Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 nº 29 - p. 145-166
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

GAUSS, OS RESÍDUOS BIQUADRÁTICOS E A REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS[1]

Gerard E. Grimberg,
PEMAT-IM-UFRJ - Brasil

(aceito para publicação em agosto de 2014)

Resumo

Este artigo é seguido de uma tradução nossa da "autorresenha" da segunda memória de Gauss sobre os resíduos biquadráticos, Gauss (1831). Nosso trabalho tenta contextualizar este texto da maior importância histórica na medida em que Gauss expoe nele a sua própria concepção dos números e nos entrega uma visão geométrica dos números complexos. Num primeiro tempo analisaremos como Gauss renova e transforma a teoria dos números com as *Disquisitionnes arithmeticae* publicado em 1801. Analisaremos a seguir o conteúdo do texto de Gauss, mostrando o papel dos números complexos na sua pesquisa sobre os resíduos biquatráticos, e analisando em que consistem a concepção de Gauss dos números, e a representação geométrica dos números complexos.

Palavras chave: Gauss, representação geométrica dos números complexos, resíduos biquadráticos.

[GAUSS, THE BIQUADRATIC RESIDUES AND THE GEOMETRICAL REPRESENTATION OF COMPLEX NUMBERS]

Abstract

This article is followed of our translation of the "auto summary" of the second memory of Gauss on the biquadratic residues, Gauss (1831). Our work tries to gives the context of this text which has a great historical significance because Gauss expound there its proper conception of the numbers and offers his geometric vision of the complex numbers. In a

[1] Agradecimentos: Muito obrigado ao Prof. G. Schubring pelas indicações e conselhos que foram pródigos durante a redação deste comentário sobre o texto de Gauss assim como a tradução do texto de Gauss.

first time we will analyze as Gauss renews and transforms the theory of the numbers with the *Disquisitionnes arithmeticae* published into 1801. We will analyze after the content of the text of Gauss, showing the role of the complex numbers in its research on the biquatratic residues, and analyzing what is the conception of Gauss of the numbers, and his geometric representation of the complex numbers.

Keywords: Gauss, Geometric representation of complex numbers, quadratic residues.

Introdução

O texto de Gauss que apresentamos aqui e cuja tradução segue é uma "autorresenha" redigida por Gauss comentando a sua segunda memória sobre os resíduos biquadráticos: *Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda*. Esta "auto resenha" foi editada na revista *Anzeigen*, da sociedade de Göttingen, e se endereçava a um público mais amplo do que a comunidade matemática. Com efeito, esta revista reunia artigos de todos os domínios científicos. Isto pode explicar a apresentação da parte filosófica do conteúdo do comentário. Em seus escritos matemáticos, Gauss não se estendia sobre o significado das pesquisas que ele conduzia, não citava o histórico da questão e não apresentava a sua concepção sobre os objetos matemáticos que manipulava.

Este texto é, portanto, um dos raros escritos onde Gauss assume uma posição e explicita a sua própria concepção sobre a aritmética e, mais geralmente, sobre a matemática.

Mas antes de comentar a autoresenha e também a memória a qual esta se refere, temos que falar da situação em que se encontrava a teoria dos números na primeira metada do século XIX.

Teoria dos números e Aritmética.

Esta denominação da disciplina é escolhida por Legendre (1898, prefácio, p. IX) que ressalta no préfacio: "Não separo a teoria dos números da análise indeterminada, e considero essas duas partes como constituindo uma e apenas um ramo da análise algébrica". Antes, disto a topografia das disciplinas era diferente. Os Eléments d'Algèbre de Euler (1770), livro redigido em Russo e Alemão e logo traduzido em francês, acompanhado de um longo comentário de Lagrange, é dividida em duas partes. A primeira parte trata da definição dos números inteiros, fracionais, irracionais, imaginários, assim como a resolução das equações algébricas do primeiro grau até o quarto grau, e método de aproximação das raizes das equações algébricas. A segunda trata da chamada análise indeterminada onde procura-se as raizes inteiros de equações. Com o comentário de Lagrange se pode afirmar que nesta constam os métodos e os resultados mais importantes alcançados por Euler e Lagrange até 1770. Mas na obra de Euler a teoria dos números não constitui uma disciplina separada da álgebra.

Os principais avanços da teoria no decorrer do século XVIII constam no tratado de Legendre que resuma também parte dos métodos de Lagrange e resultados obtidos depois

1770 (como o teorema dos quatro quadrados) e resultados do próprio Legendre como o teorema de reciprocidade quadrática.

As pesquisas de Gauss no arredores do século XIX irão transformar a geografia das disciplina. A dissertação de 1799 onde consta uma demonstração do teorema fundamental da álgebra. Mas é sobretudo com as *Disquisitionnes arithmeticae* (1801) que Gauss reformula a teoria dos números inteiros, e a constitui como uma disciplina autônoma em relação a álgebra. Assim como ressalta Gauss:

> *"(...) As pesquisas contidas nesta Obra pertecem à esta parte da Matemática onde se considera particularmente os números inteiros, as vezes frações, mas onde são sempre excluídos os números irracionais. A Análise indeterminada, ou de Diophante, que ensina a distinguir, entre as soluções de um problema indeterminado, aquelas que são inteiras, ou pelo menos racionais, e maior parte do tempo, positivas, não constitui esta doctrina, mas é uma parte bem distinta; tem com ela mais ou menos a mesma relação que a álgebra, isto é, a arte de reduzir ou resolver equações, tem com Análise universal"* (Disq. Prefácio, tradução nossa).

Assim a aritmética aparece como disciplina separada da álgebra, e da teoria da análise indeterminada. Mas como a álgebra é o domínio sobre o quel se torna possível o desenvolvimento da análise, a aritmética cria os métodos que irão se aplicar a análise indeterminada. Segundo Goldstein e Schappaper (2007), as *Disquisitionnes* são um "livro a procura de uma disciplina" ou seja de um certo modo constitui o marco de nascimento de uma disciplina, a arithmética, considerada como uma disciplina da matématica chamada pura, com os seus próprios métodos, suas próprias notações e que irá tecendo multiplos laços com os outros ramos da matemática, como por exemplo, a geometria, a teoria das funções elípticas, os números complexos. Mas qual é o conteúdo das *Disquisitionnes* e em que este conteúdo é original em relação ao tratado de Legendre.

As *Disquisitionnes* são divididas em 7 seções. A primeira estabelece uma nova perpetiva, definindo a noção de congruência que ele denota pelo símbolo hoje consagrado ≡. Este novo conceito legitima do certo modo os números inteiros negativos, pois "os números podem ser positivos ou negativos mas inteiros" (art. 1). Voltaremos mais adiante sobre este ponto. Seguem as propriedades da congruência, resíduos de um número módulo a, compatibilidade da relação de congruência com as operações. A seção 2 inclua a fatoração de todo número em produto de números primos, e trata das congurência lineares até o chamado (hoje) de teorema dos restos chineses. A terceira seção estuda os resíduos de uma potência e demonstra o teorema de Wilson. A quarta seção demonstra o teorema da reciprocidade quadrática; a quinta e a sexta seção procedem a um estudo exhaustivo da formas do segundo grau e as suas aplicações. Enfim a setima trata da divisão do círculo por raizesnesimas da unidade e a questão da construtibilidade dos poligonos regular em particular no caso n=17 (grande avanço realizado por Gauss).

A originalidade da obra discute reside primeiro na invenção de um nova simbologia (a congruência) que possibilita tratar e manipular todos os resíduos de um número modulo um outro número de uma vez só. Permite assim de definir as operações sobre esses residuos, e expressar qualquer equação envolvendo os residuos. A segundo traço inovador consiste em listar e demonstrar todas as propriedades conhecidas dos números inteiros, instaurando assim pelo menos na aritmética um novo padrão de rigor mesmo que na Alemanha o padrão de rigor ficará mais tarde Dirichlet. (Schubring, 2005 p. 558). O terceiro é o estudo detalhado das formas quadráticas e do problema de determinar critérios de quivalência entre essas formas. Enfim o ùltimo capítulo enriquece os laços entre aritmética e geometria pelo estudo da construtibilidade de polígono regulares inscritos.

O impacto do trabalho de Gauss foi muito grande na França. Lacroix inclui na terceira edição dos seus *Complements d'Algèbre* (1804) uma discussão dos resultados de Gauss (Goldstein, p. 20). Desde 1807 uma tradução francesa foi editada e Legendre insere na segunda edição de 1808 do *Essaisurlathéoriedesnombres*, parte dos resultados da sétima seção. Mas confessa Legendra: "Teria-se desejado enriquecer esse ensaio com um maior número dos excelentes materiais que compoem a obra do Sr. Gauss: mas os métodos deste autor são tão particulares, que não se poderia, sem circuitos muitos grandes, e sem asujeitar-se ao simples papel de tradutor, aproveitar suas outras descobertas" (Legendre, 1808, Avertissement, p. VI). Vemos assim o quanto original era a perspectiva nova traçada por Gauss. Na Alemanha a obra de Gauss ficará também a única fonte sobre a nova aritmética até a edição do tratado de Ferdinand Minding (1832), privat-dozent a Berlin que resume uma parte das *Disquisitionnes*(Goldstein, 2007, p. 25).

Entre a edição das *Disquisitionnes* (1801) e as memórias de Gauss sobre os resíduos biquadraticos (1825 e 1831) a disciplina nova não tinha ainda vivenciado muitos avanços. Será na segunda metade do século XIX qui iria se desenvolver a teoria com Dirichlet, Jacobi, Eisenstein, Kronecker e Dedekind. Ainda em 1831, Gauss faz ainda figura de franco atirador e de pionieiro.

Apresentação por Gauss dos resultados da sua segunda memória sobre os resíduos biquadráticos.

A "auto resenha" se divide em duas partes: a exposição dos resultados obtidos em sua memória, e umas considerações sobre o significado dos números complexos inteiros e sua relação com os pontos do plano. Nós pretendemos estudar estas duas partes e, em seguida, pretendemos comentar a recepção deste texto pela comunidade matemática.

Toda esta "segunda memória" visa demonstrar o teorema da reciprocidade biquadrática. Em sua primeira memória, Gauss apresentou o desenvolvimento de técnicas da resolução para alguns casos particulares; mas essas técnicas não possibilitavam uma demonstração geral do teorema.

Isso levou Gauss a elaborar uma extensão do domínio dos números inteiros ao dos números imaginários inteiros. O passo decisivo reside na consideração que um número primo da forma *2p+1* é soma de dois quadrados; e assim botem se uma fatoração do número primo como produto de dois números imaginários: $2p+1=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$. Este método já tinha sido descoberto e utilizado por Euler (170, p. 208 e sq.) para encontrar uma fatoração dos números da forma x^2+cy^2. Mas Euler não justificava a possibilidade de tratar os números inteiros imaginários da mesma maneira que os números inteiros.

Pelo contrário, Gauss observa que a aritmética dos números imaginários possui as mesmas propriedades dos números inteiros que ele tinha demonstrado nas quatro primeiras seções das *Disquisitiones*... Este novo domínio possui uma divisão que possibilita uma definição da congruência de dois números complexos inteiros (a partir de então, Gauss começa a utilizar o termo números complexos ao invez de números imaginários). Gauss toma, por exemplo, como propriedade comum típica, o teorema de Fermat bem como os teoremas dos resíduos quadráticos; e por fim enuncia o teorema dos resíduos biquadráticos. Nesta segunda memória, Gauss não demonstrava todos os casos do teorema, mas afirmava que uma "terceira memória" iria completar a demonstração. Esta terceira memória, no entanto, nunca foi editada. Sabemos pelo seu diario que este teorema ocupou Gauss de 1807 (ou seja, cinco anos depois da publicação das *Disquisitiones* até 1813 (Gauss, 1917, X-1 pp. 565 e sqq.).

Queremos ressaltar alguns pontos que mostram o que já aparecia nas *Disquisitiones*, ou seja, uma concepção da aritmética bem diferente da vigente na época. Para Gauss, o domínio dos números inteiros contém os números negativos. Sua teoria das congruências permitiu incluir estes números em tal domínio de uma maneira natural.

A denominação que ele propõe - números complexos, ao invez de números imaginários - denota a preocupação de Gauss em acabar com a idéia da oposição entre números reais e imaginários. Lagrange, fala ainda de "número imaginários ou impossíveis", (1770, ed. Alemã, Volume I, Inhalt, p.10). Encontrar as mesmas propriedades no domínio dos números inteiros e no dos números complexos provava a possibilidade de conceber os números imaginários como objetos matemáticos tão "reais" quantos os outros números. Já em 1799, na sua memória sobre a demonstração do chamado teorema fundamental da álgebra, ele havia observado:

> *"Por quantidade imaginária, entendo sempre aqui uma quantidade expressa sob a forma* $a+b\sqrt{-1}$ *onde b é diferente de 0. Se as quantidades imaginárias ficam aceitas na análise (o que por várias razões me parece preferível a estas serem rejeitadas, desde que estejam estabelecidas com um fundamento suficientemente sólido), dever-se-ia poder considerá-las como tão possíveis quanto às quantidades reais; e nestes cálculos prefiro abranger ambas as quantidades reais e imaginárias sob a denominação comum de quantidades possíveis... Remeto a*

> *outra ocasião a justificativa dessas quantidades imaginárias sob a forma de uma exposição mais frutuosa desta matéria toda"* (Gauss, 1799, W. III, p.6).

Assim, o argumento principal de Gauss em favor da realidade dos números imaginários já aparece claramente nesta memória. Para ele, os conceitos matemáticos são pertinentes desde que sejam possíveis, ou seja, não contraditórios. Este critério (a não contradição) fundamenta e justifica a existência e a realidade dos conceitos matemáticos da aritmética; a concepção de Gauss se situa assim na tradição leibniziana, considerando o domínio da matemática como domínio das verdades necessárias regidas pelo princípio de não contradição, (cf. Leibniz Monadologia.)

As observações gerais de Gauss

A segunda parte da "auto resenha" é dedicada a demonstrar a necessidade dos números complexos, em sua relação com soluções de equações de resíduos biquadráticos.
O argumento principal de Gauss dirigiu aos que desconfiam da realidade dos números complexos consistiu em providenciar uma clara apreensão sensível (*anschaulichsten Versinnlichung*) destes números associando cada ponto de coordenadas inteiras a um número complexo inteiro. Não se trata nem de uma construção nem de uma fundamentação do conceito de número complexo inteiro, pois esta apreensão se constrói depois, visto "que o autor em sua exposição tem observado um tratamento aritmético puro". A intenção de Gauss é tornar mais viva a compreensão dos números complexos, e por meio desta visualização pretendia mostrar que os números complexos podem se inscrever na realidade sensível.

Para reforçar o argumento Gauss evoca a história da aritmética desde os "antigos". Observa que houve um movimento contínuo para, aos poucos, reconhecer os números fracionários, inteiros negativos, e, por fim, os números complexos. Assim, o próprio movimento da evolução da matemática envolve as diversas extensões que sofreu a noção de número. Os conceitos novos e as novas teorias justificam-se pela possibilidade de assim resolver problemas novos. A dinâmica da pesquisa modifica as relações entre a prática e a teoria. Deste modo, o que justifica a possibilidade das extensões sucessivas da noção de números são as operações:

> *"Os números positivos e negativos podem apenas aplicar-se onde o que está calculado tem um oposto, oposto que unido com ele deve ser pensado igual a uma aniquilação... o que está calculado não são substâncias (objetos pensáveis para si), mas sim, relações entre dois objetos considerados dois a dois."*

Este aspecto é bem evidenciado nas *Disquisitionnes* pelas propriedades da relação de congruência: a soma de resíduos implica a existencia de números negativos para considerar equação do tipo $X + a \equiv 0 \; mod. n.$ Assim, o importante nas operações é a relação que associa dois números e as propriedades desta relação. Considerado assim os números negativos aparecem necessários em relação à soma, os números quebrados em relação ao produto, números reais em relação em operações envolvendo polinômios. Esta posição opõe-se nitidamente as declarções de rejeição destes números por Carnot e Lacroix ainda no início do século XIX, Schubring (2012, p. 58-62).

Outro aspecto destacado por Gauss é a primazia das relações sobre objetos, na matemática. Observando que os pontos que se seguem entrem em relação verticalmente e horizontalmente por adição e subtração de uma unidade (1, -1, i, -i), os pontos demonstram assim a realidade de uma ordem determinada. Afirma Gauss: "A matemática faz completa abstração dos objetos e do conteúdo de suas relações, preocupa-se apenas com a contagem e a comparação das relações entre si." O que constitui a importância e a finalidade da correspondência entre os números complexos e os pontos do plano, portanto, reside no conjunto de propriedades das relações envolvendo números complexos de um lado e a representação que os associa aos pontos do plano de outro lado. Aumentar ou diminuir de uma unidade (1, -1, +*i*, -*i*) um número complexo permite obter um dos números vizinhos. Este aumento ou diminuição corresponde entre os pontos do plano ao mesmo tipo de relação com os pontos vizinhos. "Estas relações são entregues à visão (*Anschauung*) apenas através de uma representação (*Darstellung*) no espaço". As relações recebem assim uma representação geométrica, e nem os números complexos, nem os pontos.
Deste modo, nas observações de Gauss há uma progressão: a apreensão sensível (*Versinnlichung*) dos números complexos por via dos pontos do plano, a constatação por analogia (o termo é de Gauss), e a identidade das relações entre os números, por um lado, e entre os pontos, por outro lado. A representação geométrica dos números complexos se transforma em representação (*Darstellung*) das relações entre os mesmos.

O significado do verbete *Versinnlichung.*

O termo *Versinnlichung* utilizado por Gauss para denominar a sua representação envolvendo números complexos e pontos do plano é um termo raro de retórica. Com efeito, Kant na Crítica do Juízo, (Kant, I, § 59) torna claro a significação do termo: "Toda Hipotipose (*subjectio sub aspectum*) ou *Versinnlichung* é duplo: ou ela é esquemática... ou ela é simbólica...". Não pretendo analisar aqui a concepção de Kant da *Versinnlichung* que não é a mesma do que a de Gauss. O fato é que o termo *Versinnlichung* remete á hipotipose. Segundo Quintilien (9, 2, 40) a hipotipose é uma figura retórica de pensamento.

> *"Quanto à figura que como diz Cícero coloca os próprios objetos diante de nossos olhos, emprega-se não para indicar que um fato aconteceu, mas para fazer ver como tem acontecido... Outros chamam a hipotipose (hypotyposis), isto é, uma representação tão viva dos objetos pela palavra que se acredita mais ver do que ouvir a narrativa".*

Mas será que a *Versinnlichung* é meramente uma apresentação sensível dos números complexos? Há certamente esta significação uma vez que Gauss tenta convencer aqueles que pensam que as quantidades imaginárias são quantidades impossíveis com o argumento que não há por traz das mesmas nenhuma realidade. Mas a *Versinnlichung* acrescenta também conceitos novos pelo fato de envolver relações espaciais e números complexos. Esta se manifesta assim como um novo domínio de reflexão para o matemático. Gauss nos confia, aliás, que quem sabia ler, já poderia estar a par desta representação:

> *"O autor tem abordado há muitos anos esta parte importante da matemática com um ponto de vista diferente, segundo o qual um objeto poderia ser atribuído às grandezas imaginárias tão bem quanto às negativas: mas faltou até agora uma ocasião de expressar isto publicamente de maneira precisa, mesmo se o leitor atento reencontrasse facilmente os traços no escrito de 1799 sobre as equações*, *e no escrito do Premio sobre as transformações das superfícies".*

Gauss sugere assim que esta concepção o acompanhou desde as suas primeiras pesquisas. A nova questão que está emergindo é determinar em que sentido esta nova visão dos números complexos participa da pesquisa do próprio Gauss.

A pesquisa de Gauss e a representação dos números complexos

Na memória de 1799, Gauss propõe uma demonstração do chamado teorema fundamental da álgebra. Considerando um polinômio P(*x*+*iy*) da variável complexa, ele separa a parte real Q(*x*,*y*) da parte imaginária R(*x*,*y*) ou seja escreva: $P(x+iy) = Q(x,y) + iR(x,y)$. Se (x_0, y_0) é uma raiz do polinômio, valem ambas $\mathrm{Q}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$ e $\mathrm{R}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$. O problema se reduz a encontrar no plano a interseção das curvas de equações $\mathrm{Q}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$ e $\mathrm{R}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) = 0$.

Este raciocínio é claramente relacionado à correspondência entre os números complexos e os pontos e as curvas do plano.

Na memória do Premio de 1822, Gauss estuda como representar as partes de uma superfície dada sobre outra superfície de tal modo que a representação seja semelhante em partes infinitamente pequenas. Neste estudo, Gauss resolve equações diferenciais parciais envolvendo função de variável imaginária. Constata que para uma função do tipo $\mathrm{F(z)} = \mathrm{A} + \mathrm{Bz}$ onde A e B são números complexos, o fator de semelhança é igual a $|B|$. Mas para outras transformações, a conservação da semelhança é apenas nas partes infinitesimais (isto é, para o caso de uma função holomorfa). Aí fica evidente que Gauss não apenas possuía a representação geométrica dos números complexos, mas também utilizava esta visão para entender as propriedades das transformações complexas que transformam uma superfície em outra.

Aliás a visão geométrica dos números complexos tem uma função na segunda memoria sobre os resíduos biquadráticos; ajuda a localizar todos os restos possíveis modulo um número complexo a+bi de norma $a^2 + b^2 = p$ (p primo e a e b primos emtre si). São situados no disco de raio $\sqrt{a^2 + b^2}$. Cf. por exemplo, Gauss (Teoria 1831, art. 39, p. 110).

As pesquisas relativas aos resíduos biquadráticos se inserem entre essas duas memórias, pois podemos ler no diario de Gauss em data do 15 de fevereiro 1807: "teoria dos resíduos cúbicos e quadráticos iniciado". Em 22-2-1807: "demonstração desta teoria por um método tão elegante que esta está quase perfeita e não deixa nada a desejar. Ao mesmo tempo resíduos e não resíduos biquadráticos estão perfeitamente elucidados". Em 24-2-1807: "teoremas acrescentando desdobramentos de um grande preço à teoria precedente obtidos por uma elegante demonstração..."

Gauss deu prosseguimento às suas pesquisas, uma vez que escreve, em 23-10-1813: "O mesmo dia em que tivemos um filho, tive a felicidade de encontrar enfim o fundamento da teoria geral dos resíduos biquadráticos que tinha procurado durante sete anos com muitos esforços, mas sempre em vão".

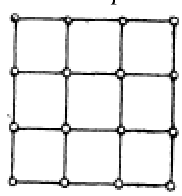
Enfim, em 9-7-1814, Gauss acrescenta:

> *"Observação muito importante obtida por indução e relacionando de maneira muito elegante a teoria dos resíduos biquadráticos às funções lemniscáticas: Si a+bi é um número primo e se a-1+bi é divisível por 2+2i. o número de todas as soluções da congruência*
> $1 = x^2 + y^2 + x^2y^2$ *(mod. a+bi) inclusive*
> $x = \infty$, $y = \pm i$, $x = \pm i$, $y = \infty$ *está igual a* $(a-1)^2 + b^2$*".*

Esta última observação mostra que para Gauss a prática dos números complexos articulava a aritmética e o domínio das funções elípticas.

Um outro texto que mostra que a visão geométrica dos números complexos já acompanhava Gauss neste período onde escrevia o seu jornal é um manuscrito intitulado "Questões sobre a metafísica da matemática"(Gauss, X-1, pp. 396-397:

> *"1. Qual é a condição fundamental para que uma associação de conceitos pudesse ser pensada como se aplicando as grandezas.*



> *2. Tudo é muito simples, se se deixa de lado a divisibilidade ilimitada e se considerar apenas grandezas discretas. Por exemplo, os restos biquadráticos considerados como pontos, a transição portanto a relação enquanto grandezas, onde a significação de* $a + bi - c - di$*está imediatamente clara".*

Este tipo de observação está presente no texto de 1831 e confirma o fato que Gauss tinha esta visualização geométrica dos complexos bem antes de publicar o anuncio de 1831. Temos ainda que mencionar a famosa carta de Gauss a Bessel de 1811 (Gauss W. B. X, p. 367) Onde Gauss explica a respeito de uma função da variável $x = a + b$i, em que se deve associar a este número *x* um ponto do plano cujas coordenadas são tomadas a partir de um eixo real e de um eixo imaginário. Esta visão acompanha assim os cálculos tais como o da integral de tal função. Esta observação mostra, aliás, que Gauss considera importante determinar o domínio sobre o qual a função esta definida, e a visualização geométrica deste domínio facilita os cálculos.

Podemos entender agora que a concepção de Gauss na sua representação geométrica dos números complexos é bem diferente das outras (Argand, 1806; Warren, 1828) que foram publicadas antes da de Gauss. Essas duas representações das grandezas imaginárias, de Argand e a de Warren, relacionam linhas orientadas às operações sobre as grandezas imaginárias, mas se restringem a abordar esta relação: enquanto a representação de Gauss é uma ferramenta efetiva que abrange todos os domínios relativos às grandezas imaginárias: aritmética, funções elípticas, funções da variável complexa, transformações de superfícies. Por um lado, se apresenta uma nova representação, por outro, um modelo efetivo sobre o qual se fundamentam a pesquisa e o desenvolvimento de teorias originais. A perspectiva de Gauss é, assim, bem mais rica, por permitir novos desdobramentos da teoria.

Gauss versus Kant

No texto de 1831, Gauss critica Kant explicitamente: depois de ter observado:

> *"Esta diferença entre direita e esquerda é em si completamente determinada, desde que foram completamente definidos (à vontade) os sentidos para frente e para trás no plano, assim como para acima e para baixo em relação aos dois lados do plano, ainda que possamos comunicar nossa intuição dessa distinção aos outros apenas através de uma indicação relativa às coisas presentes diante de nós".*

Gauss ainda acrescenta a nota a seguir:

> *"Kant já tem feito as duas observações, mas não se entende como este filósofo sutil poderia pensar encontrar na primeira uma prova de sua opinião, que o espaço seria apenas uma forma de nossa intuição (Anschauung) externa, pois a segunda mostra tão claramente o contrário, que o espaço deve ter uma significação real independentemente do nosso modo de intuição".*

Pensamos que esta crítica se refere ao paragrafo 13 dos Prolegómenos a toda a Metásica Futura, onde Kant quer convencer o leitor de "libertar-se da ideia que o espaço e o tempo seriam condições reais, inherentes a próprias coisas em si". Kant toma o exemplo de dois tringulos esféricos isométricos e simétricos em relação ao plano do equador para mostrar que apesar de ter exactament as mesmas dimensão, estes triângulos não são superposáveis. Toma também o exemplo da mão direta e esquerda que sofrem o mesmo fenômeno e acrescenta: "Não podemos, pois, fazer compreender por nenhum conceito a diferença de coisas semelhantes e iguais e no entanto incongruente (...) mas unicamente pela relação da main direta e a mão esquerda, que incide diretamente na intuição Kant (Proleg. trad. A. Morão, p. 55)”. Assim para Kant o espação é a forma da intuição pura a priori. Gauss responde em realidade pelo problemaque chamamos de orientação do espaço. Nós podemos a priori entender que tem duas orientações possíveis do espaço e escolher tambèm uma a priori. Mas desde que se trata de explicar á alguem qual é a direita e a esquerda, qual é o sentido abaixo ou a cima temos que nos referir a um espaço jà presente, ou seja o espaço real que existe bem fora de nós.

Esta observação de Gauss marca uma das diferenças essenciais que opõe a concepção kantiana do espaço à sua própria concepção e se reflete também na fundamentação da geometria. Com efeito, segundo Kant o espaço é uma forma *a priori* da intuição e a geometria é a prova desta concepção:

> *“A geometria é uma ciência que determina sinteticamente e, no entanto, a priori, as propriedades do espaço. Qual deve ser, portanto, a representação do espaço para que tal conhecimento deste seja possível? Precisa que seja na origem uma intuição; pois de um simples conceito não se pode tirar proposição que ultrapassam o conceito como isso acontece, no entanto, na geometria (Introdução V). Mas esta intuição deve se encontrar em nos a priori, isto é, anteriormente a toda percepção de um objeto e, por conseqüente, ser intuição pura e não empírica”* (Kant, CRP, exposição transcendental do espaço).

Já Gauss pensou o espaço e os seus postulados com uma realidade independentemente da razão e sujeitos a verificação experimental. Na carta do 8-11-1824 a Taurinus, observa Gauss:

> *“posso resolver todo problema de geometria não euclidiana exceto a determinação de uma constante que não se deixa obter a priori. Maior é esta constante, mais se aproxima da geometria euclidiana, que corresponde a um valor infinito da constante... Se a geometria não euclidiana fosse a verdadeira e se esta constante fosse certa razão com as grandezas accessíveis a nossas medidas sobre a terra e no céu, poderíamos obtê-la a posteriori”.*

Ou seja, os postulados da geometria não dependem da intuição pura. Enquanto fundamentos das geometrias dependem unicamente do entendimento e dos conceitos definidos *a priori*, mas em relação ao real, ou seja, a sede dos fenômenos, torna-se necessário verificar qual é a classe de postulados adequada ao real.

Outro aspecto que separa Gauss de Kant é a relação que este filósofo instaura entre intuição (*Anschauung*), Entendimento (*Verstand*) e imaginação (*Einbildungskraft*). Se as coisas se apresentam à sensibilidade na sua infinita diversidade, como então aplicar os conceitos à intuição? Aí vem o papel da imaginação produzindo esquemas que possibilitem o entendimento realizar no conceito a síntese desta diversidade. Como o explica Kant:

> *”Toda Hipótipose (subjectio sub aspectum) ou Versinnlichung é duplo: ou ela é esquemática quando a intuição que corresponde a um conceito do entendimento é dada a priori ou ela é simbólica quando a um conceito que apenas a razão pode pensar, nenhuma intuição sensível pode ser adequada, é submetida uma intuição que se acorda ao conceito apenas pela regra do procedimento, e não pela intuição mesma, portanto com a forma da reflexão e não com o conteúdo” (Kant, crítica do Juízo, id.).*

Segundo Kant os conceitos algébricos seriam entregues à intuição por via de representações simbólicas, enquanto os conceitos de geometria seriam intuídos por via de esquemas. Este sistema pode dar conta da matemática separada em disciplinas (aritmética, álgebra, geometria, analise), mas não dá conta do movimento vivo da matemática do século XIX, pois neste são criadas várias novas conexões entre disciplinas que pareciam completamente separadas. Assim a *Versinnlichung* gaussiana dos números complexos é esquemática e simbólica e representa na realidade um novo domínio da pesquisa matemática onde os conceitos matemáticos não seguem o processo de produção descrito por Kant. Deste modo, uma transformação do tipo $F(z) = A + Bz$ está construída na intuição simbolicamente por via de uma regra, ou o fato de conservar os ângulos está entregue à intuição pelo domínio e contradomínio da transformação, ou seja, como expresso por Kant, por via de esquematismo ? A geometria e a álgebra não têm assim um tipo específico de intuição própria, mas, sim, fusionam os seus métodos. Assim, o espaço e os conceitos matemáticos não se originam a partir da intuição, mas dos conceitos construídos diretamente pelo entendimento. A faculdade de tornar sensíveis estes conceitos é devida à relação dos conceitos com a realidade do espaço real, ou, apenas, definido. Gauss coloca ao final do seu texto a questão de saber “porque as relações entre coisas que demandam uma variedade de mais de duas dimensões não pode ser inda tratada na aritmética universal, segundo outras espécies admissíveis de grandeza”. Esta questão (em parte resolvida por Hamilton) deixa entrever uma extensão tanto da noção de número quanto da noção de espaço.

Assim, a filosofia de Kant não pode dar conta da própria evolução da matemática no século XIX. A representação dos números complexos por Gauss mostra o divórcio que se manifesta entre a velha concepção da matemática e a nova que Gauss quer promover.

A recepção do texto de Gauss

É interessante observar a impressionante sequência de artigos e de livros em língua alemão que se segue após este trabalho de Gauss. W. Matzca enumera e comenta dez publicações do período 1834-1847 (Matzca [1850], pp. 150-151). Se esses trabalhos não acrescentam elementos novos, possibilitaram pelo menos uma divulgação rápida da visualização geométrica dos números complexos (Flament 2003, pp. 272-273).

A fecundidade desta abordagem dos números complexos será ainda confirmada pelos trabalhos de Riemann. Nos *Principios fundamentais para uma teoria geral da função da variável complexa* (Riemann 1851), Riemann considera, desde as primeiras páginas, as funções complexas como uma relação entre pontos de dois planos complexos e quase imediatamente como funções do plano no mesmo plano (p. 6). Todo o seu trabalho considera propriedades geométricas das funções; a diferencial de uma função complexa é vista como uma transformação linear conservando os ângulos; as transformações multiformes utilizam planos múltiplos conectados por ramificações. A obra finaliza com o problema de uma representação de uma superfície por outra com uma referência aos dois mais importantes trabalhos de Gauss sobre o assunto.

Riemann, aliás, situa o seu trabalho como uma continuidade da obra de Gauss. Na sua tese de *Habilitation* [livre docência] (Riemann [1854]), pode-se ler « exceto algumas breves indicações dadas por M. Gauss na sua segunda memória sobre os resíduos biquadráticos nas *GelehrteAnzeigen de Goettingen* e na memória de *Jubilé*, e algumas pesquisas filosóficas de Herbart, não pude ser ajudado de algum trabalho anterior”. A fonte de inspiração de Riemann fica assim ao final da “auto resenha” onde Gauss evoca uma extensão do plano complexo a variedades de dimensão superior.

Outro domínio que aparecem, nos anos que se seguem, é o estudo das propriedades das transformações geométricas planas por via dos números complexos. Siebeck parece ter sido o primeiro a desenvolver este tipo de estudo em um artigo *UeberdiegraphischeDarstellungimaginärerFunctionen* (citado por Cartan-Study, n. p. 364). Expõe as propriedades dos números complexos e apresenta algumas funções elementares como funções de semelhança com os números complexos. Talvez o exemplo mais significativo seja o estudo de algumas funções circulares (Siebeck [1858], pp. 243-244), onde Siebeck reencontra os resultados de Möbius [1855], ao qual se refere, explicitamente. Möbius havia estudado essas transformações por via sintética. Aí a análise complexa apropria-se o conteúdo.

Essas transformações circulares, aliás, desempenham um papel determinante na geometria projetiva (homografias) assim como o ressalta F. Klein, desde o *Programa de Erlangen* (Klein [1872], pp. 18-21) a respeito do que ele chama geometria dos raios vetores recíprocos (nome que era dada nessa época a este tipo de transformação). Estas transformações têm também um papel na construção dos modelos da geometria hiperbólica, como o mostrou Poincaré nas suas memórias sobre as funções fuchsianas (Gray-Walter [1997]).

Conclusão

O artigo de Gauss inaugura uma nova perspectiva ao propor a sua representação geométrica envolvendo os complexos. Mas esta nova perspectiva pode apenas ser entendida se considerarmos todos os trabalhos de Gauss que utilizam esta visão. Estes trabalhos fornecem a plena razão de ser desta representação e a sua rápida difusão e utilização pelos matemáticos alemães. A representação de Argand não teve tanto respaldo na pesquisa matemática. Deve-se também ao fato da ausência desta visão geométrica nas memórias de Cauchy sobre a teoria das funções de variável complexa (Dalmenico-Dahan, 1997, pp. 30-32) que a teoria veio a se desenvolver, sobretudo na Alemanha a partir de Riemann. O mesmo fenômeno ocorre no que diz respeito a aritmética (Jacobi) ou a geometria das transformações planas (Clebsch, Klein). Com as suas pesquisas, Gauss deixou uma herança que a matemática alemã fez frutificar no decorrer do século XIX.

Referências

ARGAND. 1806 *Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris.

CARTAN, E. E STUDY E. 1908. "les nombres complexes", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. 1,vol. 1, fasc. 3. pp. 329-425.

CAUCHY, A. L. 1847. « Mémoire sur les quantités géométriques », *Oeuvres Complètes* Gauthier-Villars. Série 2, Volume 14, pp. 175-202 Paris, 1882.

DAHAN DALMENICO, Amy 1997. « L'étoile « imaginaire » a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexe et ses différentes interprétations dans l'oeuvre de Cauchy ». in *Le nombre, une hydre à n visages*, Dominique Flament (ed.), Ed. de La Maison des sciences de l'Homme Paris.

EULER, L. 1770. *Vollstandige Unleitung zur Algebra*, Verlag von Philip Reclam, Leipzig.

EULER, L. 1770.*Eléments d'Algèbre*, vol. I e II., Paris.

FLAMENT, D. 2003. *Histoire des nombres complexes*, CNRS editions Paris 2003.

GAUSS, C. F. 1801.*Disquisitionnes aritmeticae*,Leipzig, Werke vol. I, pp. 3-462.

GAUSS, C. F. 1831a « Theoria residuorum biquadraticorum », Werke II, pp. 93-148.

GAUSS, C. F. 1831b. „Selbstanzeige von Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda », *Goettingen gelehrte Anzeigen*, 23 de abril de 1831, Werke vol. II, pp. 169-178.

GAUSS, C.F. 1863-1929. *Werke*, Band I-XII. herausgegeben von der (Königlichen) Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,.

GRAY, Jeremy & WALTER Scott A. 1997."Introduction to Poincaré's Three Supplements" in *Three Supplements on Fuchsian Functions by Henri Poincaré*, Jeremy J. Gray and Scott A.Walter ed., Berlin1997, pp. 1–25.

GOSLDSTEIN, C., SHAPPAPPER, N. 2007. A book in search of a disciplina" in The shaping of Arithmetic, Springer 2007.

kANT, I. 1787.*Kritik der reinen Vernunft***,** zweite AuflageinGesammelte Schriften (Akademie-Ausgabe), Band III.

KANT, I. 1788.*Kritik der Urteilskraft*, in Gesammelte Schriften (Akademie-Ausgabe), Band XX.

KANT, I. 2008. *Prolegómenos a Toda a Metafísica Futura*, tras. ArurMorão, Edições 70, Lisboa.

KLEIN, F. 1871. Erlanger Programm, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, in Gesammelte mathematische Abhandlungen, B. 1, Berlin 1921, pp-460-497.

LACROIX, S.F. 1804.*Compléments d'Algèbre*, Paris.

LEGENDRE, A. 1808. *Essai sur la théorie des Nombres*, Paris,

MATZCA, Wilhelm 1850.*Versuch einer Richtigen Lehre von der Realitaet der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebrischer Grössenbeziehungen*, Prag 1850.

MÖBIUS, A 1855. „Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung", Leipzig 1855, in Möbius *G.W.* B. II. Leipzig 1886, pp. 243-341.

RIEMANN, B. 1851. « Principes généraux pour une théorie générale des fonctions d'une variable complexe » in Bertrand Riemann, *Oeuvres mathématiques*, trad. L. Laugel Paris 1898 pp. 1-60.

RIEMANN, B. 1851. „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse." In Bernhard Riemann's gesammelte *Matematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, 1876 pp. 3-47.

RIEMANN, B. 1854. „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen." in Bernhard Riemann's gesammelte *Matematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, 1876 pp. 254-269.

SCHUBRING, G. 2005.*Conflicts between generalization, rigor, and intuition*, Springer.

SCHUBRING, G. 2012.*Os números negativos*, LIMC, Rio de janeiro.

SIEBECK, P. 1858. „Ueber die Graphische Darstellung imaginär Funktionen" in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin; 1826, pp. 221 – 253.

WARREN, J. 1828. *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*. Cambridge, 1828.

Carl Friedrich Gauß, Theoriaresiduorumbiquadraticorum. Commentatio segunda.[2]

Tradução: Gerard Grimberg[3]

Um estudo apresentado, o dia 15 de abril pelo Conselheiro áulico ("Hofrath") Gauss da *Königliche Gesellschaft der Wissenschaftenzu Göttingen*: *Theoriaresiduorum biquadraticorum, Commentatio secunda*, é a continuação da memória já editada no sexto volume dos *Commentationes novae*, cuja uma resenha foi feita nessa altura em nosso Jornal do 11 de Abril de 1825. Esta continuação, embora esteja mais de duas vezes maior do que a primeira memória, não esgota ainda esta matéria muito rica, e devera estar completada por um terceiro estudo que virá como conclusão do tudo.

Apesar de que os conceitos de base deste primeiro estudo e o conteúdo da primeira memória pudessem ser supostamente conhecidos por todos os que têm feito um estudo de aritmética superior, pretendemos aqui em brevemente trazer á memória estes, sobretudo para o conforto dos amigos desta parte da matemática que não dispõem na mão este primeiro estudo. Em relação a um número qualquer *p*, chama-se a um outro número *k* um resíduo bi-quadrático, se existir números da forma $x^4 - k$, divisíveis por *p*; no caso contrário *k* é chamado não-resíduobi-quadrático de *p*. Basta aqui restringir-se ao caso onde *p* é um número primo da forma $4n + 1$ e não divide *k*, e portanto todos os outros casos são, ou claros por si, ou podem ser reduzidos a estes.

Para um tal valor *dado* de *p*, se distribuem todos os números não divisíveis por *p* em quatro classes, entre as quais a primeira é aquela dos resíduos biquadráticos, a segunda classe contém os não-resíduos biquadráticos que são resíduos quadráticos, e ficam nas duas outras os não-resíduos biquadráticos, sendo estes igualmente não-resíduos quadráticos. O princípio desta repartição vem do fato de que a cada vez, ou $k^n - 1$, ou $k^n + 1$, ou $k^n - f$, ou $k^n + f$, são divisíveis por *p*, com *f* denotando um número inteiro, tal que $ff + 1$ é divisível por *p*. Qualquer um, que conhece a terminologia elementar, vê por si-mesmo, como estas definições poderiam ser reajustadas nesta.

A teoria desta classificação encontra-se completamente desenvolvida na primeira memória, não apenas no que diz respeito ao caso bem elementar $k = -1$, mas também para aqueles, que requerem pesquisas auxiliares, os casos $k = \pm 2$. No início da presente memória serão agora acrescentados vários valores maiores de k: é preciso primeiro levar em consideração apenas os valores, que são os próprios números primos, e o sucesso mostra, que o resultado obtêm-se do modo mais simples, se toma-se valores positivos ou negativos, conforme forem de modo geral da forma $4m + 1$ ou $4m + 3$. A indução confere aqui imediatamente com a maior facilidade uma rica safra de teoremas, dos quais iremos aqui apenas mencionar alguns. A numeração das classes por 1, 2, 3, 4 será associada aos casos onde k^n é respectivamente congruente a 1, *f*, −1, −*f*; ao mesmo tempo, o valor tomado por f será sempre aquele que torna $a + bf$ divisível por *p*, quando $aa + bb$ é a representação de *p*

[2]Publicação primeira: Göttinger gelehrte Anzeigen, 23.4. 1831. Reproduzido em: Gauß, Werke, vol. II, 1863, pág. 169-178.

[3] Agradeço ao Professor Gert Schubring pelos conselhos e sugestões que me prodigou na finalização desta tradução.

em soma de um quadrado par e de um quadrado ímpar. Assim por indução encontra-se que o número −3 pertença à uma das classes 1, 2, 3, 4, segundo respectivamente b, $a + b$, a, $a - b$ é divisível por 3; que o número 5 pertença à estas classes, segundo que b, $a - b$, a, $a + b$ é divisível por 5; que o número −7 cai na classe 1, se a ou b [é divisível por 7]; na classe 2 se $a - 2b$ ou $a - 3b$ [é divisível por 7]; na classe 3 se $a - b$ ou $a + b$ [é divisível por 7]; na classe 4, se $a + 2b$ ou $a + 3b$ é divisível por 7; teoremas semelhantes se encontram em relação aos números −11, +13, +17, −19, −23, etc. Tão fácil se deixam descobrir estes teoremas especiais por indução, quanto difícil parece encontrar para estas formas uma lei geral, mesmo se várias propriedades comunas aparecem facilmente aos olhos, e fica ainda mais difícil para todos esses teoremas ("Lehrsätze") encontrar a demonstração. As demonstrações da primeira memória que eram úteis para tratar os casos +2 e −2, não se aplicam mais aqui, e se tais outros métodos semelhantes, no que se referem à primeira e terceira classe, podiam servir para concluir, estes tornam-se inaptas para a fundamentação de demonstrações *completas*.

A partir daí entende-se facilmente de que se pode ingressar neste domínio rico da aritmética superior apenas por caminhos completamente novos. O autor tem na primeira memória dado uma indicação, que se exige para isso essencialmente uma extensão específica de todo o campo da aritmética, sem aliás ter esclarecido precisamente em que reside esta: a presente memória tem como alvo de por em luz este objeto.

Isso não é nada a não ser estender o campo da matemática superior até também os números imaginários, enquanto verdadeiro fundamento da teoria dos resíduos biquadráticos, o qual era aliás apenas consagrado aos números inteiros reais, e se deve conferir a esses a mesma e plena cidadania. Desde que se concebe isto, aparece esta teoria numa luz totalmente nova, e os seus resultados ganham a mais alta e surpreendente simplicidade.

Antes no entanto de poder desenvolver a teoria mesma dos resíduos biquadráticos neste domínio estendido dos números, devem participar à esta as doutrinas previas da aritmética superior, as quais eram até agora apenas estudadas em relação com os números reais. Poderemos aqui apenas expor algumas destas pesquisas anteriores. O autor considera cada grandeza $a + b\,i$, onde a e b significam duas grandezas reais, e i uma abreviação pois está escrita no lugar de $\sqrt{-1}$ como um número complexo, quando ao mesmo tempo a e b são números inteiros. As grandezas complexas assim não excluem as reais, mas compreendem entre si aquelas enquanto caso especial, para $b = 0$. Para uma aplicação mais cômoda, era necessário atribuir denominações particulares à formações de conceitos referindo-se às grandezas complexas, a qual tentará, todavia evitar aqui, nesta resenha.

Assim como temos na aritmética dos números reais apenas duas unidades, a positiva e a negativa, tem do mesmo modo na aritmética dos números complexos quatro unidades +1, −1, $+i$, $-i$. Chama-se composto a um número complexo inteiro, se é o produto de dois fatores inteiros diferentes das unidades; um número complexo que no entanto não admite tal decomposição é chamado número complexo primo. Assim é primo o número real 3, considerado também como número complexo, enquanto 5 como número complexo é composto = $(1 + 2\,i)(1 - 2\,i)$. Assim como na aritmética superior dos números reais, os números primos desempenham também um papel decisivo no campo estendido desta ciência.

Se um número complexo inteiro $a + b\,i$ é tomado por módulo, podem ser formados exatamente $aa + bb$ números complexos não congruentes entre si, dos quais um deve ser congruente a cada número complexo inteiro dado anteriormente, o que se pode chamar um sistema completo dos resíduos incongruentes. Os chamados resíduo mínimo e resíduo mínimo absoluto da aritmética dos números reais possuem também aqui o seu perfeito *analogon*. Assim por exemplo para o módulo $1 + 2i$ o sistema completa de resíduos mínimos é composto dos números 0, 1, i, −1 e $-i$. Quase todos os resultados das quatro primeiras secções das *DisquisitionesArithmeticae*encontram também, com algumas modificações, o seu lugar na aritmética estendida. O celebro teorema de Fermat adota aqui a forma seguinte: se $a + b\,i$ é um número complexo primo, e k um número não divisível por este, então tem-se sempre $k^{aa+bb-1}$ para o módulo $a + b\,i$. Tudo especialmente digno de ser notado é aliás o fato de que o teorema fundamental dos resíduos quadráticos na aritmética dos números complexos tem aqui o seu correspondente perfeito apenas ainda mais simples: sejam com efeito dois números complexos primos $a + b\,i$, $A + B\,i$, tais que a e A são ímpares, e b e são pares, o primeiro é resíduo quadrático do segundo, se o segundo é resíduo quadrático do primeiro, caso contrário o primeiro é não-resíduo quadrático do segundo, se o segundo é não resíduo quadrático do primeiro.

No momento em que a memória passa dessas pesquisas preliminares relativas á teoria mesma dos resíduos biquadráticos, uma divisão em quatro classes dos números não divisíveis pelo módulo é logo determinada, em lugar da simples diferença entre os resíduos biquadráticos e não-resíduos biquadráticos. Se o módulo é com efeito um número complexo primo $a + bi$, onde é sempre suposto a ímpar e b par, sendo p a abreviação escrita no lugar de $aa+bb$, e k um número complexo não divisível2 por $a + bi$, então em todos os casos $k^{\frac{p-1}{2}}$ será congruente a um dos números1,−1, i, $-i$. E daí é justificada uma divisão em quatro classes de todos os números complexos não divisíveis por $a + b\,i$, as quais serão sucessivamente ordenadas entre os caráteres biquadráticos 0, 1, 2, 3. E´ claro que o caráter 0 corresponde aos resíduos biquadráticos, e os outros, aos não-resíduos biquadráticos do modo seguinte, o caráter 2 aos resíduos quadráticos, e os caráteres 1 e 3 respondem em compensação pelos não resíduos quadráticos.

Reconhece-se facilmente que trata-se de determinar sobretudo este caráter para tais valores de k, que são precisamente números complexos primos, e aqui a indução leva a resultados os mais simples.

Se pôe-se k=1+ i, mostrar-se-ia que o caráter deste número será em todos os casos $\equiv \frac{1}{8}(-a^2 + 2ab - 3b^2 + 1)$ (*mod* 4), e expressões semelhantes encontram-se para os casos $k = 1 - i$, $k = -1 + i$, $k = -1 - i$.

Quando pelo contrário $k = \alpha + \beta\,i$, sendo α ímpar e β par, deduz-se muito facilmente pela indução uma lei de reciprocidade completamente semelhante aquela do teorema fundamental dos resíduos quadráticos,a qual pode ser mais simplesmente expressa da forma seguinte:

Se $\alpha + \beta - 1$ assim como $a + b - 1$ são divisíveis por 4 (todos os outros podem ser reduzidos a este caso), e o caráter de $\alpha + \beta i$ em relação ao módulo $a + b\,i$ será denotado por λ, enquanto o caráter de a+bi em relação a α+βi será denotado por l, então $\lambda = l$, quando ao mesmo tempo um dos números β, b, (ou ambos) é divisível por 4, caso contrário $\lambda = l \pm 2$, se nenhum dos números β, b é divisível por 4.

Estes teoremas contêm no fundo todo o essencial da teoria dos resíduos biquadráticos em si: porém tanto fácil era de descobri-lo por indução, quanto difícil é dar demonstrações rigorosas deles, em particular para o segundo, o teorema fundamental dos resíduos biquadráticos. Por causa da grande extensão com a qual esta presente memória já havia sida aumentada, o autor se encontrou obrigado em deixar para uma terça memória futura a exposição ("Darstellung") da demonstração deste último teorema, que há 20 anos está em sua possessão. Em compensação é comunicada na presente memória ainda a prova completa do primeiro teorema em questão para o número 1 + i (da qual dependem as dos outros para $k = 1 - i$,$k = -1 + i$, $k = -1 - i$), a qual já pode dar alguma noção da dificuldade do assunto.

Temos que acrescentar agora algumas observações gerais. A mudança dos resultados dos resíduos biquadráticos para o domínio dos números complexos pode parecer chocante e artificial a certa pessoa, a quem a natureza das grandezas imaginárias é pouco familiar, são portanto presos a respeito delas de falsas representações ("Vorstellungen"), e poderia ser levado a pensar que a pesquisa seria por assim dizer solta no ar e receberia uma posição incerta, e ficaria longe de uma clara visão ("Anschaulichkeit"). Nada seria mais infundado do que tal opinião. Pelo contrário a aritmética dos números complexos é suscetível da mais clara apreensão sensível ("anschaulichsten Versinnlichung"), e se o autor na sua exposição ("Darstellung") tem observado desta vez um tratamento aritmético puro, para tornar no entanto esta compreensão mais viva e, portanto, tem dado também para esta apreensão sensível altamente recomendada ("Versinnlichung") as indicações que serão suficientes para o leitor que pensa por si mesmo. Assim como os números inteiros absolutos são representados por uma serie de pontos ordenados à distancias iguais sobre uma reta, sobre a qual o ponto inicial representa 0, o seguinte o número 1, etc.; do mesmo modo com efeito é apenas preciso para a representação dos números negativos um prolongamento ilimitado da serie no lado oposto do ponto inicial; assim precisa-se para a representação dos números complexos inteiros apenas de acrescentar que esta serie deve se encontrar em um plano definido ilimitado, e paralelamente a esta dos dois lados, deve ser colocada uma quantidade ilimitada de series semelhantes a mesma distância uma da outra, tal que se apresenta a nós, no lugar de uma serie de pontos, um sistema de pontos que se deixam ordenar de dois modos de serie em serie, que serve à um recobrimento de plano inteiro por quadrados perfeitamente iguais. O ponto mais perto de 0 na primeira serie vizinha de um lado da serie que representa os números reais, corresponde então ao número i, assim como o ponto mais perto de 0 na serie vizinha do outro lado corresponde a $-i$, e assim em diante. Esta representação ("Darstellung") tornará possível o desempenho das operações aritméticas em relação `as grandezas complexas, a congruência, a formação de um sistema completo dos números não congruentes para um módulo dado, e assim em seguida, em breve, de uma apreensão sensível ("Versinnlichung") capaz de deixar nada a desejar.

De outro lado a verdadeira metafísica das grandezas imaginárias será posta numa luz nova e esclarecedora.

Nossa aritmética geral, pela qual a geometria dos Antigos é de longe ultrapassada, é todo a obra do tempo novo. Na origem vindo do conceito dos números inteiros absolutos ela ampliou gradualmente o seu domínio; aos números inteiros são acrescentados os números quebrados (fracionários), aos racionais os irracionais, aos positivos os negativos, aos reais os números imaginários. Este avanço veio no início acontecendo a passos tímidos e circunspetos. Os primeiros algebristas já consideravam as raízes negativas das equações como falsas raízes, e essas eram também consideradas tais onde o problema no qual se referiam assim expresso indica que a natureza das grandezas procuradas não permitia nenhum oposto. Mas tão pouco se hesita admitir na Aritmética *universal* os números fracionários (quebrados), embora existissem muitas coisas enumeráveis pelas quais um número fracionário não tem sentido, tão pouco podem ser então recusados os mesmos direitos aos números negativos os dos positivos, sob o pretexto de que inumeráveis coisas não permitem nenhum oposto: a realidade dos números negativos é suficientemente justificada, já que eles encontram em inumeráveis outros casos um substrato adequado. Disso a gente está consciente para dizer a verdade há muito tempo: porém os imaginários opostos aos reais − apesar de ter sido considerado outrora, e de vez em quando ainda agora, de maneira indecorosa impossíveis − são ainda hoje menos aceitos do que apenas tolerado, e parecem mais como um jogo de signos de conteúdo vazio, ao qual se nega absolutamente qualquer substrato pensável, mas sem querer todavia desprezar o rico tributo, que este jogo de signos traz finalmente ao tesouro das relações das grandezas reais.

O autor tem abordado há muitos anos esta parte importante da matemática com um ponto de vista diferente, segundo o qual um objeto poderia ser atribuído às grandezas imaginárias tão bem quanto às negativas: mas faltou até agora uma ocasião de expressar este publicamente de maneira precisa, mesmo se o leitor atento reencontrasse facilmente os traços no escrito de 1799 sobre as equações, e no escrito do Premio sobre as transformações das superfícies. Os princípios fundamentais deste são indicados brevemente no presente estudo; eles consistem no que se segue.

Os números positivos e negativos podem apenas se aplicar lá onde o que está calculado tem um oposto, oposto que unido com ele deve ser pensado igual a uma aniquilação. A olhar de maneira precisa esta condição encontra-se só onde o que está calculado não são substâncias (objetos pensáveis para si), mas sim relações entre dois objetos considerados dois a dois. Postula-se aqui que esses objetos são de um modo determinado ordenado em uma serie, por exemplo, A, B, C, D..., e que a relação de A para B assim como a relação de B para C, etc. podem ser consideradas iguais. Aqui pertence ao conceito de oposição apenas a *permutação* dos termos da relação, tal que, a cada vez que a relação (ou a transição) de A para B vale +1, a relação de B para A deve ser representada por -1. Assim, na medida em que tal relação é ilimitada de ambos os lados, cada número real inteiro representa a relação de um termo qualquer tomado como origem a um termo determinado da serie.

Os objetos são, porém de tal modo, que eles podem ser ordenados, não em uma serie, embora ilimitada, mas ordenado apenas de serie a serie, ou o que é equivalente, formam uma variedade de duas dimensões; isso se combina então com as relações de uma serie à outra ou com as transições de uma para outra de uma maneira similar à transição de um membro de uma serie a outro membro da mesma, assim é preciso para a medida da transição de um membro do sistema a outro além das unidades precedentes +1 e -1 ainda duas outras também opostas entre si $+i$ e $-i$. Obviamente deve-se ainda postular que todas às vezes a unidade *i* marca a transição de um membro dado de uma serie a outro membro *determinado* da serie imediatamente vizinha. Nesta maneira assim o sistema poderá ser ordenado segundo um modo duplo de series de series.

O matemático faz completamente abstração da natureza dos objetos e do conteúdo de suas relações; preocupa-se apenas com a contagem e a comparação das relações entre si: sobre este ponto autoriza-se, seguindo a identidade das propriedades conferida as relações +1 e -1, a analogia estabelecida, a estender esta aos todos os quatro elementos +1, -1,+*i* e -*i*.

Estas relações são entregue à visão ("Anschauung") apenas através de uma representação ("Darstellung") no espaço; e o caso o mais simples, onde não subsista nenhuma razão, para ordenar os símbolos dos objetos de maneira outro do que em quadrados, partilhando efetivamente um plano ilimitado dividido em quadrados por dois sistemas de linhas paralelas, umas interceptando as outras a ângulo reto, e associando os pontos de interseção aos símbolos. Assim cada ponto A tem aqui quatro vizinhos, e se denota-se (denotar: "bezeichnen") por +1 a relação de A para um ponto vizinho, a relação que deve ser designada por -1 é automaticamente determinada, além disso, enquanto se escolherá um dos dois outros para +*i*, se pode tomar por +*i* o ponto situado à *direita* ou à *esquerda*. Esta diferença entre direita e esquerda é *em si* completamente determinada, desde que foram completamente definidos (à vontade) os sentidos para frente e para trás *no* plano, assim como para acima e para baixo em relação aos dois lados do plano, ainda que possamos comunicar nossa intuição dessa distinção aos outros *apenas* através de uma indicação relativa às coisas presentes diante de nos[4]. Quando se tem, todavia decidido sobre este último ponto, se vê que isso depende ainda de nossa livre escolha, a qual das duas series se interceptando em um ponto queremos considerar enquanto serie principal, e qual direção nela queremos considerar como se referindo aos números positivos; vê-se alem disso que se queremos tomar por +1 a relação tratada antes como +i, devemos substituir necessariamente a relação designada antes para +*i* para a designada por -1. Isto significa, na linguagem do Matemático, que +*i* é grandeza media proporcional de +1 e -1 ou corresponde ao signo $\sqrt{-1}$; não dizemos de propósito a grandeza media proporcional, já que -*i* possui evidentemente esta propriedade. Aqui está também perfeitamente justificado a possibilidade do bem-fundado de uma significação intuitiva de $\sqrt{-1}\cdot$, e nada mais é necessário para admitir essas grandezas no domínio dos objetos da aritmética.

Temos pensado que esta breve exposição do momento essencial de uma nova teoria das chamadas grandezas imaginárias seria um serviço a prestar aos amigos da matemática. Se se considerou até agora este objeto com um ponto de vista errado e encontrou-se para isso uma escuridão cheia de segredos, é que se tem atribuído uma designação pouca decorosa a esta parte das grandezas. Se não se houvesse considerado +1, -1, $\sqrt{-1}$ como unidades positiva, negativa, imaginária (ou ainda impossíveis) unidades, mas como direta, inversa, lateral, não ficaria o discurso tão escuro. O autor tem se reservado de trabalhar mais completamente no futuro este assunto, o qual tem a dizer a verdade tratado na ocasião

[4] Kant já tem feito as duas observações, mas não se entende como este filósofo sutil poderia pensar encontrar na primeira uma prova de sua opinião, que o espaço seria apenas uma forma de nossa intuição (*Anschauung*) externa, pois a segunda mostra tão claramente o contrário, que o espaço deve ter uma significação real independentemente do nosso modo de intuição.

nesta presente memória, onde então se poderá encontrar também a resposta a questão de saber porque as relações entre as coisas, que exigem uma variedade de mais de duas dimensões, não podem ser ainda tratada na aritmética universal segundo outras espécies admissíveis de grandezas.

Gerard Emile Grimberg
Instituto de Matemática – UFRJ – Rio de Janeiro-Brasil
E-mail: gerard.emile@terra.com.br