Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 nº 28 - pág. 85-106
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O TRATADO SOBRE AS PROPRIEDADES PROJETIVAS DAS FIGURAS DE JEAN-VICTOR PONCELET: ELEMENTOS DE UMA GÊNESE

Jansley Alves Chaves
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ – Brasil

Gérard Emile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ – Brasil

(aceito para publicação em abril de 2014)

Resumo

Pretendemos neste artigo apresentar, através da análise dos trabalhos de Jean-Victor Poncelet, elementos de uma gênese do seu Tratado sobre as propriedades projetivas das figuras, publicado em 1822. Se os cadernos de Saratoff foram amplamente estudados, o mesmo não ocorreu com os cadernos do período de Paris, em particular com quinto caderno. Entendemos que este quinto caderno representa um estágio essencial na elaboração do Tratado de 1822. Observamos na gênese do seu Tratado três etapas bem distintas: os trabalhos do período no qual Poncelet foi estudante da École polytechnique (1807-1810), analisando, principalmente, a *Correspondance de l'École polytechnique;* do período no qual esteve preso em Saratoff (1813-1814), analisando os cadernos de Saratoff; do período que retornou à Paris, analisando os cadernos deste período (1814-1822). Nestes trabalhos, o princípio de continuidade e a projeção central desempenham um papel importante no processo de desenvolvimento do seu *Traité de propriétés projectives des figures*.

Palavras-chave: Geometria projetiva. École polytechnique. Cadernos de Saratoff. Princípio de continuidade. Jean-Victor Poncelet.

[THE TREATISE ON PROJECTIVE PROPERTIES OF FIGURES FROM JEAN-VICTOR PONCELET: ELEMENTS OF A GENESIS]

Abstract

The mail goal of this article is to show, through the analisys of Jean-Victor Poncelet work, elements from a genesis of his agreement about the projective properties of the figures, published in 1822. If the Saratoff books were broadly studied, the same didn't happened with the books from his period in Paris, particulary the fith book. It is understood that the fifth book represents an essencial phase at the agreement elaboration, from 1822. It is also observed at the agreements' genesis three steps well distingued: the works during the time that Poncelet was a student at the École polythechnique (1870-1810), analyzing, mainly, the Correspondance de l'École polytechnique; from the period that he was arrested at Saratoff (1813-1810), analyzing the books of Saratoff; the time spended in Paris, analyzing the books from this period (1814-1822). In those works, the continuity principle and the central projection play an important role at the process of development of his Traité de propriétés projectives des figures.

Keywords: Projective geometry. École polythechnique. Saratoff books. Continuity principle. Jean-Victor Poncelet.

Introdução

A historiografia demarca o surgimento da Geometria Projetiva com a publicação do *Traité des proprietés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet no ano de 1822, "verdadeiro ponto de partida desta reconstrução do edifício geométrico que o século XIX realizará de maneira notável" [1] (Taton 1951, p. 2).

Entretanto, os trabalhos envolvendo propriedades projetivas são associados à difusão do conhecimento da perspectiva a partir do Séc. XV. Sakarovitch (1998) descreveu os múltiplos desdobramentos da teoria da perspectiva mostrando que a obra e o ensino de Gaspard Monge são uns dos fatores essenciais da emergência da teoria de Poncelet. Mas a elaboração das ideias do *Traité des proprietés projectives des figures* é o desdobramento de um trabalho de longo fôlego. Com efeito, podemos discernir três etapas nesta elaboração:

1) Os anos de formação: 1807-1810; Poncelet estudante da *École Polytechnique*;
2) Os anos de deportação: 1813-1814, Poncelet preso em Saratoff;
3) Os anos de maturação: 1815-1822. O retorno à Paris até a publicação do seu Tratado.

[1] *véritable point de départ de cette reconstruction de l'édifice géométrique que le XIXe siécle réalisera de façon si remarquable.*

Estes três períodos são bem delimitados e correspondem a situações bem diferentes. A lacuna de dois anos, entre 1807 e 1822, corresponde à estadia na *École de application* em Metz onde Poncelet completou a sua formação de engenheiro e não pode se dedicar ao estudo da geometria. Entendemos que cada período supracitado marca uma etapa no processo de elaboração do Tratado. O estudo de cada etapa, de forma compartimentada, nos permite dar conta da evolução do pensamento de Poncelet. Mas, é evidente que estas etapas são relacionadas, como poderemos observar no decorrer do nosso texto e não nos furtaremos de evidenciá-las quando for preciso.

Metodologia e referencial teórico

Poncelet publicou ao final da sua vida todos os manuscritos que havia redigido antes do *Traité des propriétés projectives des figures*. Assim, os cadernos de Saratoff são publicados em *Applications d'Analyse et Géométrie tomo I* em 1862 e os artigos do período posterior a Saratoff e anterior ao Tratado, ou seja, os artigos do período em que estava em Paris, são publicados em *Applications d'Analyse et Géométrie tomo II* em 1864. Uma parte desses textos foi estudada por Belhoste (1998) e Friedelmeyer (2010), em particular, os cadernos ditos de Saratoff, que Poncelet redigiu no período de cárcere entre os anos de 1813-1814. Essas análises permitem esclarecer alguns aspectos da elaboração da concepção inovadora de Poncelet sobre a geometria. Belhoste e Friedelmeyer insistem sobre a relação existente entre os primeiros artigos de Poncelet na *Correspondance de l'École Polytechnique*[2] e os problemas abordados nos cadernos de Saratoff. Mas, pensamos que o estudo desta relação remete a uma questão mais ampla, ou seja, ao espírito que animava os alunos e os professores no período em que Poncelet era aluno na *École Polytechnique*.

Esta questão exige uma nova postura em relação aos textos de Poncelet. Devemos entender que se trata de textos dialogando com outros textos formando uma rede, assim como Brechenmacher (2006, p.8) procede para dar conta da evolução da noção de matriz. Brechenmacher ressalta:

> *A metodologia das redes visa a permitir uma descrição matemática de culturas, as suas interações e comunicações. Ela permite que você especifique a metáfora da trança aplicada a enunciados contemporâneos do teorema de Jordan: a identificação de redes distintas permite identificar as comunicações, as convergências, ou seja, a forma como as culturas locais se tece e participa da história multifacetada de um teorema no período 1870-1930.*[3]

---

[2] A *Correspondance* era um jornal de circulação interna, com publicações de artigos escritos pelos professores e alunos, abrangendo todas as matérias ministradas na École Polytechnique. Organizada por Jean Pierre Nicolas Hachette, professor da *École polytechnique*, durante os anos de 1804 a 1816.

[3] *La méthodologie des réseaux vise à permettre une description de cultures mathématiques, de leurs interactions et communications. Elle permet de préciser la métaphore de la tresse appliquée à l'énoncé contemporain du théorème de Jordan : la mise en évidence de réseaux distincts permet de poser la question des communications,*

Queremos utilizar esta metodologia numa perspectiva parecida, em um período mais curto, pois se trata dos anos entre 1807 e 1822, relacionando os textos de Poncelet com os textos que gravitam em volta da *École polytechnique* (livros textos, *Correpondance de l'École polytechnique*, *Journal de l'Ecole polytechnique*, etc.) Esta metodologia vale também para o período de retorno de Poncelet à Paris com os textos publicados envolvendo propriedades projetivas no período 1814-1822 nos *Annales de mathematique pures et appliquées*, conhecidas como Annales de Gergonne[4]. Estas redes permitem evidenciar uma temática de problemas que são focados sobre propriedades geométricas ligadas a certo tipo de projeção. Nós pensamos tornar assim mais claro o contexto da elaboração das concepções de Poncelet. Este contexto é limitado no espaço, pois diz respeito aos geômetras formados da École Polytechnique e a seus instrutores e no tempo entre a entrada de Poncelet na École em 1807 e a publicação do seu Tratado em 1822.

Poncelet na École Polytechnique

Nos dois anos de estudo à Ecole Polytechnique (1810-1812), Poncelet assistiu ao curso de Geometria descritiva lecionado por Hachette. Este ensino representava 20 % do ensino dispensado. Além do curso os alunos deviam realizar diversas construções geométricas. Para Gaspard Monge a geometria descritiva possui dois objetivos,

> [...] *O primeiro de dar os métodos para representar sobre uma folha de desenho que tem apenas duas dimensões, isto é, cumprimento e largura, todos os corpos da natureza que tem três dimensões: comprimento, largura e profundidade, desde que estes pudessem ser definidos rigorosamente.*
>
> *O segundo objeto é de dar a maneira de reconhecer através de uma descrição exata as formas dos corpos, e deduzir todas as verdades que resultam das suas formas e de suas posições respectivas.* (MONGE, 1799, p.5, tradução nossa).

Isso mostra dois aspectos da disciplina: 1) passar do espaço para o plano; 2) a partir do plano, voltar ao espaço. Isso envolve um novo tipo de demonstração de geometria plana: considerar a figura plana como a representação de um objeto espacial mediante um sistema de projeção.

Dois periódicos ritmavam a vida dos estudantes, o *Journal de l'École polytechnique*, reunindo os programas, os cursos ou apostilhas assim como artigos de professores e ex-alunos, e a *Correspondance sur l'École polytechnique* cuja edição era organizada por Hachette e que reunia contribuições de alunos e professores em várias disciplinas como a

---

des convergences, c'est-à-dire de la manière dont des cultures locales se tressent et participent de l'histoire plurielle d'un théorème sur la période 1870-1930.

[4] Periódico publicado por Joseph Diez Gergonne, que reunia os artigos dos matemáticos do início do sec. XIX e que foi editado de 1810 até 1832.

geometria, análise, química, etc... . O que a torna relevante, para nossa pesquisa, é uma serie de problemas colocados por Hachette que estimulavam as reflexões dos alunos.

Ao ler os artigos da *Correspondance*, observamos que se trata de problemas envolvendo vários tipos de projeções além das projeções ortogonais utilizadas na geometria descritiva propriamente dita. A perspectiva linear é tratada por Hachette em vários artigos (por exemplo, Correspondance, T1, p. 312-320). Esta disciplina fazia parte do ensino dispensado, os alunos devendo construir desenhos geométricos de monumentos. O que domina toda essa atividade é a compreensão da projeção central. Outro tema próximo são as soluções de construção por via de apenas uma régua. Alias Hachette observa que a solução dela é diretamente inspirada dos métodos expostos no seu artigo sobre a perspectiva linear.

O estudo da projeção para construção em perspectiva não é o único tipo de problema. Por exemplo, Baduel publica um artigo (*Correspondance*, T2, p. 20) dando a solução do problema seguinte: dado um triângulo qualquer abc, determinar qual deve ser a inclinação do seu plano e a sua posição, para que a sua projeção sobre um plano horizontal seja um triângulo equilátero?".

Outro tipo de projeção a ser tratado é a projeção stereográfica (por exemplo, *Correspondance*, T.2 p. 242) que descreve as projeções das curvas de uma esfera para um plano. Enfim é também descrita a representação de uma anamorfose.

Poncelet publica o seu primeiro artigo em 1809 (Correspondance, T.2, p. 271). Apresentando soluções a dois problemas propostos por Hachette[5].

> *1) conduzir um círculo tangente a três círculos dados?*
> *2) Por um ponto dado num plano de um paralelogramo, traçar com a régua uma paralela a uma reta situada neste plano.* (tradução nossa) [6]

Poncelet utiliza uma maneira engenhosa para solucionar o problema. Como era de seu conhecimento traçar um círculo tangente a outros dois círculos passando por um ponto dado, Poncelet faz uma adaptação ao problema inicial. Deduz do comprimento dos raios dos três círculos a medida do menor raio deles. Desta forma, o círculo de raio menor é degenerado para um ponto, recaindo no seguinte problema:

> *conduzir por um ponto um círculo tangente a dois círculos dados?* (tradução nossa) [7].

Vejamos a solução apresentada aos três círculos X , Y e A : O ponto O é o ponto das tangentes exteriores aos círculos X e Y . O círculo A é o de menor raio. Assim, ele torna-se um ponto ao reduzir-se o raio dos três círculos. Desta forma o problema torna-se: Traçar o círculo tangente aos círculos dados X e Y passando pelo ponto A .

---

[5] *Correspondance*, tomo II, 3º caderno, p. 271-274.
[6] *1) Mener un cercle tangent à trois cercles donnés? 2)Par um point donné dans le plan d'um parallélogramme, mener avec la règle une parallèle à une droite située dans ce plan".*
[7] *Mener par un point un cercle tangent à deux cercles donnés?*

Tendo quatro soluções – A tangente exterior aos círculos dados, a tangente interior aos círculos dados e duas outras tangenciando exteriormente um dos círculos e interiormente o outro círculo.

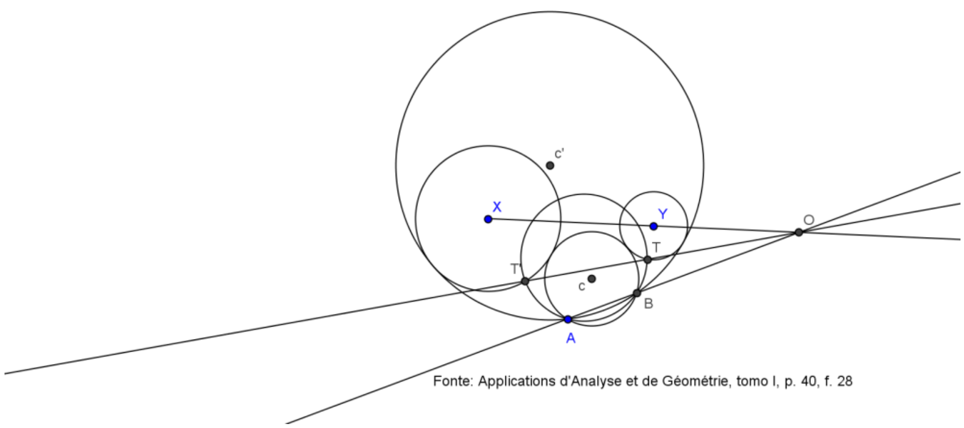
Vejamos as soluções das tangentes exteriores e interiores aos círculos dados.

Tracemos uma reta AO e uma secante OT aos círculos X e Y que irão intersectá-los internamente nos pontos T e T'. Construímos um círculo ATT'. Este círculo intersectará AO em B.

Assim, $AO.OB = OT.OT'$. Logo T, T', A e B pertencem a um círculo que irá intersectar os círculos X e Y. Portanto, todo círculo tangente aos círculos dados passarão pelos pontos A e B. Desta forma, o problema torna-se:

> *Por dois pontos A e B, conduzir um círculo tangente aos círculos X e Y.* (tradução nossa) [8]

1. circulos tangentes a três circulos dados



Fonte: Applications d'Analyse et de Géométrie, tomo I, p. 40, f. 28

Esta ideia de passar do plano ao espaço é diretamente inspirada pelo pensamento descritivo de Monge. O segundo problema resolvido envolve a construção com apenas uma régua.

> 2) *Por um ponto dado em um plano de um paralelogramo, conduzir com a régua uma paralela a uma reta situada neste plano*. (tradução nossa)[9]

Para construirmos a solução deste problema, faremos uma revisão no seguinte assunto: a reta no infinito e as construções utilizando apenas a régua.

---

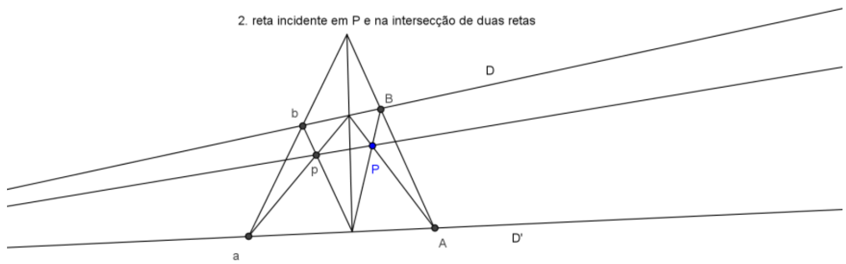
[8] *Par deux points A e B, mener um cercle qui touche le cercle X e Y.*

[9] *Par un point donné dans le plan d'un parallélograme, mener avec la règle un parallèle à une droite situés dans ce plan?*

O artigo de Brianchon[10] de 1810, que inspirou Poncelet nos cadernos de Saratoff [11], faz alusão a sistemas de retas concorrentes em um ponto que ao serem projetados no infinito são transformados em retas paralelas. Assim, vejamos um problema bem conhecido:

> *Duas retas D e D' e um ponto P do seu plano são dados. Construir a reta que liga o ponto P ao ponto de intersecção, inacessível, das duas retas*. (tradução nossa)[12]

2. reta incidente em P e na intersecção de duas retas



Fonte:Applications d'Analyse et de Géométrie, tomo I, p. 434, fig. 170

O que justifica tal construção é o teorema de Desargues[13]: "Se dois triângulos ABC *e* abc de um mesmo plano são tais que os pares de lados $\{(A,B),(a,b)\}$, etc., são respectivamente concorrentes nos pontos I,K,L *colineares, então (Aa), (B,b), (C,c)* são concorrentes em um ponto O e reciprocamente ". (tradução nossa)[14]

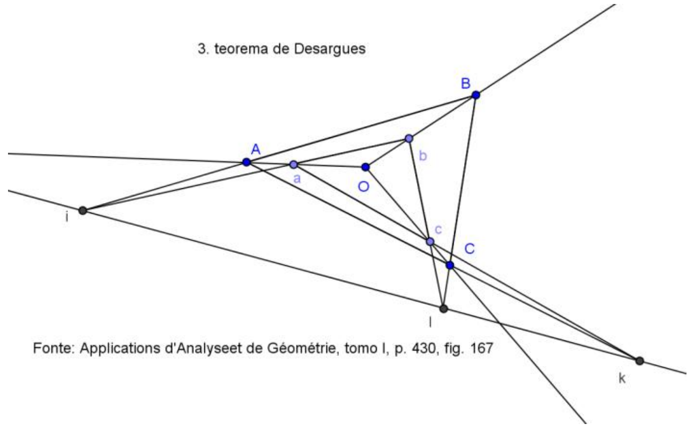
[10] *Solution de plusieurs problemès de géométrie*, journal de l'École Polytechnique, Paris, 1810. p.1-15

[11] Poncelet cita tal influência no início do 3º caderno de Saratoff, Poncelet (1862, p. 167)

[12] *deux droites D et D' et un point P de leur plan ètant donnés, construire la droite reliant P au point d'intersection (inaccessible) des deux droites*

[13] Girard Desargues (1591-1661).

[14] *si deux triangles ABC et abc d'un même plan sont tels que les paires de côtés $\{(A,B),(a,b)\}$, etc., sont respectivement concourantes en des points I,K,L alignés, alors (Aa), (B,b), (C,c) sont concourantes en un point O et réciproquement.*



A demonstração de Poncelet consiste simplesmente em considerar os dois triângulos como a projeção de dois outros cujos lados concorrem no infinito, isto é, de dois triângulos homotéticos.

Ao analisarmos os trabalhos iniciais de Poncelet na École polytechnique, podemos observar que fazem parte de uma serie de problemas que representa o capital comum dos alunos da École polytechnique. Certos problemas (como o segundo) são de fato problemas que hoje classificamos como de geometria projetiva, pois apresentam apenas propriedades de incidência e nenhuma propriedade métrica.

Desta forma, podemos considerar alguns elementos da rede que formam o fundo sobre o qual Poncelet vai se inspirar para elaboração da sua teoria - Monge, Hachette, Brianchon, Carnot, onde podemos observar uma problemática “projetiva”.

Os cadernos de Saratoff e a primeira formulação dos princípios de continuidade (1813-1814)

Poncelet reconhece expressamente no 3º caderno de Saratoff que a origem de seu trabalho sobre projeção central é a obra de Charles-Julien Brianchon[15]. Esta Memória inspirou Poncelet em Saratoff e o conduziu a sua intuição sobre o princípio de continuidade.

> *Um método particular de demonstração* [...] *aplica-se a certas ordens de proposições de geometria plana, que se relaciona apenas as direções nas quais não se considera nenhuma largura absoluta ou relativa das retas, nem as grandezas dos ângulos.* (BRIANCHON, 1810, p.1, tradução nossa) [16]

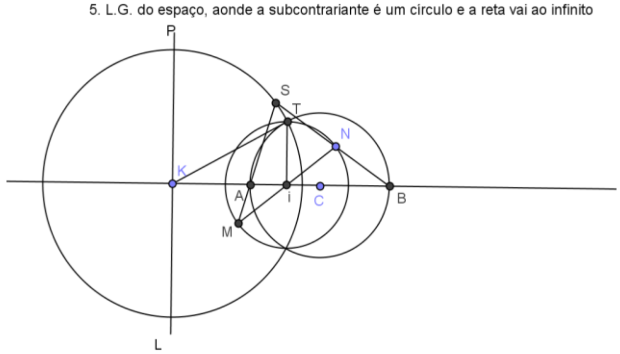
[15] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo I, 1862 , p. 116

[16] *une méthode particulière de démonstration* (...) *s'appliquant à um certain ordre de propositions de géométrie plane, qui se rapportent seulement aux direction des lignes, et dans lesquels on ne considere aucunement les longueurs absolues ou relatives de ces lignes, non plus que la grandeur des angles.*

Desta forma, Brianchon propõe uma representação sem métrica, ou seja, um método através do qual toda e qualquer projeção se relaciona com o objeto projetado sem a preocupação com comprimentos de segmentos e medidas de ângulos. Essa transformação reversível torna possível a dedução de várias propriedades das figuras. Com base nesta Memória, Poncelet desenvolve o método de Projeção Central.

No 3º caderno de Saratoff, Poncelet afirma quatro princípios básicos da projeção central. Ao fazer a demonstração de um dos princípios por Geometria Descritiva, ele observa as possibilidades desta construção quando a reta PL intersecta o círculo de diâmetro AB. Este problema é apresentado na construção a seguir:

5. L.G. do espaço, aonde a subcontrariante é um circulo e a reta vai ao infinito



Fonte: Applications d'Analyse et de Géométrie, tomo I, p.132, fig 55

O problema consiste em determinar o vértice S de um cone cuja base é o círculo C dado, de tal modo que qualquer secção paralela ao plano através de S e a reta PL seja um círculo, dito subcontrariante de C. Na épura desenhada por Poncelet, o plano horizontal é o plano de base do cone e contém PL, e o plano vertical que passa pelo centro c de C é perpendicular à PL; Poncelet mostrou que para resolver o problema é suficiente traçar, a partir do ponto K (intersecção da linha de terra com a reta PL), uma das duas tangentes a C e, em seguida, sendo T o ponto de contato da tangente com C, traçar no plano vertical o círculo de centro K e raio KT. Todos os pontos do círculo assim construído, com a exceção de dois pontos sobre a linha de terra, podem ser tomados como o vértice S do cone procurado. Poncelet também mostrou que os centros dos círculos subcontrariantes de C são os pontos de uma reta do plano vertical passando por S e intersectando o diâmetro AB de C em i, pólo da reta PL com relação a C. A relação entre PL e i é que permite afirmar que mesmo quando PL intersecta o círculo C e os círculos subcontrariantes deixem de existir realmente, i continuará existindo. Na linguagem do Tratado de Propriedades Projetivas, i se torna o centro ideal de um círculo cujo raio é imaginário. O subcontrariante do círculo C de centro i e suas tangentes não podem ser construídos quando PL intersecta C. Este princípio é dito por Poncelet da seguinte forma:

> *Se qualquer figura tem uma dessas propriedades que nós chamamos posição, quando as partes que o compõem têm uma disposição particular, essa figura ainda goza da mesma propriedade, independentemente da forma na qual invertemos a ordem e disposição da figura.* (PONCELET, 1862, p. 121, tradução nossa)

Neste problema, ao encontrar o lugar geométrico dos pontos que satisfazem tais condições, Poncelet afirma que as subcontrariantes sempre existirão, sendo os raios reais ou imaginários e as construções serão sempre possíveis quando as condições não forem contraditórias ou incompatíveis.

Friedelmeyer (2010, p. 70) observa que o resultado analítico, que Poncelet buscava ao final do 2º caderno de Saratoff (PONCELET, p.105-115), contrasta de forma conflitante com a solução sintética descrita em seu 3º caderno. A análise demonstra que o centro *i*, dos círculos conjugados não deixa de existir, qualquer que seja o raio da circunferência dada. A razão é que o ponto *i* e o ponto *k* são relacionados de forma algébrica, portanto, independe da posição particular da reta PL. Diz-se que a reta *it* é polar do polo *K*.

Poncelet, então, reflete sobre as possibilidades de certas construções, deduzindo que para a construção geométrica, basta observar as condições que são apresentadas. Quando a impossibilidade é caracterizada por condições contraditórias ou incompatíveis, ela é absoluta e, portanto, não há nada real, geometricamente falando.

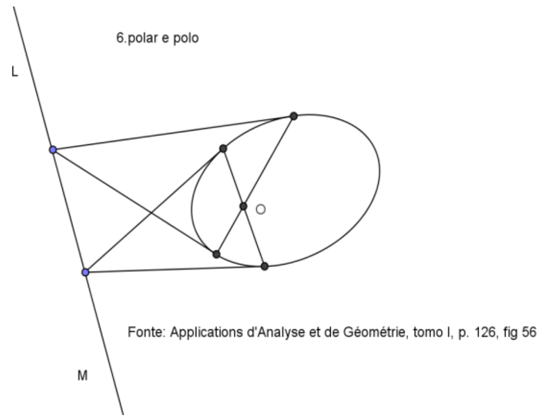
Para bem explicar, Poncelet adota um exemplo, apoiado em um problema de Monge. Quando os vértices de uma superfície cônica, que circunscreve uma curva de segunda ordem, descrevem uma reta, as cordas de contato intersectam-se sempre em um mesmo ponto:

> *Se de diferentes pontos de uma reta* LM*, traçarmos as tangentes a uma curva de segunda ordem, as cordas respectivas dos pontos de contato passarão sempre pelo mesmo ponto.* (PONCELET,1862, p. 125-126, tradução nossa)

De fato, o ponto O em questão não é senão o polo da reta LM, mas esta noção ainda não é formalizada por Poncelet em Saratoff.

Poncelet observa que quando o resultado é estabelecido por geometria analítica, é indiferente se a corda é secante ou não à curva de segunda ordem, mas do ponto de vista da geometria sintética não se pode construir o plano tangente à superfície e que contenha a reta. Mesmo assim, o polo existe, sendo a reta secante ou não. Desta ideia, Poncelet extrai o princípio de continuidade:

> *Adotarei, em princípio, nesta memória de geometria, que se uma figura goza de uma dessas propriedades que denominamos de posição, quando as partes que a compõem têm uma disposição particular, esta figura goza ainda da mesma propriedade, qualquer que seja a maneira geral com a qual se tenha invertido a ordem ou a disposição das figuras.* (PONCELET, 1862, p. 374, tradução nossa).



O princípio da projeção central está intimamente ligado ao princípio de continuidade. Embora o princípio de continuidade não distorça a figura, fazendo apenas modifica-la de posição, esta variação de posição permite estudar quais propriedades são conservadas. A ideia de variação contínua da figura permite separar as propriedades não métricas da figura. E nos é claro que a variação em um plano, na verdade, são os estados diferentes de uma figura plana que varia sob a projeção de pontos no espaço que estão variando. Estas ideias começam a surgir durante a estadia em Saratoff, mas é no período seguinte, após seu retorno à Paris, que irá dar uma formulação mais elaborada ao princípio de continuidade.

A volta à Paris e a elaboração do princípio de continuidade (1814-1822)

Poncelet dedica uma grande parte de sua obra em estabelecer procedimentos gerais em geometria sintética, ele constata, no início do 4º caderno de Paris, que a geometria analítica adquiriu sobre a geometria sintética "uma superioridade e uma generalização que é impossível de se contestar" (PONCELET, 1818)[17]. Assim, fixa-se como objetivo: "fazer valer na geometria sintética a generalidade das concepções da análise algébrica, generalizações que devem necessariamente pertencer a essência da grandeza da figura, independente de qualquer maneira de raciocinar" (PONCELET, 1818)[18]. A generalidade é inerente ao objeto estudado o que justifica o projeto de pesquisa dos métodos gerais em geometria sintética.

Para analisar a utilização da noção de generalidade no trabalho de Poncelet, vamos seguir o argumento que desenvolve em no quarto caderno redigido em Paris datada de 1818: *Considérations philosophiques et techniques sur le príncipe de continuité dans les lois géométriques* (PONCELET, 1818)[19] na qual ele tenta defender a admissão em

[17] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo II, 1864, p.296
[18] Ibidem, p.297
[19] Ibidem, p.296

geometria sintética de um princípio de continuidade [20] da mesma forma que em geometria analítica.

> *Na verdade, o objetivo desta admissão é unicamente introduzir a ideia de continuidade ou permanência indefinida das leis de grandeza da figura, continuidade que, pode ser frequentemente fictícia, não é menos apropriado a caracterizar e a fazer descobrir as leis verdadeiras e absolutas desta grandeza*. (PONCELET, 1818, tradução nossa) [21].

Este Caderno era destinado à publicação e foi apresentado na Socité des Lettres Sciences et Arts de Metz. O secretário resume no Comte rendu para 1821-1822, o relatório de Bergery. "Esta memória prepara uma revolução de ideias que dará a geometria ordinária um grau de perfeição que ela não tem hoje"... Este relatório parece completamente favorável. Mas Poncelet não ira publicar esta memória, pensando que mais valeria apresentar um tratado completo onde o êxito do princípio de continuidade medir-se-á pelo resultados acumulados.

No entanto, a discussão sobre esta memória envolveu três matemáticos, Terquem, Servois e Brianchon. Poncelet publica as cartas trocadas entre ele e o três geometras (Poncelet 1864, p. 530-552) mostrando que a elaboração destas memórias é também fruto de conversas com ex-alunos da *Ecole Polytechnique* e autores de vários artigos nos *Annales* de Gergonne. Esta correspondência mostra que ele teve um apoio moral para levar adiante a elaboração das suas ideias.

Poncelet, no entanto, não teve todo o apoio da *Académie des Sciences de* Paris. O relator da Memória apresentado na *Académie*, Cauchy [22], por exemplo, faz uma crítica contundente ao princípio de continuidade. Poncelet, no entanto, na introdução do seu Tratado, convida o leitor reticente a aceitar o princípio de continuidade e termina seu argumento em favor de adaptar em geometria sintética o princípio de continuidade ou de permanência das propriedades:

> [...] *e não teria direito a admitir, em toda a sua extensão, o princípio da continuidade na geometria racional, como foi feito pela primeira vez na álgebra e na aplicação do cálculo à geometria , se não como uma demonstração, pelo menos, como um meio de descoberta ou invenção?* (PONCELET, 1822, p. xiv , tradução nossa)

Em seguida, sem renunciar a este princípio, para usá-lo em seu tratado, vai moderar o uso e simplesmente ilustrar a sua utilidade quando necessário:

---

[20] O princípio de continuidade na obra de Poncelet não é um princípio de deformação da figura. Por exemplo, uma figura constituída de um círculo e uma reta, pelo princípio de continuidade, pode-se conceber todas as possibilidades que se apresentam em um plano. Ao contrário, não concebe as figuras que se podem obter em deformação do círculo em uma elipse. Este tipo de transformação, chama-se: "doutrina da projeções" (PONCELET, 1864, p.427)

[21] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo II, 1864, p.345

[22] Augustin-Louis Cauchy, membro da Académie de Sciences de Paris.

> *Proponho também a dar no decorrer deste trabalho, alguns esclarecimentos sobre a aplicação do princípio de continuidade, pois pode haver circunstâncias a fazê-lo, sem, contudo, atrapalhar o progresso geral das ideias.* (PONCELET, 1822, p.xvii, tradução nossa)

Este trabalho é precedido de uma primeira memória, *Sur la loi des signes de position em géométrie, la loi et le príncipe de continuité* (PONCELET, 1815) [23] no qual Poncelet retoma o método crítico de Carnot. Poncelet utiliza uma grande parte da terminologia introduzida por Carnot (correlação, primitivo,...), a ideia de estudar a mudança de sinais e em seguida à correlação das figuras. Ele não se recusa a conceder importância às quantidades negativas ou imaginárias. Considera importante o que é acordado por Carnot "antiga disputa relativa da existência isolada das quantidades negativas, imaginárias, etc..." (Poncelet, 1815) [24] mas, observa que isto o conduz a uma falsa crítica aos métodos da geometria analítica quando alega que estas podem conduzi-los a soluções insignificantes ou falsas.

> [...] *as raízes negativas indicadas nas soluções reais, ao mesmo tempo que alteram as hipóteses sobre a situação desconhecida, e que, por outro lado, as imaginárias indicam que para os dados do problema, as soluções são verdadeiramente impossíveis, embora possam tornar-se viável e construtíveis mudando geometricamente estes valores sem alterar os pressupostos.* (PONCELET, 1818- tradução nossa)[25]

Além da pertinência de sua crítica a discussão de Carnot, é importante notar que para Poncelet, persuadir seu leitor das vantagens da utilização das quantidades negativas e imaginárias em análise e em geometria analítica é uma necessidade. De fato, ele faz depender das leis dos sinais em geometria de um princípio de continuidade, então não se faz explicitamente a demonstração e a principal legitimação será sua utilização em análise. De fato, a comparação entre os métodos da geometria analítica e da geometria sintética leva a concluir que a diferença essencial entre estas é que a primeira utiliza o princípio de continuidade que se expressa sob a forma:

> *As propriedades gráficas encontradas na figura primitiva subsistem em outras alterações das partes, por todas as figuras correlativas que podem ser relacionadas a primeira* [...].
> *As propriedades métricas descobertas na figura primitiva permanecem aplicáveis nas outras alterações de mudança de sinais, a todas as figuras correlativas que podem ser relacionadas a primeira.* (PONCELET, 1818, tradução nossa)[26]

---

[23] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo II, 1864, p. 167
[24] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo II, 1864, p. 197
[25] Ibidem, p. 224
[26] Ibidem, p. 318

Uma das razões para que a geometria analítica seja mais utilizada do que a sintética é a adaptação deste princípio: “não é admitido, nas considerações geométricas, com qualquer generalidade que lhe é própria, e que não é empregado em certas circunstâncias favoráveis, onde ele não pode contrariar as ideias ordinariamente recebidas” (PONCELET, 1818)[27]. Este princípio é observado ou como uma verdade primeira, ou como uma consequência da geometria analítica. A posição de Poncelet é bem clara ao considerar o princípio de continuidade como um axioma da mesma maneira que em geometria analítica e mesmo em análise,

> *Nós admitiremos, à priori, a hipótese da continuidade sem discutir profundamente com antecedência, bem como as regras antigas e indiscutível do cálculo algébrico, com base na aproximação, faremos uma analogia lógicas das ideias ou resultados adquiridos anteriormente, e não simplesmente sobre a priori e convenções arbitrárias* [...] (PONCELET, 1815, tradução nossa) [28]

Certamente ele reconhece que historicamente, tal principio pertence a geometria analítica e que a aplicação deste princípio é a razão da característica da generalidade dos seus resultados. Desta forma, justifica-se o princípio de continuidade em geometria analítica, mas como consequência não assegura uma superioridade à geometria sintética:

> *Na verdade, parece quase impossível não admiti-lo, e parece inseparável da natureza da análise algébrica, mas tendo o cuidado de voltar às noções naturais e rigorosas de raciocínio normal, analisando de perto as convenções suscetíveis desta ciência que deve o seu nascimento e progresso, especialmente tendo o cuidado de separar o que pertence a ela e o que é inerente ao objeto específico a que é aplicado, ele é reconhecido sem muita dificuldade que a extensão atribuídas a todos os resultados não é menos indutivo puramente livre, por assim dizer.* (PONCELET, 1818, tradução nossa) [29]

Por que então este princípio é admitido sem discussão na geometria analítica? A resposta é a busca na formalização das equações e o “hábito de estender a significação e a aplicação de uma mesma fórmula ou equação a todos os estudos de um sistema ao qual se relaciona” (PONCELET, 1818) [30] sem se preocupar com a posição relativa dos elementos do sistema, nem mesmo de sua existência:

> *Eu vou dizer o mesmo da admissão do imaginário: é porque, nestas figuras, a única coisa representada perde a sua existência exatamente à mesma extensão que a expressão algébrica correspondente se torna*

[27] Ibidem, p. 315
[28] Ibidem, p. 168
[29] Ibidem p. 320
[30] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo II, 1864, p. 323

> *imaginária, é possível e permitido adotar, em todos os casos, a expressão para a definição rigorosa e a expressão exata de tal coisa, e, portanto, estabelece uma continuidade indefinida, às vezes absoluta, às vezes fictícia, entre todos os estados do mesmo sistema geométrico.* (PONCELET, 1818, tradução nossa) [31]

De fato, a representação para equações puramente literal permite abandonar o raciocínio explicito, dito raciocínio no qual não se perde "jamais seu objeto de vista" (Poncelet, 1818) [32] e que é uma relação imediata com uma figura particular. A admissão do princípio de continuidade autoriza a prática do raciocínio implícito:

> [...] *os geômetras que cultivaram a análise algébrica* [...] *têm representado as quantidades limitadas e finitas com caracteres estranhos a essas quantidades, e que, não conservam mais traços, embora, apesar de aquele que emprega, essas quantidades, a indeterminação absoluta que eles realmente não têm fora dele, de alguma forma, a memória da medição, de relação e a força de a pensar em uma forma puramente implícita, sem que lhe permite ver o que é a natureza de expressões algébricas que são o resultado dessas combinações, e portanto, também não lhe permitem reconhecer ser implicitamente deixa de acompanhar o trabalho rigoroso de raciocínio explícito comum.* (PONCELET, 1818, tradução nossa) [33]

Ao final do raciocínio, se os elementos negativos ou imaginários desaparecerem no enunciado do resultado final, o resultado é considerado como real e aplicável.

Poncelet afirma em uma nota o uso que faz dos termos explícito e implícito:

> *Pelo raciocínio, fórmulas, etc, explícitas, eu sempre ouvir o raciocínio, fórmulas, etc, que se relacionam com quantidades cujo tamanho está atualmente fixado e conhecido explicitamente, numericamente ou geometricamente. Eu atribuo precisamente ao contrário do raciocínio expressões fórmula implícita, o raciocínio explícito é necessariamente absoluto, o outro pode ser apenas no sentido figurado. Além disso, podemos usar essas expressões a fim de encurtar e clarificar o discurso, e temos que observar que eles têm sido usados de uma forma um pouco semelhante, pelo autor de Géométrie de position.* (PONCELET, 1818, tradução nossa) [34]

Poncelet se propõe a seguir o mesmo programa no desenvolvimento da geometria sintética. Seu objetivo é de determinar as consequências de adaptação do princípio de

---

[31] Ibidem, p. 321-323
[32] Ibidem, p. 306
[33] Ibidem, p. 330-331
[34] Ibidem, p. 324-325

continuidade em geometria sintética, identificar novas formas de demonstração que vão resultar e justificar uma noção implícita. A ideia de Poncelet é que as propriedades geométricas que se aplicam a uma configuração particular vão (salvo as mudanças de sinais que correspondem às mudanças de posição) continuar a se aplicar as figuras correlativas que diz "todos os estados reais e absolutos de um mesmo sistema que se transforma por graus insensíveis" (PONCELET, 1818) [35]. É suficiente então demonstrar a propriedade por um raciocínio explícito considerando uma figura onde todos os objetos e as relações são reais. E ainda fazendo uso do princípio de continuidade, é possível estender esta propriedade a todas as figuras correlativas, sendo entendido que este princípio permite afirmar "sobre a permanência das relações, mas não diz sobre a natureza e existência absoluta dos objetos e das grandezas que estas relações são concernentes" (PONCELET, 1818) [36]. Estas relações não estão longe de se tornarem absurdas ou sem sentido em uma aplicação real no sistema. É bem claro que, na visão de Poncelet, não é uma questão de aplicar o princípio de continuidade de qualquer propriedade. Ele define o objeto da geometria como o estudo "das propriedades dos corpos em relação as suas áreas ou de suas configurações" (PONCELET, 1818) [37]. Ele distingue estas propriedades das que tem uma característica geral:

> *Mas entre estas propriedades, há menos preocupação que o tal magnitude absoluta ou determinada ou peças como afecções, relações gerais e indeterminado comuns ou que pertencem a sua combinação mútua. As últimas propriedades só deve ser sujeito às seguintes considerações: por causa de sua generalidade e imprecisão das mesmas variáveis que afetam essas propriedades contêm implicitamente todos os outros, e isso é suficiente para alcançar este objetivo, se o caso geral ao caso particular, através da atribuição de variáveis de valor indeterminado ou relacionamento que particularizado.* (PONCELET, 1818, tradução nossa) [38].

O princípio de continuidade se aplica a este tipo de propriedade. Sem entrar na discussão sobre a validade deste, pode-se destacar uma circularidade das argumentações de Poncelet em utilizar o argumento generalizado; A generalidade dos métodos geométricos é fornecida pela aplicação do princípio de continuidade; este princípio concernente às propriedades deve basear-se na generalização porque são suscetíveis de serem invariantes na correlação das figuras.

Em geometria analítica, as propriedades métricas são descritas pelas equações, enquanto as propriedades gráficas são mais concernentes a forma das equações.

O princípio de continuidade permite verificar também outro caso de configurações onde certos elementos da figura tornam-se irreais sem se tornarem imaginários: considere duas retas secantes que se intersectam em um ponto real; se uma das duas retas sofre uma

[35] Ibidem, p. 337
[36] Ibidem, p. 338
[37] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo II, 1864, p. 298
[38] Ibidem, p. 298

rotação contínua e progressiva em torno de um de seus pontos, "ocorrerá que o ponto de sua intersecção irá se afastar de tal forma que quando as retas forem paralelas os pontos estarão no infinito" (PONCELET, 1818) [39]. Em seguida, Poncelet reúne o caso onde as retas são secantes e onde as retas são paralelas, dizendo que neste último caso o ponto de intersecção está no infinito. Poncelet insiste que no caso das retas paralelas quando se diz que o ponto de intersecção está no infinito serve apenas para conservar este ponto na discussão e sinalizar que a intersecção das retas é ideal. Podemos utilizar o termo do ponto no infinito considerando apenas feixes de retas paralelas. Uma utilização consistente deste termo faz com que algumas conclusões, que possam parecer paradoxais, como o fato que "os dois extremos de uma reta indefinida se juntam e se confundem no infinito", sejam solucionadas, uma vez que duas retas distintas não podem ter mais de um ponto de intersecção. Uniformizar a ideia da expressão ponto no infinito, as noções de reta secantes e retas paralelas, simplificam os enunciados, uma vez que dizem respeito a todas as retas secantes e bem como retas paralelas e, ao mesmo tempo, enriquecem a noção de geométrica. Em um raciocínio idêntico com os planos, Poncelet chega a conclusão que "todos os pontos situados no infinito sobre um plano devem ser considerados, de um maneira ideal, como distribuídos sobre apenas uma reta." (PONCELET, 1818) [40].

A memória de 1820

A Memória de 1820 – *Essai sur les propriétés projectives des sections coniques* – foi apresentada em 01 de maio de 1820 à Académie des Sciences de Paris. Este trabalho continha a essência das novas ideias que Poncelet desejava introduzir à Geometria. Somente, muitos anos depois, em 1864, ele resolve publicar em seu livro *Applications d'analyse et de Géométrie, tomo II,* a versão original desta Memória e também os artigos publicados nos *Annales des mathématiques pures et appliquées*, antes do Tratado.

Esta Memória é um primeiro esboço da redação do *Traité des Propriétés Projectives des Figures de 1822*, redação esta que contém, não apenas a exposição de novos princípios de projeção através de canais essencialmente geométricos, mas também, as suas aplicações mais suscetíveis ao entendimento do leitor e, ainda, as novas doutrinas concernentes às secantes ou às cordas ideais, as intersecções imaginárias das curvas e das superfícies, situadas a uma distância finita ou infinita. Assim, por exemplo, são resolvidas inúmeras questões nas quais as seções cônicas foram sujeitas a passar por pontos, a tangenciar retas imaginárias em um número par de contatos duplo ou simples. Também, as soluções destas questões poderiam, mesmo no caso de segunda ordem, serem efetuadas usando apenas régua ou métodos lineares. Tais soluções e as consequências derivadas em cada caso foram muito significativas, uma vez que demonstraram as vantagens geométricas da adoção de novos princípios: de projeção e de continuidade.

A Memória de 1820 possui três partes:

- A primeira parte aborda as noções preliminares sobre as secantes ideais das seções cônicas e é composta por 27 artigos; mostra a relação constante que existe entre o polo e o

[39] Ibidem, p. 346

[40] Ibidem, p. 348

meio da corda; diz respeito à secante ideal de seções cônicas e inclui a sua definição e suas propriedades gerais, deduzidas a partir de considerações puramente geométricas. Poncelet observa que o ponto de intersecção das tangentes a uma seção cônica, pelas extremidades da mesma corda, ou o que é comumente chamado de polo dessa secante, é um ponto real, mesmo se as secantes tornam-se imaginárias. Ele mostra que a relação é constante e no meio da corda, e como usá-la para construir o polo ideal correspondente a uma determinada corda ideal.

- A segunda parte aborda as cordas e secantes ideais, as cônicas suplementares considerando o caso particular da circunferência e é composta por 43 artigos. Poncelet manipula cordas ideais considerando o caso especial da circunferência, e demonstra várias propriedades, com corda real ou ideal, comuns a dois ou mais círculos no mesmo plano; deduz muitas propriedades destas cordas, que passamos a conhecer como eixo radical. Entre essas propriedades, uma das mais notáveis é que o círculo descrito com centro no eixo corta ortogonalmente todos que passam por dois pontos em questão[41]; e é neste parágrafo que apresenta uma solução muito elegante para o problema em que se deseja construir uma tangente a três outros círculos dados (problema de Apolônio).

- A terceira parte aborda o princípio da doutrina das projeções e é composta por 33 artigos. Poncelet define os princípios de projeção central através dos quais se podem estender os teoremas para o caso do círculo e seções cônicas quaisquer. Por exemplo, querendo mostrar que as propriedades projetivas do sistema de dois círculos, localizado no mesmo plano, permanecem no sistema de duas seções cônicas, ele apenas faz ver que o primeiro sistema pode ser considerado geralmente como a projeção do segundo. Ele procura mostrar que todos os pontos no espaço podem projetar duas seções cônicas em dois círculos, e prova que todos estes pontos pertencem ao círculo descrito com raios perpendiculares à corda ideal comum a ambas as curvas dadas e iguais à metade dessa corda. Poderia até, com base nesta solução, determinar todos os pontos no espaço capaz de projetar quaisquer duas curvas do segundo grau, em duas outras curvas do mesmo grau, mas semelhantes entre si, para as quais o diâmetro paralelo para plano das duas primeiras curvas, forma com o conjugado a mesma combinação em uma razão dada. Várias outras questões semelhantes abordadas por Poncelet, no terceiro parágrafo, são resolvidas de acordo com os mesmos princípios.

Esta memória contem muitos desdobramentos na enunciação e ainda a justificativa dos princípios, se for comparada com os enunciados do terceiro caderno de Saratoff. São ao todo, no terceiro parágrafo, dezoito teoremas dos quais os oito primeiros dizem respeito às projeções de feixe de retas. Apenas a partir do teorema IX, Poncelet aborda projeção de cônicas. Nas demonstrações, utiliza apenas a geometria sintética. O teorema IX trata de encontrar o lugar geométrico dos vértices do cone oblíquo tal que a reta pl seja projetada no infinito quando a sub-contrariante é projetada como um círculo. Os teoremas X, XI e XII são conclusões deduzidas da figura do teorema IX.

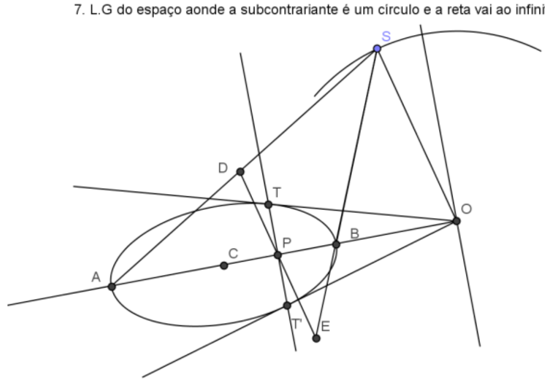
[41] *Applications d'Analyse et de Géométrie*, tomo II, p.397 (teorema III- tradução nossa).

> *Uma reta e uma seção cônica em um mesmo plano podem ser geralmente consideradas como a projeção de outra, tal que a reta é conduzida inteiramente para o infinito e a seção cônica torna-se um círculo, de modo que segundo o teorema VII, qualquer sistema de retas contínuas que concorrerem em um ponto da reta em questão é tornado em um sistema de retas paralelas* [...][42]

Para demonstrar este Princípio de uma maneira completa, Poncelet reformula o problema já considerado no terceiro caderno de Saratoff.

> *São dadas uma reta e uma seção cônica sobre o plano. Encontrar o centro e um plano de projeção tal que a reta dada MN seja projetada no infinito sobre este plano e que a seção cônica C seja ao mesmo tempo projetada sobe um círculo.* [43]

7. L.G do espaço aonde a subcontrariante é um circulo e a reta vai ao infinito



Fonte: Applications d'Analyse et de Géométrie, tomo II, p. 443, fig. 165

Suponha o problema resolvido. Seja S o centro de projeção; Considere o cone oblíquo que teria o seu vértice neste ponto e base a secção cônica dada. A projetante desta curva será a superfície cônica; Considere um plano que passe pela reta MN e pelo ponto S, será a projetante desta reta. Conforme a condição do problema existe certo plano de projeção que secciona a superfície projetante segundo uma circunferência, e conduz a reta MN ao infinito.

Então:

1- A reta dada MN não deverá intersectar a secção cônica dada, ou seja, MN é uma secante ideal.

2- Os planos paralelos seccionam segundo uma circunferência, dita, sub-contrariante ou conjugada da cônica dada.

[42] Ibidem, p. 433 (teorema IX - tradução nossa)

[43] Ibidem, p. 434 (teorema IX - tradução nossa)

Considere um plano por SAB este plano chamaremos de diametral. Observa-se que este plano secciona os diâmetros das sub-contrariantes ao meio e contém o vértice S. A circunferência de centro O e raio OT contida no plano diametral é o L.G. dos pontos S procurado. Tal qual o problema de Saratoff, aqui são claras as condições de possibilidade da construção e obtenção do ponto S.

Estes princípios e justificativas aparecem na terceira parte da memória. A primeira é consagrada ao estudo das propriedades das cônicas, a segunda ao estudo dos círculos e eixos radicais. A terceira parte enuncia, por fim, o método que relaciona a primeira parte com a segunda, já que pelo método da projeção central as cônicas se transformam em círculos, mantendo as propriedades que Poncelet chama de posição. Os enunciados mais precisos e progressivos da terceira parte manifestam o desejo de Poncelet de explicitar cuidadosamente o que rege o seu método.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Poncelet objetiva legitimar o uso do Princípio da Continuidade em Geometria Sintética, com isso permite afirmar a permanência das propriedades das figuras geométricas quando as posições relativas dos seus elementos variarem continuamente. Quando estes elementos são representáveis ou reais, este princípio diz que as propriedades são preservadas. A ousadia de Poncelet consiste em estender as propriedades onde os elementos são imaginários ou ideais.

Vários anos depois, Poncelet comprometeu-se a reagrupar e editar o conjunto de sua obra publicada e não publicada. Neste ambicioso projeto incluiu quatro volumes de seus escritos sobre a Geometria, os dois volumes *Applications d'Analyse et de Géométrie* (1862-1864), e os dois volumes da segunda edição do *Traité des Propriétés Projectives des figures* (1865-1866). Certamente, essa não era uma empreitada desinteressada. O caráter polêmico das introduções e comentários é óbvio. A compilação dos textos, para os quais foi adicionada uma série de comentários e notas, nos permite acompanhar de perto a evolução do pensamento de Poncelet, especialmente em função da ordem cronológica da apresentação: os cadernos inéditos de Saratoff (1813-1814) no volume I das Aplicações, os trabalhos inéditos publicados no período 1815-1821 no volume II; a republicação da versão original do *Traité des Propriétés Projectives des figures* (1822) no Volume I do Tratado e obras geométricas do período 1823-1831 (incluindo os escritos de polêmica com Gergonne e Plücker) no Volume II do Tratado.

Nota-se que o trabalho científico e técnico de Poncelet foi concentrado em duas áreas muito diferentes, correspondentes a duas fases sucessivas em sua carreira: Geometria Projetiva e Mecânica Aplicada. Na Geometria, seu trabalho, concebido com maior participação, abrange o período de 1813 a 1824, com exceção de alguns artigos que apareceram mais tarde e que não afetaram o desenvolvimento do campo. O resultado mais importante deste período foi o *Traité des Propriétés Projectives des figures*, que foi o primeiro livro inteiramente dedicado à geometria utilizando sistematicamente o princípio da projeção central, uma nova disciplina que teve grande desenvolvimento no século XIX.

Baseando seu trabalho no princípio da continuidade e da noção de cordas ideais, ele fez uso extensivo de projeções centrais e outros tipos de transformações (homologia e transformação por polares recíprocas em duas ou três dimensões), formando sistemas no infinito e elementos imaginários.

A distinção feita por Poncelet das propriedades projetivas e métricas permitiu o surgimento do conceito moderno de estrutura. Dentre os muitos resultados originais apresentados no Tratado, Poncelet afirma que se postularmos pontos aos infinitos e imaginários,

1. Duas cônicas não degeneradas da mesma espécie têm quatro pontos comuns, afirmação esta que conduz a algumas descobertas: pontos cíclicos, ponto imaginário no infinito e ponto comum a todos os círculos de um plano.
2. O sistema das geratrizes de quádricas pode ser real ou imaginário.

A influência decisiva exercida pelo *Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras* no desenvolvimento da Geometria Projetiva não foi percebida por Poncelet. Este fato é trazido à luz pela maioria dos comentadores. Um exemplo é o que ocorre com a Teoria das Polares Recíprocas que, nas mãos de Poncelet, tornou-se instrumento de fecundas descobertas, embora ele, à época, não percebesse o caráter mais geral do Princípio da Dualidade, que foi apontado pouco depois por matemáticos.

Outro aspecto que deve ser ressaltado é a contextualização da elaboração das ideias de Poncelet. O que podemos constatar nos cadernos de Saratoff é uma reflexão sobre temas que se encontra nos artigos da *Correspondance* e que envolve vários tipos de projeção. Em seu retorno à Paris, pensamos que Poncelet tenha lido as publicações a respeito deste tema e entrado em contacto com geômetras que tinham o mesmo interesse, Terquem, Servois e Brianchon, por exemplo. Assim a obra de Poncelet aparece ainda mais fruto direto do ensino de Monge, Hachette e outros tantos matemáticos que o influenciaram direta ou indiretamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

BELHOSTE, B. De l'École Polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet. **SABIX** (Société des Amis de la Bibliothèque de l'École Polytechinique). Paris, Bulletin nº 19, 1998.

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930). **CultureMATH – Site expert ENS Ulm / DESCO** - 20/12/2006. Disponível em:<http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Brechenmacher/matrices_index.htm >. Acessado em: 07/2013.

BRIANCHON, C.J. Solution de plusieurs problem de géométrie. **Journal de l'École Polytechnique**, Paris, v.1, caderno 7, p. 1-15, 1807.

CARNOT, L. **Géométrie de position**. 1ª ed. Paris: Duprat, 1803.

CAUCHY, A.L. Rapport à l'académie royale des sciences. **Annales de mathématiques pures et appliquées**. Paris, tomo 11, p. 69-83, 1820-1821.

FOURCY, A. **Historie de l'École Polytechnique**. 1ª ed. Paris, 1828.

FRIEDELMEYER, J.P. L'impulsion originalle de Poncelet dans l'invention de la géométrie projective. In : GREEN, J.B. et al. **Eléments d'une biographie de l'espace projectif**. 1ª ed. 2010. p. 55-158.

MONGE, G. **Journal Polytechnique ou Bulletin du travail fait a l'Ecole centrale des travaux publics**. Paris, caderno 2, p.1-14, 1795.
NABONNAND, P. **Contributions à l'historie de la géométrie projective au 19º siècle**. Nancy, janeiro 2008.
PONCELET, J.V. **Application d'analyse et de géométrie**. 1ªed. tomo 1. Paris: Gauthier-Villars, 1862.
PONCELET, J.V. **Application d'analyse et de géométrie**. 1ªed. tomo 2. Paris: Gauthier-Villars, 1864.
PONCELET, J.V. Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques. In :______. **Application d'analyse et géométrie**. 1ªed. Paris: Gauthier-Villars, 1864. p. 296-364.
PONCELET, J.V. Essai sur les propriétés projectives des sections coniques. In :______. **Application d'analyse et géométrie**. 1ªed. Paris: Gauthier-Villars, 1864. p. 365-454.
PONCELET, J.V. Problémes de géométrie. In : HACHETTE, J.N.P. **Correspondance de l'Ecole Polytechnique**, Paris, tomo 2, caderno 3, p. 271-276, 1811.
PONCELET, J.V. Sur la lei des signes de position en géométrie, le loi et le principe de continuité. In :______. **Application d'analyse et géométrie**. 1ª ed. Paris: Gauthier-Villars, 1864. p. 167-295.
PONCELET, J.V. Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques. **Société des lettres sciences et arts de Metz**. Année 1821-1822, Lamort, Metz, 1822.
SAKAROVITCH, J. Épure d'architecture : de la coupe des pierres à la géométrie descuptive, XVIe-XIXe siècles, Birkhäuser Verlag. 1998.
TATON, R. La géométrie projective en France de Desargues à Poncelet. In : **conférence faite au palais de la découvete**. 1ª ed. 1951, Paris. Anais de l'Université de Paris.

Ordem	**Nº figura**	Título	Fonte	Página
1	1	Círculo tangente a três círculos (o círculo A está degenerado)	Applications d'Analyse et Geométrie, tomo I, p. 40, f. 28	3
2	2	Reta incidente em ponto dado e na intersecção (inacessível) de duas retas dadas	Applications d'Analyse et Geométrie, tomo I, p. 434, f.170	4
3	3	Teorema de Desargues	Applications d'Analyse et Geométrie, tomo I, p. 430, f.167	4
4	5	L.G. do espaço onde as subcontrariantes são círculos e a polar é levada o infinito	Applications d'Analyse et Geométrie, tomo I, p. 132, f.55	5
5	6	Polo e polar	Applications d'Analyse et Geométrie, tomo I, p. 126, f.56	6
6	7	L.G. do espaço onde as subcontrariantes são círculos e a polar é levada o infinito	Applications d'Analyse et Geométrie, tomo I, p. 443, f.165	12

Jansley Alves Chaves
Instituto de Matemática Pós-graduação – PEMAT, campus de Rio de Janeiro – Brasil
E-mail: chavesrizo@gmail.com

Gérard Emile Grimberg
Instituto de Matemática Pós-graduação – PEMAT, campus de Rio de Janeiro – Brasil
E-mail: gerard.emile@terra.com.br