Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 15 nº 30 - pág. 23-32
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

EULER E AS PONTES DE KÖNIGSBERG

Frederico José Andries Lopes
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT – Brasil

Plínio Zornoff Táboas†
Universidade Federal do ABC – UFABC – Brasil

(aceito para publicação em julho de 2015)

Resumo

Esta é uma tradução do artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, de Leonhard Euler (1707-1783). Euler resolve o problema conhecido como "As pontes de Königsberg" e, com isso, dá início à teoria dos grafos.

Palavras-chave: teoria dos grafos, história da matemática, pontes de Königsberg.

[EULER AND THE BRIDGES OF KÖNIGSBERG]

Abstract

This is a translation of the article *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, by Leonhard Euler (1707-1783). Euler solves the problem known as "The bridges of Königsberg" and, by doing so, gives birth to graph theory.

Keywords: graph theory, history of mathematics, Königsberg's bridges.

Introdução

Apresentamos aqui uma tradução do famoso artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,* no qual o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) expõe e soluciona o problema conhecido como *As pontes de Königsberg*, frequentemente citado em livros de história de matemática e de matemática recreativa como o problema fundador da topologia e da teoria dos grafos.

O problema consistia em saber se era possível percorrer as pontes que ligavam uma ilha no rio Pregel, em Königsberg (atual Kaliningrado, na Rússia), ao restante da cidade, sem passar pela mesma ponte duas vezes. Euler responde na negativa, e ainda apresenta critérios para se decidir quando problemas semelhantes têm ou não solução.

O artigo todo é dividido em 21 parágrafos numerados. No final do parágrafo 9, o problema original já está resolvido, mas o texto restante continua refletindo e generalizando o problema até chegar em regras gerais (teoremas) para serem aplicadas em situações similares. Ao contrário do que mostram os livros de história, Euler não apresenta o já famoso grafo em que as porções de terra são representados como vértices e as pontes como arestas, o qual pode ser encontrado na bibliografia fornecida ou em livros comuns de história da matemática.

Este artigo é um brilhante exemplo de como surge uma nova teoria matemática, e como age o chamado pensamento matemático: observar, selecionar, abstrair e codificar elementos do problema em símbolos adequados. E, por fim, solucionar o problema através de uma reflexão sobre esses mesmos símbolos. Esse processo semiótico está exemplarmente exposto no artigo, de largas e profundas repercussões didáticas para a formação de novos matemáticos e educadores.

O artigo original foi escrito em 1735, apresentado para publicação em 1736 e impresso em 1741 nos *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, vol. 8. Desse artigo, existem duas traduções em inglês: uma em BIGGS, LLOYD e WILSON, pp. 3-8, e outra em NEWMAN, pp. 565-571. Embora esta última seja de melhor qualidade, ambas optaram por modernizam o texto original.

Ao contrário das traduções mencionadas, procuramos não modernizar o texto ou empregar o vocabulário técnico corrente. Com isso, pretendemos favorecer interpretações mais convenientes acerca do universo de ideias e concepções do autor. A começar pelo título, traduzimos *geometria situs*, já tradicionalmente traduzida como *geometria de posição* em língua portuguesa, por *geometria de situação*. Encontramos essa tradução em artigos posteriores, como no de Vandermonde, *Remarques sur les problèmes de situation*, de 1771[1]. Como consequência dessa opção, também não uniformizamos o vocabulário técnico. Por exemplo, Euler usa os termos *iter* (caminho), *cursus* (curso, percurso) e *transitus* (trânsito) como sinônimos, um recurso comum para variar seu estilo por vezes bastante repetitivo.

Gostaríamos, por fim, de dedicar esta tradução à memória do querido e inspirador amigo, Prof. Dr. Plínio Zornoff Táboas, que aqui figura como segundo autor. Plínio faleceu em pleno curso da escrita, enquanto dávamos os últimos retoques do texto. Certamente, o que aqui apresentamos não faz mais justiça aos padrões de rigor e qualidade que ele tanto prezava.

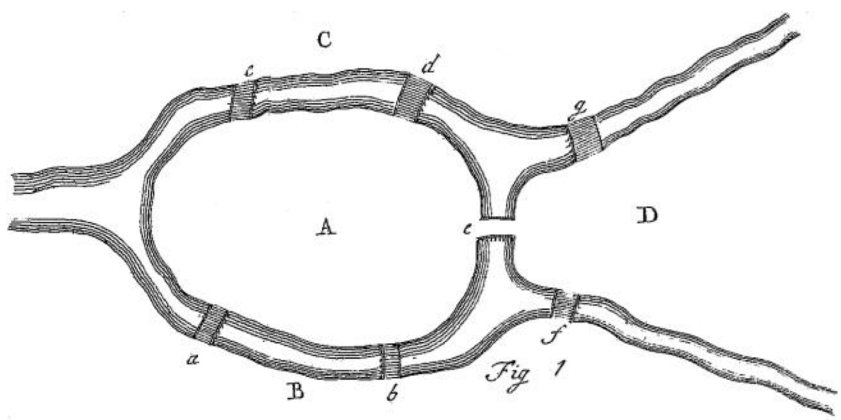
1 BIGGS, LLOYD & WILSON, p. 22.

A tradução

Solução de um problema pertinente à Geometria de situação
Leonhard Euler

§. 1. Além daquela parte da Geometria que se ocupa de quantidades e que tem sido cultivada em todos os tempos com sumo zelo, existe outra ainda hoje bastante desconhecida, da qual Leibniz foi o primeiro a fazer menção, a qual chamou de Geometria de situação. Foi por ele estabelecido que essa parte se ocupa apenas com a determinação da situação e com a descoberta das propriedades da situação; nela não devem ser consideradas quantidades nem ser utilizado o cálculo de quantidades. No entanto, não estão suficientemente definidas quais espécies de problemas se relacionam a esta Geometria de situação, e qual método é necessário empregar em sua resolução. Por isso, quando ultimamente é feita menção a algum problema que parece ser de geometria, mas quando examinado com atenção não requer determinação de quantidades nem admite solução com auxílio do cálculo de quantidades, não tive dúvidas de o referir à geometria de situação, principalmente quando em sua resolução é considerada apenas a situação e nenhum cálculo direto é empregado. Decidi, portanto, expôr aqui um método que criei para resolver problemas desse gênero, como um tipo de Geometria de situação.

§. 2. Esse problema, dito a mim ser bastante conhecido, era o seguinte: existe uma ilha em Königsberg, na Prússia, dita *der Kneiphof*, e que o rio que a cerca é dividido em dois ramos, como se pode ver na figura.



Sobre os ramos deste rio foram construídas sete pontes, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* e *g*, e acerca dessas pontes era proposta a questão, se alguém poderia estabelecer um curso tal que passe por cada uma das pontes uma vez e não mais que uma vez. Disseram-me que uns negam, outros duvidam, e que ninguém afirma que isso possa ser feito. A partir disso, formulei em seguida o problema com a máxima generalidade: qualquer que seja a figura do rio e sua distribuição em ramos, e qualquer que seja o número de pontes, descobrir se é possível passar ou não sobre cada ponte uma só vez.

§. 3. O que certamente diz respeito ao problema das sete pontes de Königsberg é que ele pode ser resolvido com a total enumeração de todos os cursos que podem ser estabelecidos. Com isso, saberíamos se algum curso viria a satisfazer o problema ou não. Mas esse modo de resolução seria demasiadamente difícil e trabalhoso por causa do grande número de combinações, e em outras questões com muito mais pontes certamente não poderia ser empregado. Além disso, se essa operação fosse assim levada a cabo, seriam encontradas muitas coisas que não estavam no problema, o que sem dúvida seria a origem de grande dificuldade. Por isso, tendo deixado esse método de lado, procurei outro que não faria mais do que mostrar se tal caminho pode ser feito ou não, pois suspeitei que um tal método seria muito mais simples.

§. 4. Todo o meu método repousa na adequada designação de cada trânsito pelas pontes, para o que utilizo as letras maiúsculas A, B, C, D, atribuídas a cada região separada pelo rio. Assim, se alguém migra da região A para a B pela ponte *a* ou *b*, denoto esse trânsito pelas letras AB, das quais a primeira mostra a região de onde veio o viajor, e a segunda dá a região aonde chega depois de atravessada uma ponte. Se, logo a seguir, o viajor sai da região B para a região D pela ponte *f*, este trânsito será representado pelas letras BD. Denoto, porém, dois trânsitos AB e BD, feitos sucessivamente, pelas três letras ABD somente, porque a letra do meio, B, designa tanto a região na qual o primeiro trânsito chega quanto a região da qual o segundo trânsito sai.

§. 5. De modo semelhante, se o viajor avança da região D para a região C pela ponte *g*, denotarei esses três trânsitos feitos sucessivamente pelas quatro letras ABDC. Dessas quatro letras, ABDC, será entendido que o viajor, primeiro na região A, migrou para a região B e daí partiu para a região D, e depois, por fim, partiu dessa para a região C. Como essas regiões estão mutuamente separadas entre si pelo rio, é necessário que o viajor passe por três pontes. Assim, os trânsitos feitos sucessivamente por quatro pontes serão denotados por cinco letras; e se o viajor passa por um número qualquer de pontes, sua migração será denotada por um número de letras maior em uma unidade do que o número de pontes. Por essa razão, para designar o trânsito por sete pontes são requeridas oito letras.

§. 6. Com essa maneira de designação, não atento por quais pontes o trânsito é feito. Se esse trânsito pode ser feito de uma região em outra por várias pontes, a designação será a mesma, indicando apenas a região de chegada. Entende-se disso que, se o curso pode ser feito pelas sete pontes da figura de tal maneira que passe por cada uma somente uma vez, e por nenhuma duas vezes, esse curso pode ser representado por oito letras, e essas letras devem ser dispostas de tal maneira que a sucessão imediata das letras A e B ocorra duas vezes, porque há duas pontes *a* e *b* ligando essas duas regiões A e B; também a sucessão das letras A e C deve ocorrer duas vezes nessa série de oito letras; e ainda, a sucessão das letras A e D deve ocorrer uma vez; e do mesmo modo, é necessário que ocorra uma vez a sucessão das letras B e D, e também a das letras C e D.

§. 7. A questão, portanto, reduz-se a que se forme, com as quatro letras A, B, C, e D, uma série de oito letras na qual todas aquelas sucessões ocorram tantas vezes quantas forem exigidas. Mas antes de envidar esforços em tal disposição, convém mostrar se tal maneira de dispor essas letras é possível ou não. Pois se puder ser demonstrado que tal disposição não pode de todo ocorrer, será inútil todo trabalho despendido para tal. Por essa razão, investiguei uma regra, com a ajuda da qual possa ser facilmente discernido, tanto para essa questão quanto para todas outras semelhantes, se tal disposição de letras possa existir.

§. 8. Considero, para encontrar tal regra, uma única região A, para a qual conduza um número qualquer de pontes *a*, *b*, *c*, *d*, etc.

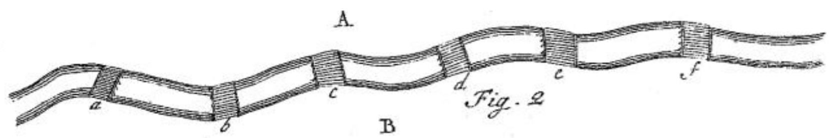


Fig. 2

Dessas pontes, observo primeiro uma única, *a*, que conduz à região A. Agora, se o viajor passa por essa ponte, então deve ter estado na região A antes do trânsito, ou chega em A depois do trânsito. Assim, na maneira de designar o trânsito acima estabelecida, é necessário que a letra A ocorra uma vez. Se três pontes, digamos, *a*, *b*, *c*, levam à região A, e o viajor passa por todas as três, então, na designação de sua migração, a letra A ocorrerá duas vezes, seja com início do curso em A ou não. De modo semelhante, se cinco pontes conduzem a A, na designação do trânsito por todas elas a letra A deve ocorrer três vezes. E se o número de pontes for um número ímpar qualquer, e se a esse número for acrescentada uma unidade, sua metade dará quantas vezes a letra A deve ocorrer.

§. 9. Assim, no caso da travessia da pontes de Königsberg, porque cinco pontes, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, levam à ilha A, é necessário que na designação do trânsito por essas pontes a letra A ocorra três vezes. E que a letra B deve ocorrer duas vezes, porque três pontes conduzem à região B. De modo semelhante, a letra D deve ocorrer duas vezes, e também duas vezes a letra C. Portanto, na série de oito letras, com as quais o trânsito por sete pontes deverá ser designado, a letra A deverá estar presente três vezes, e as letras B, C e D duas vezes cada uma. Mas isso não pode ser ser feito de forma alguma em uma série de oito letras. Disso fica claro, que tal trânsito não pode ser feito pelas sete pontes de Königsberg.

§. 10. De modo semelhante sobre todos os outros casos. Se o número de pontes que conduzem a uma região qualquer for ímpar, é possível julgar se o trânsito pode ser feito uma só vez através de cada uma. Pois se ocorre que a soma de todas as vezes em que cada letra deve ocorrer for igual ao número de todas as pontes aumentado em uma unidade, então tal trânsito pode ser feito. Se, do contrário, como acontece em nosso exemplo, a soma de todas as vezes for maior que o número de pontes aumentado em uma unidade, então tal trânsito não pode, de forma alguma, ser feito. A regra que dei para encontrar o número de vezes de A, a partir do número de pontes que levam a A, vale igualmente para todas as pontes que partem ou de uma só região B, como se vê na figura, ou a partir de várias. Considerando apenas a região A, pergunto quantas vezes a letra A deve ocorrer.

§. 11. Mas, porém, se o número de pontes que levam à região A for par, então é preciso observar, acerca do trânsito feito através de cada uma, se no início o viajor começará seu curso a partir da região A ou não. Pois se duas pontes levam à região A, e o viajor começa seu curso a partir de A, então a letra A deve ocorrer duas vezes, pois deve aparecer uma vez na designação da saída de A por uma ponte, e uma vez também na designação do retorno pela outra ponte. Mas se o viajor começa o curso a partir de outra região, então a letra A ocorrerá apenas uma vez, pois, uma vez posta na sequência, ela determinará tanto a chegada quanto a saída de A, como estabeleci na designação de tal curso.

§. 12. Conduzam-se agora quatro pontes para a região A, e que o viajor comece seu curso a partir da região A. Assim, na designação de todo o curso, a letra A deverá aparecer três vezes, se ele passar por cada ponte uma só vez. Mas se ele começar a andar a partir de outra região, então a letra A ocorrerá apenas duas vezes. Se seis pontes conduzem à região A, e se o início do curso é tomado a partir de A, então a letra A ocorrerá quatro vezes; mas se o viajor não partir de A, então a letra A deverá ocorrer apenas três vezes. Assim, como regra geral, se o número de pontes for par, a metade desse número dará o número de vezes que a letra A deve ocorrer, se o início do curso não começar em A. E a metade aumentada em uma unidade dará o número de vezes que a letra A deve ocorrer, com início do curso tomado a partir da região A.

§. 13. Porque em tal curso o início se dá apenas a partir de uma só região, defino, a partir do número de pontes que levam a uma região, o número de vezes que uma letra que denota uma região deve ocorrer como a metade da soma do número de pontes aumentado em uma unidade, se o número de pontes for ímpar; e metade do número de pontes se este for par. Daí que, se o número de todas as vezes se iguala ao número de pontes aumentado em uma unidade, então é possível o trânsito desejado, tomando-se o início a partir da região à qual leva um número ímpar de pontes. Mas se, por outro lado, o número de todas as vezes for menor em uma unidade do que o número de pontes aumentado em uma unidade, então o trânsito é possível com início na região a qual conduz um número par de pontes, porque desse modo o número de vezes será aumentado em uma unidade.

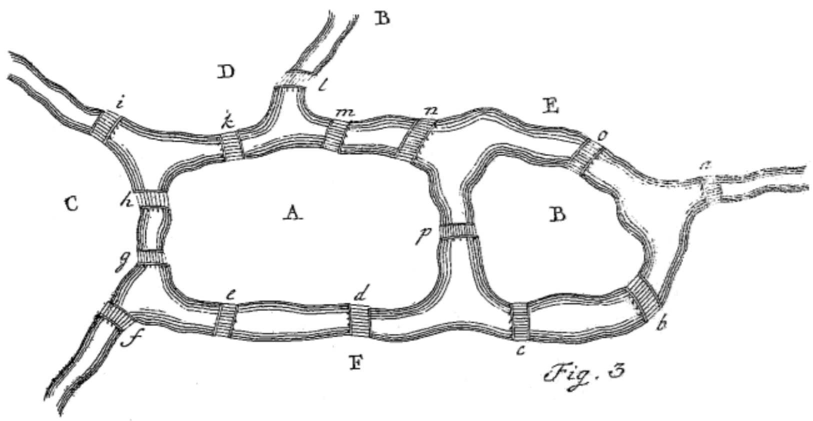
§. 14. Portanto, dada qualquer figura de água e pontes, estabeleço o procedimento seguinte para investigar se alguém pode passar sobre cada ponte uma só vez. Primeiro, designo cada um das regiões separadas por água entre si com as letras A, B, C, etc. Segundo, somo o número de todas as pontes, aumento-o em uma unidade e o sobrescrevo sobre a coluna seguinte. Terceiro, do lado de cada letra A, B, C, etc., escrevo o número de pontes que levam à região correspondente. Quarto, marco com um asterisco as letras que têm números pares adscritos. Quinto, escrevo ao lado a metade de cada um desses números pares, e a metade de cada número ímpar aumentado em uma unidade. Sexto, somo todos esses números escritos por último. Se essa soma for uma unidade menor ou igual ao número prefixado acima, então concluo que o trânsito desejado pode ser feito. Mas deve-se ter em mente que se a soma encontrada for uma unidade menor do que esse número, então o início da caminhada deve se dar a partir da região marcada com um asterisco, e a partir de uma região não marcada se a soma for igual a tal número. Assim, portanto, para o caso das pontes de Königsberg, o procedimento é o seguinte:

O número de pontes é 7; aumentado em uma unidade, é 8:

	Pontes	
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Portanto, porque a soma dá mais do que 8, o trânsito não pode absolutamente ser feito.

§. 15. Sejam duas ilhas A e B circundadas por água, com a qual comunicam quatro rios, como mostra a figura.



Além disso, sejam quinze pontes *a*, *b*, *c*, *d*, etc., sobre a água que circunda as ilhas e sobre os rios. Pergunta-se se alguém pode instituir um curso que passe por todas as pontes, mas por nenhuma mais do que uma só vez. Primeiro, portanto, designo todas as regiões mutuamente separadas entre si pela água pelas letras A, B, C, D, E, F, de sorte que sejam seis regiões. Daí aumento o número de pontes, 15, em uma unidade, escrevo a soma, 16, e passo à operação seguinte.

		16
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

Terceiro, escrevo as letras A, B, C, etc., uma por uma, e ponho ao lado de cada o número de pontes que levam àquela região: oito pontes levam a A, quatro a B, etc. Quarto, noto com um asterisco as letras com números pares. Quinto, em uma terceira coluna, escrevo a metade dos números pares, e aumento os ímpares em uma unidade, colocando lá sua metade. Sexto, adiciono cada número da terceira coluna e obtenho a soma 16. Segue-se que o trânsito pode ser feito, mas somente se o curso começar a partir ou da região D ou da E, pois essas não foram notadas com um asterisco. O curso, então, pode ser feito assim E*a*F*b*B*c*F*d*A*e*F*f*C*g*A*h*C*i*D*k*A*m*E*n*A*p*B*o*E*l*D, onde entre cada letra maiúscula coloquei a ponte pela qual passa o trânsito.

§. 16. Desta maneira, portanto, será fácil julgar, em um caso bastante complicado, se o trânsito pode ser feito ou não uma vez só por todas as pontes. No entanto, ainda apresentarei um modo muito mais fácil de o saber, um que se deriva facilmente do modo apresentado, depois que eu tiver trazido à discussão as observações seguintes. Primeiro, observo que, somados todos os números de pontes adscritos às letras A, B, C, o resultado é duas vezes maior que todo o número de pontes. A razão disto é que nesse cômputo, no qual são numeradas todas as pontes que conduzem em uma data região, cada ponte é numerada duas vezes, pois cada ponte se refere a uma e a outra região que une.

§. 17. Segue-se, portanto, dessa observação, que a soma de todas as pontes que conduzem a cada uma das regiões é um número par, porque sua metade é igual ao número de pontes. Portanto, não é possível que entre o número de pontes que levam em qualquer região haja um único número ímpar, nem também que três sejam ímpares, nem cinco, etc. Por isso, se alguns números de pontes adscritos às letras A, B, C, etc. são ímpares, é necessário que seu número seja par, assim como no exemplo de Königsberg eram quatro os números ímpares de pontes adscritos às letras das regiões A, B, C, D, como é possível ver no §. 14. Também no exemplo precedente, do §. 15, apenas dois são os números ímpares, adscritos às letras D e E.

§. 18. Como a soma de todos os números adjuntos às letras A, B, C, etc. é igual ao dobro do número de pontes, fica claro que aquela soma, aumentada em dois e dividida por dois, dá o número prefixado à operação. Se, portanto, todos os números adscritos às letras A, B, C, D, etc. forem pares, e se a metade de cada um for tomada para obter os números da terceira coluna, a soma destes números será uma unidade menor do que o número sobrescrito. Por isso, nesses casos o trânsito por todas as pontes sempre poderá ser feito. Pois em qualquer região que o curso se inicie, ela terá pontes em numero par que levam a si, como se requer. Assim poderá ser feito no exemplo de Königsberg, que alguém por todas as pontes passe duas vezes, como se cada ponte fosse dividida em duas, e o número de pontes que leva a qualquer região será par.

§. 19. Além disso, se apenas dois números adscritos às letras A, B, C, etc., forem ímpares, e todos os restantes pares, então o trânsito desejado é sempre possível, mas apenas se o curso começar a partir da região à qual tende um número ímpar de pontes. Pois se os números pares são divididos ao meio, e também os ímpares são aumentados em uma unidade, como prescrito, a soma dessas metades será uma unidade maior do que o número de pontes, e por isso igual ao número prefixado. Também a partir disso se percebe, que se houver quatro, ou seis, ou oito, etc., números ímpares na segunda coluna, então a soma dos números da terceira coluna será maior do que o número prefixado, excedendo-o em uma unidade, ou duas, ou três, etc., e por isso o trânsito não pode ser feito.

§. 20. Portanto, proposto qualquer caso, será possível saber, fácil e imediatamente, se o trânsito pode ser feito uma só vez por todas as pontes ou não com a ajuda desta regra. Se houver mais do que duas regiões às quais levam um número ímpar de pontes, então certamente pode-se afirmar que tal trânsito não é possível. Se, porém, o número de pontes que levam a apenas duas regiões for ímpar, então o trânsito poderá ser feito, mas apenas se o curso se iniciar em uma destas duas regiões. Se, por fim, não houver nenhuma região à qual leva um número ímpar de pontes, então o trânsito desejado poderá ser feito com início a partir de qualquer região. Essa regra, portanto, satisfaz plenamente ao problema proposto.

§. 21. Quando tiver sido determinado se tal trânsito pode ser realizado, resta ainda a questão de como o curso deve ser feito. Para isso, utilizo a seguinte regra: removam-se mentalmente, quantas vezes possíveis, pares de pontes que conduzem de uma a outra região, e desse modo o número de pontes geralmente diminui bastante. Então se verá que se torna fácil o curso desejado pelas pontes restantes, e que as pontes eliminadas mentalmente não modificarão muito esse curso, o que ficará imediatamente claro com um pouco de atenção. Com efeito, não julgo necessário prescrever mais nada para a determinação dos cursos.

Bibliografia

BIGGS, N. L., LLOYD, E. K., e WILSON, R. J. *Graph Theory – 1736-1936*. New York: Oxford University Press, 1976.
EULER, Leonhard. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Disponível em *http://eulerarchive.maa.org*. Acesso: 21/09/2014.
NEWMAN, James R. *The World of Mathematics*. Vol 1. Redmond: Microsoft Press, 1988.

Frederico José Andries Lopes
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT – Brasil
E-mail: contato@fredlopes.com.br

Plínio Zornoff Táboas†