Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 25, nº49 - pp. 18–33
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O MESOLÁBIO, A DUPLICAÇÃO DO CUBO E OS TEMPERAMENTOS MUSICAIS

Renato B. Bortolatto
Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA – Brasil

(aceito para publicação em outubro de 2024)

Resumo

O mesolábio é um instrumento mecânico inventado na Antiguidade para determinar eficientemente dois segmentos de reta proporcionais a dois segmentos de reta dados, problema cuja solução pode ser usada para obter a duplicação do cubo. Neste artigo discutimos a origem do mesolábio, seu funcionamento, seu ressurgimento na teoria da música do século XVI e sua perda de importância diante das mudanças nas concepções de ciência do século XVII.

Palavras-chave: Matemática, História, Mesolábio, Monocórdio.

[THE MESOLABE, THE DUPLICATION OF THE CUBE AND THE MUSICAL TEMPERAMENTS]

Abstract

The mesolabe is a mechanical instrument invented in Antiquity to efficiently determine two straight segments proportional to two given straight segments, a problem whose solution can be used to obtain the duplication of the cube. In this article, we discuss the origin of the mesolabe, its functioning, its resurgence in music theory in the 16th century, and its loss of importance in the face of changes in the conceptions of science in the 17th century.

Keywords: Mathematics, History, Mesolabe, Monochord.

O mesolábio e sua origem

O mesolábio é um instrumento mecânico da Antiguidade cuja função é determinar duas médias proporcionais, também chamadas de médias contínuas, X e Y, entre dois dados comprimentos A e B, ou seja, deseja-se determinar X e Y tais que $A:X:Y:B$. Em linguagem moderna podemos entender o problema como a equação

$$\frac{A}{X} = \frac{X}{Y} = \frac{Y}{B},$$

para $A, B, X, Y > 0$.
Temos assim que $X = \sqrt{AY}$ e $Y = \sqrt{XB}$, ou seja, X é a média geométrica entre A e Y e Y é a média geométrica entre X e B. O problema admite solução trivial $X = Y = A$ se $A = B$, de forma que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $A > B$.

Ao menos um autor da Antiguidade atribui a Hipócrates de Quio (470 AEC - 410 AEC[1]) a descoberta de que a determinação de médias proporcionais pode ser usada como forma de resolver o problema da duplicação do cubo (como no trecho traduzido em NETZ, 2004, p. 294). Para ver isso, considere por exemplo o problema $2A:X:Y:A$, do que obtemos as equações

$$X^2 = 2AY, Y^2 = AX \text{ e } XY = 2A^2,$$

podendo-se delas concluir que $Y^3 = AXY = 2A^3$, ou seja, Y é tal que seu cubo é igual a duas vezes o cubo de algum segmento dado de comprimento A. De outra forma note que o problema $A:X:Y:1$ pode ser usado para determinar a raiz cúbica de A, já que temos agora

$$X^2 = AY, Y^2 = X \text{e } XY = A,$$

de forma que $Y^3 = XY = A$.

Em grego, o nome mesolábio pode ser encontrado na forma *μεσό-λαβον* ou *μεσό-λαβος* (LIDDELL & SCOTT, 1940, p. 944). A primeira forma pode ser transliterada como *mesólabon*, mais conhecido por sua tradução, um pouco imprecisa, *mesolabium*, em Latim. Etimologicamente, a palavra pode ser entendida como a junção de *meso* (meio) com *lambánō* (tomar). A segunda forma pode ser transliterada como *mesólabo* e se traduz mais diretamente como *intermediário*.

Há duas conhecidas referências da Antiguidade que fazem menção ao mesolábio. A primeira se encontra no comentário de Eutócio de Ascalão (480 EC–540 EC) sobre o texto *Sobre a esfera e o cilindro, livro II* de Arquimedes (NETZ, 2004, p. 185–242). No texto original, datado em cerca de 225 AEC, Arquimedes determina a área da casca esférica e da

[1]Nesse artigo usamos a abreviação AEC para "antes da era comum" e EC para "era comum", essa última iniciada no ano 1 do calendário gregoriano. Os anos apontados, especialmente aqueles antes da era comum, são fornecidos apenas para referência e devem ser interpretados como aproximações, divergindo consideravelmente dependendo da fonte consultada.

casca do cilindro finito, além do volume das regiões limitadas determinadas por essas superfícies por meio de argumentos sofisticados que motivam o texto de Eutócio.

Eutócio aborda o problema das médias proporcionais já no comentário sobre o primeiro teorema da segunda parte de *Sobre a esfera e o cilindro, livro II*. Ao analisar as possíveis formas de entender a afirmação "*Tomemos um cilindro com metade do tamanho de um dado cone ou cilindro"* (onde por tamanho entendemos volume), observa que a mais interessante é aquela em que nem a base nem a altura do cilindro se mantém iguais, envolvendo assim, segundo sua própria dedução, a determinação de duas médias proporcionais. É importante notar que esta não é a única direção que esse problema pode indicar, mas a que o autor julga interessante explorar, tomando assim uma tangente ao problema original para discutir médias proporcionais. Eutócio passa então a descrever diversas diferentes soluções para este problema. As atribuições de data e autoria de algumas das soluções apresentadas por Eutócio podem ser duvidadas, como é mais evidente no caso de uma solução atribuída a Platão, já que não há qualquer outro vestígio que Platão (427 AEC -348 AEC) teria trabalhado nesse problema (KNORR, 2012, p. 78)[2]. É certo, no entanto, que a obtenção de médias proporcionais por meios mecânicos, e portanto uma solução para o problema da duplicação do cubo desconsideradas as limitações da régua e compasso, já era bem conhecida antes de 510 EC, como fica aparente, por exemplo, na solução atribuída a Herão de Alexandria, morto antes de 80 EC, muito similar a que aparece em seu livro *Mechanica*.

A seção do comentário de Eutócio que nos interessa em particular é um trecho atribuído a Eratóstenes de Cirene (276 AEC–194 AEC). Há relevantes dúvidas sobre se a autoria da maior parte do trecho é de fato de Eratóstenes, como podemos traduzir Wilamowitz, especialista em literatura da Grécia antiga: "A opinião predominante é que temos uma carta e um epigrama sob o nome de Eratóstenes, mas ambos são ilegítimos, e o epigrama é uma obra completamente miserável, apenas forjada com base na carta." (WILAMOWITZ, 1894, p. 15. Tradução livre). Já Knorr (KNORR, 2012, p. 131–146) apresenta uma tradução do trecho para o inglês, acompanhado de argumentos linguísticos que subsidiam a ideia que a maior parte trecho do texto que discutiremos agora é legítimo.

Afirmando que Hipócrates de Quio foi o primeiro a perceber que a determinação de duas médias proporcionais é equivalente à duplicação do cubo, o autor evoca a conhecida lenda de Minos[3]. Minos, ao determinar a construção um monumento funerário para seu filho Glauco, ouve que este teria cem côvados de comprimento em cada direção e responde:

> "Você fala de um pequeno recinto do túmulo real;
> Que seja duplo, mas, sem estragar sua beleza,
> dobre rapidamente cada lado do túmulo."
> (Autor desconhecido, citado em KNORR, 2012, p . 147. Tradução livre.)

[2]Umas das hipóteses discutidas na literatura é que se trata de uma outra pessoa também chamada Platão.
[3]Um semideus da mitologia grega, filho de Zeus e Europa, rei de Creta. Popularmente conhecido por sua relação com o Minotauro.

O trecho em estudo nota o erro de Minos afirmando que, sendo o recinto plano, duplicar seu lado quadruplicaria seu tamanho e, sendo sólido, o octuplicaria. Afirma então que o mesmo problema apareceu posteriormente aos habitantes da ilha de Delos, para os quais um oráculo exigiu que dobrassem seus altares, assunto para o qual recrutaram a ajuda de Platão[4]. Cita também o interesse de Arquitas de Tarento e Eudoxo de Cnido no problema, alegando que "todos eles escreveram de forma demonstrativa, e era praticamente impossível fazê-lo à mão (exceto, pela brevidade, Menêcmo – e isto com dificuldade). Mas concebemos uma certa maneira mecânica e fácil de calcular proporcionais através da qual, dadas duas linhas, os meios – não apenas dois, mas tantos quantos puderem ser apresentados – serão encontrados." (NETZ, 2004, p. 295. Tradução livre). Desta forma o texto atribuído a Eratóstenes reconhece a existência de outras soluções para o problema das médias contínuas que a antecedem, mas aponta as limitações práticas dessas soluções e destaca o mesolábio como um instrumento de uso simples e prático. Do ponto de vista moderno o mesolábio se assemelha a uma variação da régua de cálculo, o que discutiremos com mais detalhes na próxima seção, de forma que não é difícil de se convencer de sua facilidade de uso.

A segunda referência da Antiguidade que trata do mesolábio pode ser encontrada nos escritos de Papo de Alexandria (290 EC–350 EC) especificamente no livro III de sua *Coleção Matemática* (como traduzido da versão em Latim - o título grego original Συναγωγή pode ser transliterado como S*ynagōgḗ*). A versão referencial do trabalho de Papo é a transcrição grega com tradução para o latim feita por Hultsch em três volumes. O livro III em particular (HULTSH, 1876, Volume I, p. 31–177) não é considerado uma obra de grande importância, sendo mais fácil achar traduções modernas em inglês do livro IV e VII, mas há uma tradução recente de John Little disponível (LITTLE, 2023, p. 9–69).

> "*Os antigos dizem que existem três classes de problemas em geometria, e que eles são chamados de planares, sólidos e de linhas curvas*[5]*. É razoável dizer que aqueles que podem ser resolvidos através de retas e arcos de circunferência são planares pois as curvas através das quais tais problemas são resolvidos também nascem num plano. Aqueles problemas que derivam sua solução da determinação de uma ou mais seções de um cone são chamados de sólidos. Pois é necessário utilizar as superfícies de figuras sólidas, me refiro às cônicas, na construção. Resta um terceiro tipo, chamado de linhas curvas. Diferentes linhas de diversas, complexas e forçadas origens são tomadas para a construção desses problemas. Deste tipo são as espirais, quadratrizes*[6]*, conchoides e as cissoides*[7]*, todas as quais possuem muitas importantes e surpreendentes propriedades.*

[4]Essa lenda, também bastante conhecida, justifica o nome "problema de Delos" para a duplicação do cubo.

[5]No original, "linear" traduzido às vezes como "por linhas". Optou-se aqui por uma adaptação que deixasse clara a intenção do autor. Eutócio viria a se referir, com desdém, a este tipo de técnica (veja a nota 155 em NETZ, 2004, p. 294).

[6]Uma curva plana cuja a ordenada de cada ponto corresponde uma área (quadratura) determinada por outra curva.

[7]Uma curva plana gerada por distâncias relativas a duas curvas quaisquer dadas e a um ponto, chamado de polo. São exemplos familiares as hipérboles e algumas curvas obtidas de equações cúbicas em duas variáveis. Também são frequentemente descritas na forma polar. O nome cissoide têm origem grega, fazendo referência ao formato das heras.

> *Sendo estas as diferenças entre os problemas, os antigos geômetras não puderam resolver o problema anteriormente mencionado de encontrar duas médias proporcionais entre duas retas por construções dependendo do raciocínio geométrico, ja que esse é um problema sólido por natureza. Já que seções cônicas não eram fáceis de descrever no plano (porque é necessário encontrar duas médias em proporção contínua entre duas dadas retas diferentes), eles desenham as proporções médias, ao invés disso, usando instrumentos maravilhosamente adequados para trabalho manual e construção, como pode ser visto nos escritos de Eratóstenes sobre seu mesolábio ou "extrator de médias" e na Mecânica de Filão de Bizâncio e Heron de Alexandria (ou nas Catapultas[8]). Pois concedendo que o problema é um problema sólido, eles puderam apenas ter feito a construção usando ferramentas (de acordo com Apolônio de Perga, que fez a análise por meio das seções cônicas, e outros que usaram o lugar sólido de Aristeu). Mas ninguém por métodos distintamente propriamente chamados planares. Nicomedes resolveu o problema através de uma conchóide, através da qual ele também trissectou ângulos*." (Papo de Alexandria, adaptado em LITTLE, 2013, p. 16–17. Tradução Livre.)

No trecho acima notamos que Papo relata que os "antigos geômetras" já suspeitavam da impossibilidade da duplicação do cubo por meio de régua e compasso. Uma prova para esse fato apareceria apenas muito posteriormente, em 1837, quando Pierre Wantzel publicou um artigo que pode ser entendido como a primeira prova publicada da impossibilidade da duplicação do cubo, sendo tecnicamente uma aplicação imediata da teoria de Galois. Esse artigo, no entanto, causou pouco impacto na comunidade científica da época, seguindo sem citações por 80 anos. Especula-se que uma das razões para isso é que o resultado era considerado folclórico no século XIX, racionalizado por alguns como mera consequência de que uma equação irredutível de grau três deveria ter suas três raízes obtidas simultaneamente por meio da régua e compasso, sendo que retas e circunferências só podem se interceptar, em cada passo da construção, em no máximo dois pontos (LUTZEN, 2009, p. 386).

Do funcionamento do mesolábio

O trecho atribuído a Eratóstenes no comentário de Eutócio dá indicação o suficiente para reconstruirmos o mesolábio e para remontarmos uma prova de que o resultado desejado é de fato obtido com seu uso. O instrumento é descrito como uma caixa feita de madeira, marfim ou bronze que abriga três tábuas finas dispostas paralelamente, sendo a do meio fixada e as extremas podendo ser movidas em sulcos – pense em três portas de correr (Figura 1). O autor indica que o instrumento "deve ser feito com grande arte, para que, quando as tábuas forem simultaneamente movidas, todas permanecem paralelas e firmes, tocando-se mutuamente".

[8]A relação entre a catapulta e a duplicação do cubo pode ser entendida de forma resumida no problema de, dada uma catapulta, se construir uma segunda catapulta que seja capaz de disparar um projétil duas vezes mais pesado que o da primeira.

O trecho citado seria supostamente uma carta, endereçada ao rei Ptolemeu (entendido como Ptolemeu III Evérgeta (280 AEC–222 AEC)), onde há a indicação que um exemplar do mesolábio é dedicado ao rei: "a máquina é feita de bronze e é encaixada com chumbo abaixo da coroa daquele pilar, e a prova abaixo dela (expressa de forma mais sucinta), e a figura, e com ela o epigrama.". Eratóstenes de fato serviu a Ptolemeu III como tutor de seu filho Filópator, que viria a ser Ptolemeu IV, popularmente conhecido como responsável pelo declínio da dinastia Ptolomaica e com ela o fim da dominância grega no Egito. Mais adiante Eratóstentes seria nomeado ainda por Ptolemeu como bibliotecário na biblioteca de Alexandria (GOW, p. 244–245).

Uma versão do mesolábio semelhante a descrita na carta pode ser produzida rapidamente e economicamente, por exemplo, usando três pedaços retangulares e iguais de papel, um lápis e uma régua ou barbante. Recordamos que nosso objetivo é, dados $A, B > 0$, determinar $X, Y > 0$ tais que $A : X : Y : B$. Por simplicidade assuma que $A > B$ e que A é igual a medida de um dos lados dos retângulos, que será colocado sobre uma mesa com este lado disposto de forma vertical. Com auxílio da régua, traçamos uma diagonal em cada um dos três retângulos. Colocamos os retângulos, da direita para a esquerda, encobrindo parcialmente um ao outro, de forma que as diagonais traçadas anteriormente fiquem inclinadas para baixo e paralelas quando consideradas como retas em um mesmo plano. Chamamos o ponto inferior do retângulo mais acima de O e a ponta superior esquerda do mesmo retângulo de A, de forma que OA têm comprimento A. Considere então o ponto F correspondendo a ponta inferior visível do retângulo mais abaixo e marque o ponto B nesse mesmo retângulo de forma que FB têm comprimento B. Com o barbante ligando os pontos A e B movemos horizontalmente o retângulo do meio por baixo do retângulo superior até que o barbante intercepte a diagonal do retângulo do meio em seu último ponto visível. O mesmo é feito para o retângulo de baixo, cujo deslocamento moverá o ponto B na direção horizontal, movimento que deve ser acompanhado pelo barbante. Ajuste iterativamente os triângulos do meio e inferior até que os últimos pontos visíveis X e Y das diagonais do retângulo do meio e do retângulo inferior sejam colineares com A e B. Afirmamos que as distâncias de X e Y ao segmento OF correspondem, respectivamente, às medidas X e Y procuradas.

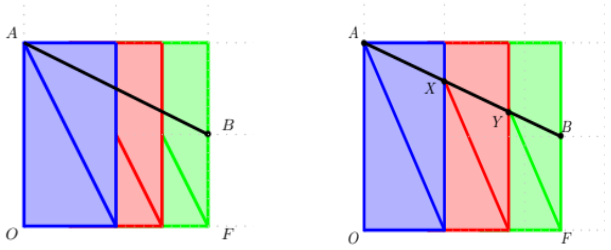

FIGURA 1: O mesolábio em sua configuração inicial, à esquerda, e sua configuração desejada, à direita.

A primeira vista não é claro porque os pontos X e Y determinam as distâncias procuradas. A prova segue estendendo a semirreta de A para B até interceptar a semirreta de O para F no ponto que chamaremos de P[9]. Considere os pontos auxiliares R e S tais que XR é perpendicular a OF e YS é perpendicular a OF (veja a Figura 2). O triângulo AOP é facilmente visto semelhante, por via de congruências A-A-A (ângulo, ângulo, ângulo), com XRP, YSP e BFP – mas isso não é o suficiente para a resolução do problema, sendo necessário também observar as semelhanças entre os triângulos ARP, XSP e YFP, também via A-A-A. O restante do raciocínio seguirá escolhendo os pares de equações corretas, por exemplo,

$$\frac{AO}{XR} = \frac{AP}{XP} = \frac{RP}{SP} = \frac{XR}{YS} = \frac{XP}{YP} = \frac{SP}{FP} = \frac{YS}{BF},$$

ou seja, $\frac{AO}{XR} = \frac{XR}{YS} = \frac{YS}{BF}$, conforme desejado.

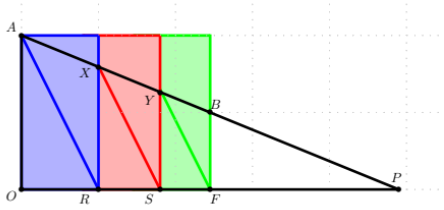

FIGURA 2: Diagrama indicando as semelhanças nos triângulos contidos em AOP.

O autor nota corretamente que a solução pode ser generalizada para determinar qualquer quantidade de médias contínuas entre dois comprimentos dados, afirmando que para isso a quantidade de tabuletas deve ser sempre um número maior que a quantidade de médias desejadas, mas não comenta que, no caso de quatro tabuletas por exemplo, não faz mais sentido pensar na tabuleta "do meio" fixada, como propõe em sua construção. De fato, note que nossa versão da construção proposta é mais semelhante a considerar que a tabuleta da frente da caixa fique estática, assim como outros autores fariam posteriormente. É possível, dada a natureza mecânica do instrumento, que a escolha de fixar a tabuleta do meio seja relacionada a forma como o ajuste da reta passando por A, X, Y e B é feito, o que não é descrito no fragmento. No entanto, a linguagem escolhida no fragmento sugere que essa linha deve ser "tomada", de forma que não há porque acreditarmos que a linha se movia automaticamente com o movimento das tabuletas. Dos experimentos práticos com essa variação do mesolábio é plausível que a escolha da tabuleta central imóvel tenha como intenção trazer mais estabilidade para a solução, permitindo mover uma tabuleta sem deslocar acidentalmente a tabuleta mais próxima.

[9]A intersecção em P ocorre desde que a reta passando por A e B não seja paralela à reta passando por O e F. Por sua vez, essas retas são paralelas apenas se as quantidades A e B são iguais, caso que já resolvemos inicialmente notando que a equação das médias contínuas é satisfeita por $X = Y = A = B$. Note também que P está à direita da reta que passa por A e O pois assumimos que $A > B$.

A solução do problema da média contínua por via do mesolábio é curiosa por compartilhar aspectos mecânicos e de geometria plana de forma simples, prática e elegante. Da parte mecânica, na verdade, consiste apenas em obter, sem grande dificuldade, a configuração geométrica desejada, e a prova que a configuração geométrica possui a propriedade pedida é um estandarte da geometria euclidiana plana, de forma que tanto a construção do mesolábio, na forma simplificada que propusemos, quanto a análise de seu funcionamento podem ser assuntos abordados em sala de aula (figura 3).

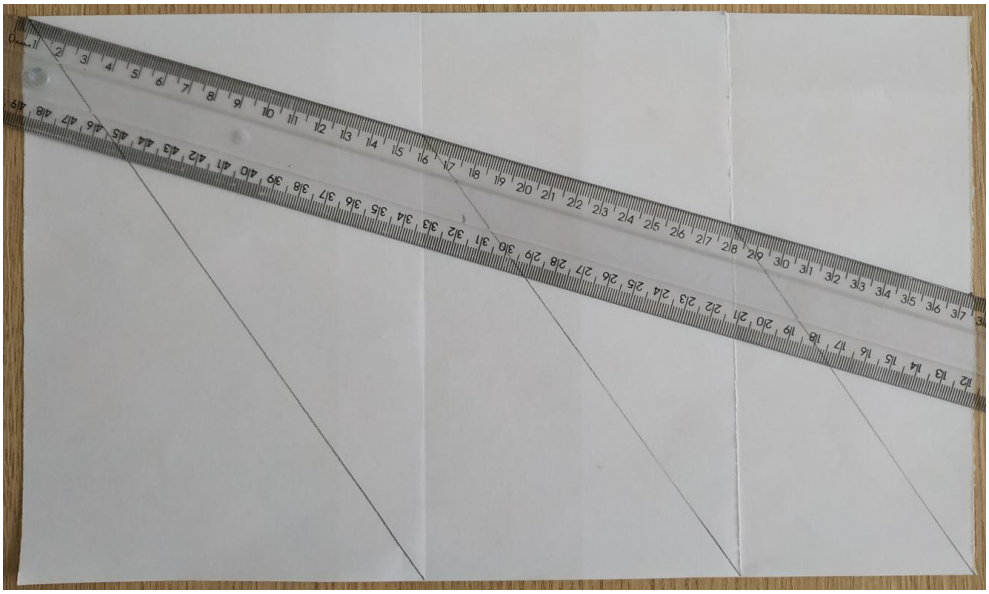

FIGURA 3: Um mesolábio funcional feito com retângulos de papel A4 cortados ao meio e uma régua transparente. O ponto à direita foi marcado na metade da altura do papel nesse exemplo.

No texto original transparece o orgulho do autor na solução obtida, o que pode possivelmente ser melhor entendido considerada a hipótese de que a lenda da duplicação do cubo seria uma provocação aos que consideravam a geometria plana como ciência superior, entre eles, claro, os neopitagóricos, hipótese baseada em uma citação de Teon de Esmirna por Eratóstenes (HEATH, 1921, Vol 1, p. 245–246). As diversas outras propostas apresentadas por Eutócio para o problema das médias proporcionais se dividem em três categorias: aquelas que envolvem a construção de complicados mecanismos a partir de uma série de requisitos geométricos, aquelas que envolvem uma construção geométrica usual e um barbante em movimento, gerando linhas curvas, e as que envolvem movimentos de figuras propriamente sólidas e levam a configurações geométricas de análise bastante complicada. Aqui observamos que a divisão dos problemas em planares, sólidos e por linhas curvas não é uma classificação própria, já que métodos por sólidos e por linhas curvas podem ser usados na resolução de um mesmo problema.

Das soluções apresentadas, nota-se que a de Herão é a que mais se aproxima da solução obtida pelo método do mesolábio, envolvendo a determinação de uma reta apoiada em um ponto de forma que seus dois extremos determinem, com o centro do retângulo de lados de medida A e B, segmentos de mesmo comprimento. A prova segue então por geometria plana, mas fica aberta a forma mecânica de garantir que os dois segmentos mencionados tenham o mesmo comprimento (ver KNORR, 2012, capítulo 5, p.77–129, para uma apresentação dos métodos descritos por Eutócio).

O mesolábio, no entanto, não agradaria a todos. Nicomedes, um matemático grego sobre o qual sabemos muito pouco, debocha da solução atribuída a Eratóstenes como impraticável, advogando sua longa solução auxiliada por uma curva mecânica conhecida como conchoide de Nicomedes, método semelhante ao que ele propunha para a trissecção do ângulo (Eutócio de Ascalão, adaptado em NETZ, 2004, p. 289).

Eratóstenes de Cirene é especialmente conhecido entre os matemáticos por seu cálculo da circunferência da Terra e por seu método para a determinação dos primeiros números primos, mas suas contribuições à ciência não se restringem à matemática. Era chamado por Pentatlos por seus devotos, pois em comparação a competição olímpica de luta, corrida, salto, disco e dardo, era detentor de grande conhecimento em diversas áreas. Por seus detratores era chamado de Beta, supostamente por sempre ser segundo em tudo que fazia (HEATH, 1921, Vol 2, p. 104). É crível, sob a ótica de nossa discussão sobre o mesolábio, que essa seja de fato sua invenção, por sua elegância, criatividade e por sua habilidade em geometria, assim como é crível que o fragmento que discutimos, com destaque para o orgulho da descoberta subentido no texto, seja em maior parte de sua autoria mesmo porque não seria preciso afirmar autoria plena de um fragmento copiado. O texto termina com um pequeno poema, arte pela qual Eratóstenes também era conhecido (GOW, p. 244–245).

O mesolábio e as divisões do monocórdio

O monocórdio é um instrumento de investigação científica no campo da música cuja história escrita se inicia no *Sectio canonis*, obra frequentemente atribuída a Euclides mas também de autoria questionada na literatura (BARKER, 1984, p. 190). Essa obra certamente é escrita em modelo similar aos *Elementos*, mas mesmo uma leitura superficial deixa dúvidas sobre a autoria de Euclides, o que é bastante aparente em sua parte final (para uma versão em português veja BARBOSA, 2020, p. 31-75). Isso poderia ser explicado por termos acesso a apenas uma versão preliminar, provavelmente nunca terminada e complementada por outros autores. Em todo caso o próprio estilo do texto sugere que foi escrito em sua maior parte próximo a 300 AEC. O monocórdio, ainda entendido como instrumento científico, certamente pode ter existido antes disso, especialmente se o considerarmos em formas mais brandas, mas é no mínimo pouco prudente atribuir sua invenção a Pitágoras, como se pode encontrar na literatura popular, já que não se conhece nenhum texto grego anterior a 300 AEC que faça referência a tal invenção (CREESE, 2010, p. 9).

O monocórdio não possui definição exata mas, em sua versão mais elementar, consiste de uma caixa de ressonância acoplada a uma corda hasteada em suas duas pontas. Um cavalete móvel pode ser usado para separar a corda em duas partes, que podem ser ativadas de forma independente e, em particular, simultânea. Marcações podem ser feitas

para indicar as posições do cavalete que "demonstrariam'' experimentalmente as consonâncias como entendida na Antiguidade, a saber, em que os comprimentos estão na relação de 2 para 1 (hoje conhecida como oitava), em que os comprimentos estão na relação de 3 para 2 (hoje aproximadamente uma quinta) e em que os comprimentos estão na relação de 4 para 3 (hoje aproximadamente uma quarta). Os pitagóricos, cientes dessas relações, não demoraram a associá-las ao seu símbolo místico chamado de tetráctis, um grande triângulo formado por triângulos menores cujos vértices são pontos dispostos em linhas de 1, 2, 3 e 4 pontos, símbolo a que inclusive ofereciam preces e juramentos. O *Sectio canonis* estende o pensamento pitagórico ao limite quando "prova" que o intervalo de tom, entre a quarta e a quinta, não pode ser dividido, querendo dizer com isso que a raiz quadrada de 9/8 não é um número racional, ou seja, tem como definição que as notas musicais são necessariamente determinadas por razões entre inteiros.

O próximo tratado de grande importância sobre as divisões do monocórdio é o livro *Harmonica* de Cláudio Ptolemeu (100 EC–170 EC) em que são discutidas uma série de divisões do monocórdio a partir de razões entre inteiros, incluindo razões que envolvem produtos e quocientes de proporções múltiplas (da forma nm/n) ou epimóricas (da forma (n+1)/n), consolidando assim estudos de diversos autores que o precedem. Ainda assim Ptolemeu considera apenas proporções racionais nas divisões do monocórdio.

Gioseffo Zarlino (1517 EC–1590 EC) em seu tratado de grande importância *Le istitutioni harmoniche*, se propõe a discutir, entre outros temas, as divisões do monocórdio. É possivelmente o primeiro texto que admite o uso de proporções irracionais na divisão do monocórdio, argumentando no capítulo 24 do segundo livro que a divisão do tom em duas partes iguais pode ser feita por meio da 9a. proposição do 6o. livro dos Elementos, que trata da construção de uma única média geométrica entre dois comprimentos (ZARLINO, 1558, p. 93–94). Também argumenta que as proporções irracionais são consequência natural da existência de três médias, aritmética, geométrica e harmônica, sendo que a média geométrica, ao contrário da média aritmética e da média harmônica, não determina necessariamente uma razão racional a partir de razões racionais.

No capítulo 25 do segundo livro, Zarlino considera o "instrumento chamado por alguns de mesolábio" e descreve seu funcionamento de forma próxima ao trecho citado por Eutócio e por meio de um diagrama semelhante, discutindo elementos de uma prova em associação com as proposições de Euclides. Zarlino propõe então que o mesolábio pode ser usado na divisão do monocórdio:

> "*A outra forma de dividir as consonâncias em duas, ou em quantas partes desejar, que sejam iguais, não só é bonita, mas também mais útil que a primeira, por ser mais universal; e foi encontrado por Eratóstenes, quando descobriu a duplicação do cubo, na época em que os habitantes de Delos (como narra Giovanni Grammattico) foram assolados pela peste*." (Zarlino, L*e istitutioni harmoniche*, capítulo 25, p. 94. Tradução livre.)

Francisco de Salinas (1513 EC–1590 EC) em seu *De musica libri septem*, de 1577, propõe uma construção para a divisão do monocórdio chamada de 1/3 de coma baseada em dividir o tritom, definido aqui pela razão 25:18, em três partes iguais. Como esta divisão não

pode ser feita "pela 9a. do 6o. livro ou por qualquer outra proposição de Euclides, será a tarefa usar o instrumento que dizíamos ser chamado de mesolábio, inventado por Arquimedes" (citado em BARBOUR, 2005, p. 50. Tradução Livre). Salinas não discute a prova do funcionamento do mesolábio, referindo o leitor ao 9o. livro de Vitrúvio, *De architectura*, provavelmente escrito entre 30 AEC e 20 AEC. Curiosamente, Vitrúvio faz referência ao mesolábio apenas na introdução do 9o. livro, afirmando que o mesmo é invenção de Eratóstenes, e que o mesolábio pode ser usado na resolução do problema de Delos, levado por um oráculo a Apolo e causado por uma "ofensa contra a religião". No livro de Vitrúvio, no entanto, não há nenhuma justificativa ou mesmo explicação do que seria o mesolábio[10]. As inconsistências que observamos na atribuição de inventor ao mesolábio e quanto à informação presente na obra de Vitrúvio encontradas no trabalho de Salinas poderiam ser explicadas por sua deficiência visual desenvolvida quando tinha aproximadamente 10 anos, sendo possivelmente afirmações baseadas em sua memória.

Apesar de Zarlino fazer referência direta ao mesolábio como forma de dividir um intervalo em duas partes iguais e lançar questionamentos sobre a necessidade de considerar apenas proporções racionais, Barbour considera que Salinas é o primeiro autor a claramente definir e propor métodos geométricos ou mecânicos para obter o temperamento igual de doze notas, ou seja, a divisão do monocórdio em intervalos determinados por uma única proporção: "Julgamos que isso deve ser observado pelos fabricantes de violas, a saber, que a oitava deve ser dividida em 12 partes igualmente proporcionais, das quais 12 serão semitons iguais" (citado em BARBOUR, 2005, p. 6). É importante destacar que, apesar da relevante discussão teórica, acredita-se que, por motivos práticos, afinações desse tipo já eram de uso corrente entre os praticantes.

Marin Mersene (1588 EC–1648 EC), conhecido entre os matemáticos pelos primos de Mersene, escreve, em 1636, seu tratado *Harmonie Universelle* (MERSENE, 1636), obra em que descreve as também famosas três leis de Mersene determinando a frequência de oscilação de uma corda em função de seu comprimento, tensão e densidade. Segundo Barbour, o *Harmonie Universelle* comenta sobre a construção de Salinas estar incorreta, já que "não tem utilidade exceto para encontrar duas médias entre duas dadas linhas" (citado em BARBOUR, 2004, p. 51), o que possivelmente faça referência ao diagrama com três tabuletas, apesar de sua generalização ser imediata e constar explicitamente no trecho atribuído a Eratóstenes. Infelizmente, não consegui encontrar o trecho que Barbour cita em *Harmonie Universelle*, ou em outras obras de Mersene[11]. De qualquer forma, o uso de 13 tabuletas para a construção direta da divisão em 12 semitons iguais seria bastante desajeitado,

[10]É provável que as versões de *De architectura* a que temos acesso sejam incompletas, especialmente quanto aos diagramas. De qualquer forma a referência feita no texto ao mesolábio não se estende mais do que discutimos aqui. Atente que a versão traduzida para inglês da coleção Loeb, por exemplo, é acompanhada por ilustrações não originais. É bastante interessante que Vitrúvio, relatado como um historiador dos instrumentos mecânicos, em especial dos instrumentos mecânicos gregos, não faz nenhuma referência a outros instrumentos mecânicos propostos para a duplicação do cubo.

[11]Barbour faz referência apenas a página 224 do *Harmonie Universelle, Paris, 1636-37*. Nessa mesma edição há algumas páginas 224, já que o livro é dividido em partes, mas não localizei o trecho referido em nenhuma delas. Salinas é citado no livro de gêneros, mas sem referência ao mesolábio. Uma busca extensiva por "Salinas" e "mesolábio" e seus variantes não encontram outras correspondências nessa edição, em francês, nem em uma edição em latim que eu pude consultar.

sendo possivelmente a isso que Mersene se referia. Mas essa abordagem, é claro, não é necessária na construção do temperamento igual, podendo ser efetuada por divisões sucessivas em duas partes. Mersene se refere a outras construções como no comentário de Eutócio para, por fim, justificar sua preferência por sua construção por aproximação baseada na aproximação 18:17 para $2^{(1/12)}$ (BARBOUR, 2004, p. 61).

O trabalho desses últimos autores ilustra como o conhecimento sobre o monocórdio se perdia, passando da descrição exata ao vestígio de existência. A distância geográfica, linguística e mais de mil anos evidentemente devem ser considerados na compreensão dessa descontinuidade. Deve-se também considerar que a preferência por construções exatas, derivadas fundamentalmente do entendimento de que era necessário argumentar matematicamente sobre os fundamentos da música, não tem especialmente qualquer aplicação prática que uma boa aproximação numérica ou feita pelo ouvido bem treinado não tenha (BARBOUR, 2004, p. 87). Como pano de fundo, ainda, devemos considerar as mudanças profundas que a Renascença traria para a filosofia da matemática, assim como para sua prática (GOUK, 2005, p. 136).

Em 1614 John Napier publicaria *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, introduzindo o logaritmo e o aplicando em particular para a extração de raizes cúbicas (NAPIER, 1614, p. 19-20). Rapidamente tabelas de logaritmos seriam publicadas, notavelmente em base 10 por Henry Briggs já em 1617. A régua de cálculo começa a ser desenvolvida em 1620 por Edmund Gunter e o uso de duas réguas de Gunter em conjunto por William Oughtred em 1622 já consiste em versões próximas às atuais (SMITH, 1958, p. 205.) Os logaritmos forneceriam então soluções práticas e com alta precisão tanto para a duplicação do cubo como para a divisão do monocórdio no temperamento igual de 12 notas, bastando para isso aproximar o irracional $2^{(1/12)}$.

Relevante também para nossa discussão é a descrição dos fundamentos da geometria analítica por René Descartes (1596 EC–1650 EC) em seu *Geometria.* Curiosamente, nesse trabalho, Descartes, ao comentar sobre a classificação dos antigos em problemas planos, sólidos e em linhas curvas em comparação com o método que criava ali cita, no início do segundo livro, uma construção por semicircunferências equivalente ao mesolábio, mas sem qualquer menção a esse instrumento, Eratóstenes ou Eutócio (DESCARTES, 1637, livro II, p. 20). A descrição algébrica de Descartes de “linhas curvas” como a parábola viria a permitir o entendimento das soluções para o problema das médias contínuas para além de uma solução mecânica, mas como um início da formalização de uma matemática dedicada a variação (HALL, 2009, p. 11).

Em uma pesquisa por ocorrências em livros entre 1500 e 2019, as palavras "mesolabium" e "mesolab" (versão inglesa) não encontram resultados em livros antes de 1750, quando essa passa a constar em dicionários de forma muito resumida. Há, pelo menos, um par de livros, *Mesolabium architectonicum* de W. Bedwell, trabalho sobre um instrumento de medição de áreas por subdivisão em triângulos, publicado em 1631 e *Mesolabium per rationum proportionalium novas proprietates*, um trabalho sobre frações de R. P. Gregorii, publicado inacabado e postumamente em 1668, que dão correspondências para os termos procurados mas não parecem ter relação relevante com o instrumento que tratamos aqui.

A música por sua vez entrava no período da prática comum, em que sua ênfase teórica passa quase que completamente ao estudo da estética, os princípios físicos e matemáticos sendo entendidos como uma realidade a ser respeitada sem a necessidade de justificativa maior (GOUK, 2005, p. 132). Essa mentalidade favoreceria a ampla adoção do temperamento igual de 12 notas, apesar de sua aparente incompatibilidade com o uso crescente da harmonia tercial devida a perceptível desafinação das terças nesse sistema.

A posição de que a música não deveria ser entendida como subárea da matemática, mas sim ser sua própria ciência, nunca foi estranha aos musicólogos como vemos nos escritos de Aristóxeno de Tarento (360 AEC–300 AEC), forte crítico do pensamento pitagórico nas questões musicais (BARKER, 1984, p. 120). É sua vitória inegável que a teoria da música tenha se construído como sua própria ciência, ainda que a separação tenha tardado. No entanto, não há como ignorar a ironia que a divisão do espectro sonoro mais amplamente utilizada nos dias de hoje, o temperamento igual, seja a divisão do monocórdio que é, na concepção atual de Matemática, a mais objetiva dentre as consideradas na Antiguidade, sendo baseada apenas na equidivisão da oitava e levando a consideração de distâncias em uma escala logarítmica uniforme.

Conclusão

A história do mesolábio nos leva do século V AEC, quando Hipócrates de Quio propõe que o problema da duplicação do cubo poderia ser resolvido por meio da determinação de duas médias continuas, ao século XIX EC, quando uma prova da impossibilidade da obtenção da duplicação do cubo por meio de régua e compasso é obtida. No campo da música a capacidade do mesolábio construir raízes cúbicas o levaria a ser considerado como meio de obter divisões exatas de cordas em determinadas proporções irracionais, o que passou a ser mais amplamente aceito apenas a partir do século XVI EC.

Cercado por lendas e controvérsias que vão da autoria de textos clássicos à disputa de qual seria a melhor solução para o problema da determinação das médias continuas, o mesolábio remete ao passado relativamente recente das réguas de cálculo e de uma época em que não tinhamos, a maioria, uma calculadora conosco o tempo todo. Seu funcionamento, elegante como as terças da afinação justa, é simples o suficiente para ser reproduzido rapidamente em uma sala de aula ou usado como exercício de geometria plana. Também como as terças da afinação justa, o mesolábio pode parecer uma relíquia de uma era passada que só interessa aos especialistas, mas cuja beleza está a uma explicação de distância.

Bibliografia

BARBOUR, James Murray. 2004. *Tuning and temperament: A historical survey*. New York, Courier Corporation.

BARBOSA, Gustavo. 2020. *Euclides – Sectio Canonis – Apresentação e Tradução*. Revista Brasileira de História da Matemática, [s. l.], v. 18, n. 36, p. 31–75.

BARKER, Andrew. 1984. *Greek Musical Writings: Volume 2, Harmonic and Acoustic Theory*. Vol. 2. Cambridge, Cambridge University Press.

CREESE, David. 2010. *The monochord in ancient Greek harmonic science*. Cambridge, Cambridge University Press.

DE SALINAS, Francisco. 1577. De musica libri septem. Salamanca, Mathias Gaftius.

DESCARTES, René. 1637. *Geometria, a Renato Des Cartes*. Amsterdã, Tipografia Blaviana.

GOUK, Penelope. 2005. *Music and the Sciences* em *The Cambridge History of Seventeenth-Century Music*, editado por Tim Carter e John Butt. Cambridge, Cambridge University Press.

GOW, James. 2010. *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press.

HALL, Alfred Rupert. 2009. *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge, Cambridge University Press.

HEATH, Thomas Little. 2009. *The Works of Archimedes: Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*. Cambridge, Cambridge University Press.

HEATH, Thomas Little. 1921. *A history of Greek mathematics, Volume 1 e 2* . Londres, Oxford University Press.

HULTSCH, Friedrich Otto. 1876–1878. *Pappi Alexandrini Collectionis Quae Supersunt, Volumes I–III*. Berlin, Weidmann.

KNORR, Wilbur Richard. 2012. *Textual studies in ancient and medieval geometry*. Berlin, Springer Science & Business Media.

LÜTZEN, Jesper. 2009. Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result, *Historia Mathematica*, 36 (4): 374–394.

LIDDELL, Henry George & SCOTT, Robert. 1940. *A Greek-English Lexicon. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones with the assistance of Roderick McKenzie*. Oxford, Clarendon Press.

MERSENE, Marin. 1636. Harmonie universelle: contenant la théorie et la pratique de la musique. Paris, Sebastien Cramoisy.

NAPIER, John. 1614. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Edimburgo, Andrea Hart.
NETZ, Reviel et al. 2004, *The Works of Archimedes: Volume 1, the Two Books on the Sphere and the Cylinder: Translation and Commentary*. Cambridge, Cambridge University Press.

LITTLE, John Brittain. 2023. Pappus of Alexandria, Book III of the Mathematical Collection. *Holy Cross Bookshelf,* 63.

SMITH, David Eugene. 1958, *History of Mathematics Vol 2 Special Topics of Elementary Mathematics*. 1958. New York, Courier Corporation.

VITRUVIUS, Pollio. 1914. *Vitruvius, the ten books on architecture*. Cambridge, Harvard University Press.

VON WILAMOWITZ-MOELLENDORFF, Udo. 1894. Ein Weihgeschenk des Eratosthenes, em *Nachrichten der k. Gesselschaft der Wissenschaften zu Göttingen, phil.-hist*. Klasse, 15–35.

WANTZEL, Pierre Laurent. 1837. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol 2: 366–372.

ZARLINO, Gioseffo. 1558. *Le istitutioni harmoniche*. Veneza, Iofephus Tramezinus.

Renato B. Bortolatto

Departamento de Matemática – IEF-M – São José dos Campos - Brasil

E-mail: renato.bortolatto@gp.ita.br