt werden können: "Gäbe es kein größtes *U*, von welchem die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft *M* besitzen: so würde man u immer größer und größer, und also so groß, als man nur immer will, nehmen können, und folglich müßte *M* von allen x ohne Ausnahme gelten. – Allein dieß wäre ein sehr fehlerhafter Schluß, indem er sich auf den stillschweigend angenommenen Obersatz stitzen würde: "daß eine Größe, die immer größer und größer genommen werden kann, als man sie schon genommen hat, so groß werden könne, als man nur immer will. Wie falsch dieses sey, beweiset z. B. die bekannte Reihe $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$, deren Werth immer größer und größer gemacht warden kann, als er

schon ist, und gleichwohl immer <1 verbleibt! – Wir würden eines so leicht einzusehenden Irrthums gar nicht erwähnen, wenn es nicht von Zeit zu Zeit geschähe, daß Mathematiker sich ihn zu Schuld kommen lassen, wie erst kürzlich Einer in seiner "vollständigen Theorie der Parallelen".

15.

Lehrsatz. Wenn sich zwey Functionen von x, $f(x)$ und $\varphi(x)$, entweder für alle Werthe von x, oder doch für alle, die zwischen α und β liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, wenn ferner $f\alpha < \varphi\alpha$, und $f\beta < \varphi\beta$ ist: so gibt es jedesmahl einen gewissen zwischen α und β liegenden Werth von x, für welchen $fx = \varphi x$ wird.

Beweis. Wir müssen erinnern, daß in diesem Lehrsatze die Werthe der Funetionen fx und φx bloß ihrer absoluten Größe nach, d. h. ohne Rücksicht auf ein Vorzeichen, oder so, als ob sie gar keine des Gegensatzes fähige Größen wären, mit einander verglichen werden sollen. Wohl aber kommt es an auf die Bezeichnung, welche α und β haben.

I. Man nehme erstlich an, daß α und β beyde positiv sind, und daß (weil dieses dann gleichgültig ist) β die größere von beyden, und somit $\beta = \alpha + i$ sey, wo i eine positive Größe anzeigt. Weil nun $f\alpha < \varphi\alpha$ ist; so ist auch, wenn ω eine positive Größe anzeigt, die so klein werden kann, als man nur immer will, $f(\alpha+\omega) < \varphi(\alpha+\omega)$. Denn weil sich fx und φx für alle x, die zwischen α und β liegen, stetig verändern sollen; und $\alpha+\omega$ zwischen α und β liegt, so bald nur $\omega < i$ genommen wird: so müssen $f(\alpha+\omega) - f\alpha$ und $\varphi(\alpha+\omega) - \varphi(\alpha)$ so klein werden können, als man nur will, wenn man ω klein genug nimmt. Es ist daher, wenn auch Ω, Ω' Größen bedeuten. die sich so klein machen lassen, als man nur immer will, $f(\alpha+\omega) - f\alpha = \Omega$, und $\varphi(\alpha+\omega) - f\alpha = \Omega'$. Daher

$$\phi(\alpha+w) - f(\alpha+w) = \phi\alpha - f\alpha + \Omega' - \Omega.$$

Allein $\varphi(\alpha) - f\alpha$ gleicht nach der Voraussetzung irgend einer positiven Größe von unveränderlichem Werthe *A*. Also ist

$$\varphi(\alpha+w) - f(\alpha+w) = A + \Omega' - \Omega,$$

welches, wenn man Ω, Ω' klein genug werden läßt, d. h. wenn man dem ω einen sehr kleinen Werth ertheile, und dann noch um so mehr für alle kleineren Werthe, was positiv bleibt. Also läßt sich von allen ω, die kleiner als ein gewisses sind, behaupten, daß die zwey Functionen $f(\alpha+\omega)$ und $\varphi(\alpha+\omega)$ in dem Verhältnisse der kleineren Größe zu einer größeren stehen.

Bezeichnen wir diese Eigenschaft der veränderlichen Größe ω durch *M*; so können wir sagen, daß alle ω, die kleiner als ein gewisses sind, die Eigenschaft M besitzen. Daß aber diese Eigenschaft gleichwohl nicht allen Werthen von ω zukomme, nahmentlich nicht dem Werthe $\omega = i$; ist daraus klar, weil $f(\alpha+i) = f\alpha$ nach der Voraussetzung nicht mehr $<$, sondern $> \varphi(\alpha+i) = f\alpha$ ist. Zufolge des Lehrsatzes § 12 muß es daher eine gewisse Größe *U* geben, welche die größte unter denjenigen ist, von denen sich behaupten läßt, daß alle ω die $<U$ sind, die Eigenschaft M an sich tragen.

2. Und dieses U muß innerhalb 0 und i liegen. Denn es kann erstlich nicht $=i$ seyn; indem dieß hieße, daß jedes $f(\alpha+\omega)<\varphi(\alpha+\omega)$ sey, so oft nur $\omega<i$ ist, es möge übrigens dem Werthe i auch noch so nahe kommen. Allein ganz auf dieselbe Art, wie wir so eben erwiesen, daß die Voraussetzung $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$ die Folge $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$ nach sich zieht, so bald man nur ω klein genug nimmt, läßt sich auch darthun, daß aus der Voraussetzung $f(\alpha+i)>\varphi(\alpha+i)$, die Folge $f(\alpha+i-\omega)>\varphi(\alpha+i-\omega)$ fließt, sobald man nur ω klein genug nimmt. Also ist es nicht wahr, daß die zwey Functionen fx und φx für alle Werthe von x, die $<\alpha-i$ sind, in dem Verhältnisse der kleineren Größe zu einer größeren stehen. – Noch weniger kann zweytens $U>i$ seyn, weil sonst auch i einer der Werthe von ω wäre, die $<U$ sind, und daher auch $f(\alpha+i)>\varphi(\alpha+i)$ seyn müßte, was der Voraussetzung des Lehrsatzes geradezu widerspricht. Also liegt U, da es doch positiv ist, sicher zwischen 0 und i, und folglich $\alpha+U$ zwischen α und β.

3. Es frägt sich nun, in welchem Verhältnisse die Functionen fx und φx für den Werth $x=\alpha+U$ zu einander stehen? Es kann zuvörderst nicht $f(\alpha+U)<\varphi(\alpha+U)$ seyn; denn dieses gäbe auch $f(\alpha+U+\omega)<\varphi(\alpha+U+\omega)$, wenn man ω klein genug annähme; und folglich wäre $\alpha+U$ nicht der größte Werth, von dem behauptet werden kann, daß alle unter ihm stehende x die Eigenschaft M haben. Eben so wenig kann zweytens $f(\alpha+U)>\varphi(\alpha+U)$ seyn; weil dieß auch $f(\alpha+U-\omega)<\varphi(\alpha+U-\omega)$ gäbe, sobald man ω nur klein genug nimmt; und also wäre gegen die Voraussetzung die Eigenschaft M nicht von allen x, die unter $\alpha+U$ stehen, wahr. Es bleibt den also nichts anderes übrig, als daß $f(\alpha+U)=\varphi(\alpha+U)$ sey; und folglich ist erwiesen, daß es einen zwischen α und β liegenden Werth von x, nähmlich $\alpha+U$ gibt, für welchen $fx=\varphi x$ wird. II. Derselbe Beweis ist auch auf den Fall anwendbar, wenn α und β beyde negativ sind; sobald man nur unter ω, i und U negative Größen verstehet; indem $\alpha+\omega$, $\alpha+i$, $\alpha+U$, $\alpha+U-\omega$ dann gleichfalls Größen zwischen α und β vorstellen.

III. Ist $\alpha=0$ und β positiv, so nehme man nur auch $i\,(=\beta)$, ω, U positiv; und ist β negativ, auch diese negativ: so wird sich der Beweis I. wörtlich anwenden lassen.

IV. Wenn endlich α und β von entgegengesetzter Art, und (weil dieß gleichgültig ist) z. B. α negativ, und β positiv ist: so sagt die Voraussetzung des Lehrsatzes in Betreff der Stetigkeit der Funetionen fx und φx, daß diese Stetigkeit sich auf alle Werthe von x erstrecke, die, wenn sie negativ, $<\alpha$, und wenn sie positiv, $<\beta$ sind. Unter diesen ist denn auch der Werth $x=0$ begriffen. Man untersuche also das Verhältniß, welches fx und φx für $x=0$ haben. Ist $f\,0=\varphi\,0$, so ist der Lehrsatz schon von selbst erwiesen. Ist aber $f\,0>\varphi\,0$; so liegt, weil $f\alpha<\varphi\alpha$ seyn soll, nach III. zwischen 0 und α; ist endlich $f\,0<\varphi\,0$, zwischen 0 und β ein Werth, für welchen $fx=\varphi x$ wird. Also gibt es in jedem Falle einen zwischen α und β liegenden Werth von x, der $fx=\varphi x$ macht.

16.

Anmerkung. Daß es nur einen einzigen Werth von x gebe, der $fx=\varphi x$ macht, wird hiermit keineswegs behauptet. Wenn nähmlich $f\alpha<\varphi\alpha$, und $f(\alpha+U)=\varphi(\alpha+U)$, so muß zwar allerdings $f(\alpha+U+\omega)>\varphi(\alpha+U+\omega)$ seyn; wenn man ω klein genug nimmt; d. h. die Function fx, die vorhin kleiner war, als φx, muß bald darauf, nachdem beyde einander gleich geworden sind, größer als φx werden. Allein bey immer größerer Vermehrung von ω ist es wohl möglich, daß man, bevor $\alpha+U+\omega$ noch $=\beta$ gemacht worden ist, auf Werthe kommt, die fx abermahls $<\varphi x$ geben. In einem solchen Falle muß es, wie unmittelbar aus unserm Lehrsatze folgt, nebst U noch zwey andere zwischen α und β liegende Werthe von x geben, welche machen. Denn es sey $f(\alpha+U+k)<\varphi(\alpha+U+k)$; so muß es, weil vorhin $f(\alpha+U+\omega)$ schon $>\varphi(\alpha+U+\omega)$ war, zwischen $\alpha+U+\omega$ und $\alpha+U+k$, d. h. auch zwischen α und β, einen Werth von x geben, wofür $fx=\varphi x$ ist; und eben so, weil wieder $f(\alpha+i)$ oder $f\beta>\varphi\beta$ ist, auch zwischen $\alpha+U+k$ und β noch ein Werth von x, der $fx=\varphi x$ macht. Auf diese Art erhellet, daß die Werthe von x, welche $fx=\varphi x$ machen, überhaupt immer nach einer ungeraden Zahl vorhanden seyn müssen.

17.

Lehrsatz. Jede Function von der Form $a+b\,x^m+c\,x^n+\cdots+p\,x^r$, in welcher $m\,,n\,,\ldots,r$ ganze positive Exponenten bezeichnen, ist für alle Werthe von x eine nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderliche Größe.

Beweis. Denn wenn sich x in $x+\omega$ verändert; so ist die Aenderung, welche die Function erfährt, offenbar

$$=b\,[(x+\omega)^m-x^m]+c\,[(x+\omega)^n-x^n]+\cdots+p\,[(x+\omega)^r-x^r]\,,$$

eine Größe, von der sich leicht darthun läßt, daß sie so klein werden könne, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Denn zu Folge des binomischen Lehrsatzes. dessen Gültigkeit für ganze positive Exponenten wir (§. 8 des binom. Lehrs.) unabhängig von den Untersuchungen, mit denen sich die gegenwärtige Abhandlung beschäftigt, dargethan haben, ist die Größe:

$$\omega\left\{\begin{matrix} mb\,x^{m-1}+m\bullet\dfrac{m-1}{2}\,b\,x^{m-2}\,\omega+\cdots+b\,\omega^{m-1} \\ nc\,x^{n-1}+n\bullet\dfrac{n-1}{2}\,c\,x^{n-2}\,\omega+\cdots+c\,\omega^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ rp\,x^{r-1}+r\bullet\dfrac{r-1}{2}\,p\,x^{r-2}+\cdots+p\,\omega^{r-1} \end{matrix}\right\}$$

Die Menge der Glieder, aus welchen der in den Klammern enthaltene Factor bestehet, ist, wie man weiß, immer nur endlich, und von dem Werthe der Größen x und ω unabhängig; und da diese überall nur in positiver Potenz erscheinen; so ist der Werth jedes einzelnen Gliedes, folglich auch des ganzen Ausdruckes für jeden Werth von x und ω, (auch für $x=0$), immer nur endlich. Wird aber bey einerley x, ω verkleinert; so nehmen die Glieder, in denen ω vorkömmt, ab, während die übrigen ungeändert bleiben. Bezeichnen wir also durch S die Größe, die herauskommt, wenn man die Werthe, die alle einzelnen Glieder des Ausdruckes für ein bestimmtes ω, z. B. für ω_1 annehmen, so zu einander addirt, als ob sie alle einerley Vorzeichen hätten: so ist der wirkliche Werth, den dieser Ausdruck für eben dasselbe ω_1 hat, gewiß nicht $>S$, derjenige aber, den er für jedes kleinere ω annimmt, sicher $<S$. Verlangt man daher, daß die Veränderung, welche die Function $a+b\ x^m+c\ x^n+\cdots+p\ x^r$ erfährt, $<D$ ausfalle; so nehme man nur ein ω, das zugleich $<\omega_1$, und auch $<D/S$ ist: so wird $\omega \bullet S$, und um so mehr das Product aus ω in eine Größe, die $<S$ ist, $<D$ seyn müssen.

18.

Lehrsatz. Wenn eine Function von der Form

$$x^n+a\ x^{n-1}+b\ x^{n-2}\cdots+px+q,$$

in welcher n eine ganze positive Zahl bedeutet, für $x=\alpha$ einen positiven, für $x==\beta$ aber einen negativen Werth annimmt; so hat die Gleichung

$$x^n+a\ x^{n-1}+b\ x^{n-2}\cdots+px+q=0$$

wenigstens eine reelle Wurzel, die zwischen α und β liegt.

Beweis. 1. Wenn α und β beyde einerley Vorzeichen haben (beyde entweder positiv oder negativ sind); so ist es klar, daß eben dieselben Glieder der Function, welche für $x=\alpha$ positiv oder negativ werden, dieß Zeichen auch für $x=\beta$, und für die sämmtlichen Werthe von x, die zwischen α und β liegen, behalten. Wird nun der Werth der Function für $x=\alpha$ positiv, für $x=\beta$ aber negativ; so kann dieß nur daher rühren, weil die Summe der positiven Glieder in ihr für $x=\alpha$ größer, für $x=\beta$ aber kleiner, als die der negativen ausfällt. Aber die Summe jener sowohl als dieser ist von der Form

$$a+b\ x^m+c\ x^n+\cdots+p\ x^r$$

des §. 17, d. h. eine stetige Function. Bezeichnen wir also die eine durch φx, die andere durch fx; so muß es, weil $f\alpha<\varphi\alpha$ und $f\beta>\varphi\beta$ ist, nach §. 15 irgend einen zwischen α und β gelegenen Werth von x geben, für welchen $fx=\varphi x$ wird. Für diesen Werth wird aber $fx-\varphi x$, d. h. die gegebene Function zu Null; also ist dieser Werth eine Wurzel der Gleichung

$$x^n+a\ x^{n-1}+b\ x^{n-2}\cdots+px+q=0.$$

2. Sind aber α und β entgegengesetzt; so betrachte man den Werth, den die gegebene Function für $x=0$annimmt. Ist dieser Null; so ist von selbst erwiesen, daß die erwähnte Gleichung eine reelle, zwischen α und β liegende Wurzel habe; nähmlich $x=0$. Ist aber dieser Werth (die Größe q) positiv; so weiß man jetzt, daß die gegebene Function für $x=0$ positiv, für $x=\beta$ aber negativ werde; und weil dieselben Glieder, welche für $x=\beta$ positiv oder negativ werden, dieß Zeichen auch für alle zwischen 0 und β liegende Werthe von x behalten: so kann man ganz durch dieselben Schlüsse, wie in n°. 1 beweisen, daß zwischen 0 und β ein Werth von x liegen müsse, welcher die Function zu Null macht.

Ist endlich q negativ; so gilt dasselbe, was wir so eben gesagt, wenn man nur α statt β setzt. Da nun ein zwischen 0 und β oder ein zwischen 0 und α liegender Werth auch zwischen α und β liegt, wenn beyde entgegengesetzt sind; so ist die Wahrheit unsers Lehrsatzes für jeden Fall erwiesen.